

30 DAYS DAILY STEPS TO CALCULUS

30 วัน วันละนิด ปรับพื้นฐานสู่แคลคูลัส

CMU
CHIANG MAI UNIVERSITY

MATH
diversity@CMU

FACULTY OF SCIENCE
CHIANG MAI UNIVERSITY



ศุภณัฐ ชัยดี
สมลักษณ์ อุดดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

30 วัน
วันละนิด

ปรับเปลี่ยนคณิตสู่
แคลคูลัส

30 Days : Daily Steps to Calculus

โดย

ผศ.ดร.ศุภณัฐ ชัยดี
รศ.ดร.สมลักษณ์ อุดดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

หนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
จัดทำและเผยแพร่เพื่อประโยชน์ทางการศึกษาในวงกว้างโดยไม่มีค่าใช้จ่ายใด ๆ
ไม่อนุญาตให้นำไปใช้เชิงพาณิชย์ก่อนได้รับอนุญาตจากผู้เขียน

หนังสือ “30 วัน วันละนิด ปรับพื้นฐานคณิตสู่แคลคูลัส -- 30 Days : Daily Steps to Calculus”

จัดทำโดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ศุภณัฐ ชัยดี และ รองศาสตราจารย์ ดร.สมลักษณ์ อุตฺติ
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
239 ถนนห้วยแก้ว ตำบลสุเทพ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ 50200

เผยแพร่ออนไลน์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
<https://math.science.cmu.ac.th>
เดือนพฤษภาคม พ.ศ.2569

ข้อคิดเห็นหรือข้อเสนอแนะ โปรดส่งมาได้ที่อีเมล supanut.c@cmu.ac.th

คำนำ

หนังสือ “30 วัน วันละนิด ปรับพื้นฐานคณิตสู่แคลคูลัส -- 30 Days : Daily Steps to Calculus” เกิดจากประสบการณ์ของผู้เขียนในการสอนวิชาแคลคูลัสให้นักศึกษาชั้นปีที่ 1 จากทั้งคณะวิทยาศาสตร์และคณะวิศวกรรมศาสตร์มาเป็นระยะเวลาหนึ่ง ผู้เขียนพบว่า ปัญหาหลักของผู้เรียนที่ไม่สามารถทำความเข้าใจแคลคูลัสได้นั้น ไม่ได้เกิดจากความยากของเนื้อหาแคลคูลัสโดยตรง หากแต่เกิดจากความไม่แข็งแรงของพื้นฐานคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต่อการเรียนในระดับดังกล่าว

ปัญหานี้จะเป็นสิ่งที่พบได้ทั่วไปในหมู่นักเรียนนักศึกษาทั่วประเทศ สอดคล้องกับข้อสังเกตของอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์หลายท่าน และยิ่งทวีความรุนแรงขึ้นในช่วงการแพร่ระบาดของเชื้อไวรัสโคโรนา 2019 ซึ่งส่งผลให้สมรรถนะทางการเรียนของผู้เรียนถดถอยลง ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ได้พยายามแก้ไขปัญหาดังกล่าวหลากหลายแนวทาง เช่น การสอบวัดพื้นฐานคณิตศาสตร์ การจัดสอนทบทวนระยะสั้นก่อนเปิดภาคการศึกษา และการพัฒนาคอร์สออนไลน์เพื่อปรับพื้นฐาน อย่างไรก็ตาม ผลลัพธ์ยังไม่เป็นที่น่าพอใจนัก โดยสาเหตุหนึ่งอาจมาจากการเรียนรู้ที่ขาดความต่อเนื่องและสม่ำเสมอ

ด้วยเหตุนี้ ผู้เขียนจึงมีแนวคิดในการรวบรวมและสรุปสาระสำคัญของคณิตศาสตร์พื้นฐานที่จำเป็นต่อการศึกษาแคลคูลัสระดับมหาวิทยาลัย โดยมุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนอย่างต่อเนื่อง ผ่านการเขียนและการลงมือทำด้วยตนเอง ผู้เขียนเชื่อว่าการฝึกทักษะอย่างสม่ำเสมอ จะช่วยเสริมสร้างความเข้าใจในพื้นฐาน และเมื่อพื้นฐานมั่นคงแล้ว ผู้เรียนย่อมสามารถต่อยอดไปสู่แนวคิดที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ แนวทางการนำเสนอได้รับแรงบันดาลใจจากหนังสือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ของประเทศญี่ปุ่น ซึ่งได้จัดลำดับเนื้อหา ตัวอย่าง และแบบฝึกหัดจากง่ายไปยากอย่างเป็นระบบ

หนังสือเล่มนี้แบ่งเนื้อหาออกเป็นระยะเวลา 30 วัน จัดเป็น 6 ช่วง ตามหัวข้อที่ผู้เรียนเคยศึกษาซึ่งเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาในวิชาแคลคูลัสระดับมหาวิทยาลัย โดยอ้างอิงตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) และหนังสือเรียนของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้แก่

- ช่วงที่ 1 จำนวนจริงและการดำเนินการเบื้องต้น
- ช่วงที่ 2 พื้นฐานพีชคณิตเบื้องต้น
- ช่วงที่ 3 ฟังก์ชันพื้นฐาน
- ช่วงที่ 4 กราฟของฟังก์ชันและเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น
- ช่วงที่ 5 ฟังก์ชันที่สำคัญในแคลคูลัส
- ช่วงที่ 6 เนื้อหาเบ็ดเตล็ดอื่น ๆ ที่จำเป็นในแคลคูลัส

พร้อมแบบฝึกหัดกระคนเพื่อทบทวนความเข้าใจ

เนื้อหาในแต่ละวันได้รับการออกแบบอย่างเหมาะสม ประกอบด้วยแนวคิดพื้นฐาน ตัวอย่างตั้งแต่ระดับพื้นฐานไปจนถึงระดับที่ท้าทายขึ้น และแบบฝึกหัดเพื่อเสริมความเข้าใจที่คัดเลือกรวบรวมจากแบบโจทย์ปัญหาที่พบบ่อย ๆ ในแบบฝึกหัดแคลคูลัส รวมถึงคำถามเชิงวิพากษ์ ผู้เรียนควรอ่านทบทวนและฝึกทำแบบฝึกหัดด้วยตนเองอย่างสม่ำเสมอ อย่างน้อยวันละ 2 หน้า (อ่าน 1 หน้า เขียน 1 หน้า) โดยหลีกเลี่ยงการใช้เครื่องมือช่วย เช่น เครื่องคำนวณ โปรแกรม หรือปัญญาประดิษฐ์ เมื่อฝึกครบ 30 วัน ผู้เขียนคาดหวังว่าผู้เรียนจะมีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่เพียงพอสำหรับการศึกษาแคลคูลัสในระดับต่อไป **อนึ่ง หนังสือเล่มนี้เป็นหนังสือสรุปเพื่อเตรียมความพร้อม การเรียบเรียงเนื้อหาจึงต้องทำให้กระชับ หากผู้อ่านต้องการศึกษารายละเอียดเพิ่มเติม โปรดศึกษารายละเอียดจากหนังสือเรียนของ สสวท. หรือศึกษาจาก Project 14 ของ สสวท. เช่นกัน**

ข้อห้ามสำหรับการใช้เชิงพาณิชย์

หนังสือเล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อให้ใช้เป็นประโยชน์ต่อการศึกษาในวงกว้าง จึงเผยแพร่ในพื้นที่สาธารณะผ่านทางเว็บไซต์ ผู้เขียน **ไม่อนุญาต** ให้ใช้หนังสือเล่มนี้เพื่อการพาณิชย์ (ขอบเขตการอนุญาต อาทิ การเรียนการสอนในโรงเรียน การสอนปรับพื้นฐานระดับมหาวิทยาลัย ที่ไม่ได้เป็นไปเพื่อการทำกำไร หรือการผลิตเพื่อจำหน่ายในราคาต้นทุนของหน่วยงาน) ทั้งนี้ หากผู้สนใจนำหนังสือเล่มนี้ไปผลิตเพื่อใช้งานด้านการศึกษา ขอความกรุณาแจ้งผู้เขียนทราบด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง

การใช้ปัญญาประดิษฐ์ในการจัดทำหนังสือ

ในกระบวนการจัดทำหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนได้ใช้ปัญญาประดิษฐ์ ChatGPT เพื่อช่วยสรุปแนวคิดและสร้างแบบฝึกหัด ภายใต้การกำกับทิศทางเนื้อหาอย่างใกล้ชิดโดยผู้เขียน สำหรับการจัดเรียงพิมพ์ ใช้โปรแกรม Pages บนเครื่องคอมพิวเตอร์แบบ Mac และการสร้างกราฟใช้แอปพลิเคชัน Desmos บนเว็บไซต์ รวมถึง Gemini ในการสร้างรูปภาพตัวการ์ตูนประกอบหนังสือที่ปรับจากเว็บไซต์ <https://humanation.app/avatar> เพื่อเพิ่มความสวยงามน่าอ่านของหนังสือเล่มนี้

ท้ายที่สุดนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณผู้มีส่วนสนับสนุนทุกท่าน รวมถึงบูรพาจารย์ที่ได้ถ่ายทอดความรู้และประสบการณ์ นอกจากนี้ ขอขอบคุณ พศิน พวงสมบัติ ที่ช่วยทดลองทำแบบฝึกหัดและให้ข้อเสนอแนะสำหรับการแก้ต้นร่างของหนังสือเล่มนี้

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียนในการทบทวนพื้นฐานคณิตศาสตร์ และสามารถต่อยอดสู่การเรียนรู้ในระดับที่สูงขึ้นได้อย่างมั่นใจ ทั้งนี้ หากพบข้อผิดพลาด สามารถแจ้งผู้เขียนเพื่อปรับปรุงในโอกาสต่อไปได้ผ่านทางอีเมล นอกจากนี้ ผู้เขียนมีแผนพัฒนาสื่อวิดีโอประกอบหนังสือ เพื่อเสริมประสิทธิภาพในการเรียนรู้ในอนาคต และปรับปรุงหนังสือเล่มนี้ให้ดียิ่งขึ้น ขอให้ติดตามในโอกาสต่อไป

ศุภณัฐ ชัยดี
สมลักษณ์ อุดดี

พฤษภาคม 2569

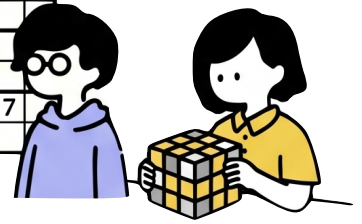
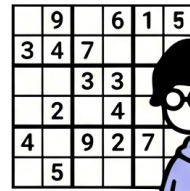
สารบัญ

วันที่	เนื้อหา	หน้าที่
	แบบฝึกหัดก่อนเรียน (Pre-test)	1
	ช่วงที่ 1 จำนวนจริงและการดำเนินการเบื้องต้น	5
1	จำนวนและการดำเนินการ	6
2	เศษส่วน	8
3	เลขยกกำลัง	10
4	รากของจำนวนจริง	12
5	สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร	14
	ช่วงที่ 2 พื้นฐานพีชคณิตเบื้องต้น	17
6	พหุนาม	18
7	เอกลักษณ์ของพหุนามบางแบบ	20
8	การแยกตัวประกอบของพหุนาม	22
9	สมการพหุนามกำลังสอง	24
10	อสมการและค่าสัมบูรณ์	26
	ช่วงที่ 3 ฟังก์ชันพื้นฐาน	29
11	ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30
12	ฟังก์ชันบางชนิดที่น่าสนใจ	32
13	การสร้างฟังก์ชันใหม่	34
14	สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน	36
	ช่วงที่ 4 กราฟของฟังก์ชันและเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น	39
15	กราฟเส้นตรง	40
16	กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง	42
17	สมการของภาคตัดกรวย	44
18	ระบบสมการสองตัวแปร	46
19	การเลื่อนแกนทางขนาน	48
	ช่วงที่ 5 ฟังก์ชันที่สำคัญในแคลคูลัส	51
20	ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	52
21	ฟังก์ชันลอการิทึม	54
22	สมการและอสมการลอการิทึม	56
23	ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และอัตราส่วนตรีโกณมิติ	58
24	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ : วงกลมหนึ่งหน่วย	60
25	กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	62
26	เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่สำคัญ	64
27	ฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ	66
	ช่วงที่ 6 เนื้อหาเบ็ดเตล็ดอื่น ๆ ที่จำเป็นในแคลคูลัส	69
28	สังยุคของราก	70
29	เศษส่วนของพหุนาม	72
30	กราฟของอสมการสองตัวแปร	74
	แบบฝึกหัดหลังเรียน (Post-test)	77

ปฐมนิเทศก่อนเรียน

สวัสดีครับทุกคน !

ยินดีต้อนรับสู่ภารกิจ 30 วัน วันละนิด ปรับพื้นฐานคณิตสู่แคลคูลัส เพื่อให้การเรียนรู้ของเราเป็นเป้าหมาย เราารู้จักตัวเอง และมาต่อตกลงของการเรียนด้วยกันก่อน



ตัวฉันชื่อ.....

ฉันคิดว่า ความรู้คณิตศาสตร์ที่ฉันมี เพียงพอต่อการเรียน แคลคูลัสหรือยัง

☐ พร้อมเต็มที่ ☐ ได้อยู่ ☐ ไม่ไหวแล้ว

การสอบรอบที่ผ่านมา คะแนนคณิตศาสตร์ฉันเป็นยังไรบ้าง

คะแนน A-level คณิตศาสตร์ / 100

คะแนน TPAT3 / 100

คะแนน TGAT2 / 100

เกรตคณิตฯ ตอน ม.ปลายของฉันเป็นอย่างไรบ้าง

	เทอม 1	เทอม 2
คณิตพื้นฐาน ม.4		
คณิตเพิ่มเติม ม.4		
คณิตพื้นฐาน ม.5		
คณิตเพิ่มเติม ม.5		
คณิตเพิ่มเติม ม.6		

ฉันมีเป้าหมายในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับมหาวิทยาลัยอย่างไรบ้าง

ฉันอยากปรับปรุงการเรียนของฉัน ผ่านมาอย่างไรบ้าง

คำแนะนำการใช้หนังสือเล่มนี้

หนังสือเล่มนี้ ถูกออกแบบให้ผู้อ่านลงมือทำอย่างต่อเนื่อง เป็นเวลา 30 วัน ในแต่ละวันมีจำนวน 2 หน้า ประกอบด้วย สรุปแนวคิดสำคัญ และตัวอย่าง 1 หน้า และแบบฝึกหัด 1 หน้า

ก่อนเริ่มเรียน ผู้อ่านควรทำแบบฝึกหัดก่อนเรียนเพื่อวัดความรู้ ผู้อ่านควรทำแบบฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอทุกวัน ตามวันที่แบ่งไว้ เมื่อทำจนครบ 30 วันแล้ว ควรทำแบบฝึกหัดหลังเรียน เพื่อตรวจสอบพัฒนาการในการเรียน

ในระหว่างการเรียน ผู้อ่านควรปิดเครื่องมือถือสาร เพื่อให้เกิดสมาธิในการเรียน รวมถึงละเว้นการใช้เครื่องมือช่วย อาทิ เครื่องคิดเลข ซอฟต์แวร์ รวมถึงปัญญาประดิษฐ์ เพื่อฝึกการคิดด้วยตนเอง

ขอแนะนำให้ผู้อ่านจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้ออกมาเป็นฉบับกระดาษ จะช่วยให้ผู้อ่านได้โฟกัสกับการฝึกหัดมากขึ้น

ผู้เรียนส่วนใหญ่ที่มีปัญหาการเรียนแคลคูลัสในระดับมหาวิทยาลัย มักมีสาเหตุมาจากความเข้าใจพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน รวมถึงความไม่เข้าใจในสัญลักษณ์ นิยาม และข้อตกลงทางคณิตศาสตร์ ปัญหานี้อาจมีผลมาจากการท่องสูตร โดยขาดความเข้าใจ ดังนั้น ในหนังสือเล่มนี้ เราแนะนำให้ศึกษาแนวคิดและฝึกฝนทีละนิด จากง่ายไปยาก หากผู้อ่านต้องการศึกษาทบทวนรายละเอียดเพิ่มเติม ขอแนะนำให้ใช้หนังสือของ สสวท. หรือศึกษาจาก Project 14 เพื่อเพิ่มพูนความเข้าใจ

แต่ละวันจะระบุ Level (ระดับชั้นของเนื้อหา) สำหรับให้กลับไปทบทวนเพิ่มเติม (ดูเพิ่มเติมได้จาก Project 14)

หน้า 18 ระบบการสองตัวแปร

สมการเส้นตรง: $ax + by = c$

สมการเส้นโค้ง: $x^2 + y^2 = r^2$

สมการพหุนาม: $ax^2 + bx + c = 0$

สมการอนุกรม: $a_n = a_1 + (n-1)d$

สมการอนุกรม: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

สมการอนุกรม: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

สมการอนุกรม: $a_n = a_1 r^{n-1}$

สมการอนุกรม: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

สมการอนุกรม: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

สมการอนุกรม: $a_n = a_1 r^{n-1}$

สมการอนุกรม: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

สมการอนุกรม: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

หน้า 19 ระบบการสองตัวแปร

สมการเส้นตรง: $ax + by = c$

สมการเส้นโค้ง: $x^2 + y^2 = r^2$

สมการพหุนาม: $ax^2 + bx + c = 0$

สมการอนุกรม: $a_n = a_1 + (n-1)d$

สมการอนุกรม: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

สมการอนุกรม: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

สมการอนุกรม: $a_n = a_1 r^{n-1}$

สมการอนุกรม: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

สมการอนุกรม: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

สมการอนุกรม: $a_n = a_1 r^{n-1}$

สมการอนุกรม: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

สมการอนุกรม: $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

หน้า Concept และตัวอย่าง

แบบฝึกหัด (มีเฉลยเฉพาะคำตอบตอนที่ 2 ส่วนท้าย)

แบบทดสอบก่อนเรียน

วัดความเข้าใจที่มีอยู่แล้วก่อนเริ่มเรียน



กติกา

1. แบบทดสอบก่อนเรียน มีจำนวน 30 ข้อ ใช้เวลาทำ 60 นาที
2. ข้อใดที่ไม่แน่ใจ หรือทำไม่ได้ ให้ข้ามไปทำในข้อถัดไปทันที
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องมือช่วย อาทิ เครื่องคำนวณ โทรศัพท์มือถือ ปัญญาประดิษฐ์ หรือเปิดหนังสืออื่นใดระหว่างทำแบบทดสอบ เพื่อให้แบบทดสอบฉบับนี้สะท้อนความสามารถที่แท้จริงของผู้อ่าน

ถ้าพร้อมแล้ว ลงมือทำได้เลย !

แบบทดสอบก่อนเรียน (ใช้เวลาทำ 1 ชั่วโมง)

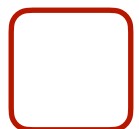
คำชี้แจง เติมคำตอบลงในช่องว่าง

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	$-(3 + 1)^2 + 5 \times 4 - 8 \div 2 =$	
2	$\frac{7}{8} \div \frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) =$	
3	$\frac{(12^{-1} \times 2^3)^2 \times 3^2}{2^{-3} \times 6^{-2}}$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวกได้เป็น	
4	$\frac{\sqrt{75} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{45}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{30}}$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
5	กำหนด $2(x + 3) - 3(x - 2) = 4x - 10$ แก้สมการจะได้ $x =$	
6	$(2x + 1)(x - 6) - (x^2 - 2x + 2)$ ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะได้	
7	$(2x + 1)^2 - (3x - 2)^2$ ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะได้	
8	$(4x^2 - 11x + 6)$ แยกตัวประกอบได้เป็น	
9	กำหนด $6x^2 + 3x - 3 = 0$ แก้สมการจะได้ $x =$	
10	กำหนด $ 2x - 3 \leq 7$ แก้สมการจะได้ช่วงของคำตอบคือ	
11	กำหนด $f(x) = x^2 - 2x + 5$ จะได้ $f(-2) =$	
12	กำหนด $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$ จะได้ $f(-1) + f(2) - f(3) =$	
13	กำหนด $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x + 2$ จะได้ $f(g(2)) =$	
14	กำหนด $f(x) = 3x + 2$ เมื่อ $x \geq 0$ จะได้ว่าฟังก์ชันผกผันของ f คือ	
15	สมการของเส้นตรงที่มีความชัน 2 และผ่านจุด (1,2) คือ	
16	วาดกราฟของ $f(x) = (x - 1)^2 - 2$	

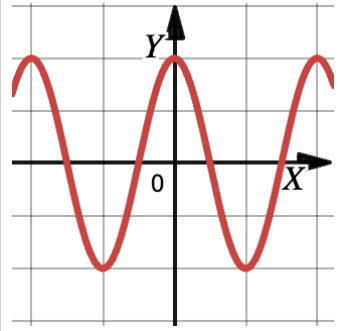
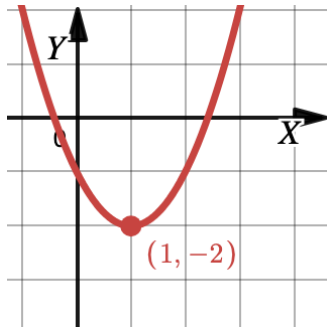
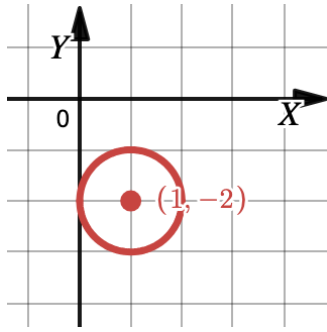
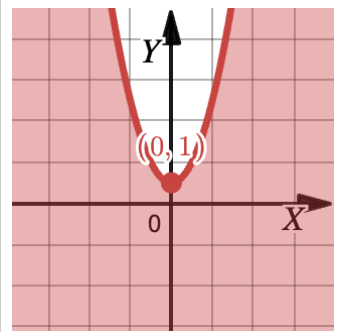
ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
17	สมการ $x^2 + 2y^2 = 1$ มีกราฟเป็น	
18	กำหนด $2x + y = 7$ $x - 2y = 5$ แก้ระบบสมการ จะได้ $x = \dots\dots, y = \dots\dots$	
19	วาดกราฟของ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$	
20	กำหนด $3^{2x-1} = 27$ จะได้ $x =$	
21	$3 \log_2(4) - 4 \log_2(\sqrt{2})$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
22	กำหนด $\log_2(x - 1) = 3$ จะได้ $x =$	
23	$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \tan 45^\circ$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
24	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
25	วาดกราฟของ $f(x) = 3 \sin x$	
26	$\cos^4 x$ จัดให้อยู่ในรูปตรีโกณมิติที่มีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่งได้เป็น	
27	$\arcsin(-1) =$	
28	พจน์ $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ เมื่อทำให้ตัวส่วนไม่มีรากจะได้	
29	เมื่อหาร $2x^2 + 3x + 5$ ด้วย $x + 2$ จะได้ผลหารคือ และเศษคือ	
30	วาดกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y - x^2 \leq 1\}$	

ตรวจคำตอบได้ที่หน้า 4

คะแนน Pre-test ที่ได้



เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน (เฉพาะคำตอบ)

1	0	11	13	21	4
2	$\frac{8}{3}$	12	-2	22	$x = 9$
3	$1152 = 2^7 \times 3^2$	13	16	23	$\frac{7}{4}$
4	$\frac{5\sqrt{10}}{2}$	14	$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}, x \geq 2$	24	$\frac{1}{4}$
5	$x = \frac{22}{5}$	15	$y = 2x$	25	
6	$x^2 - 9x - 8$	16		26	$\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$
7	$-5x^2 + 16x - 3$	17	วงรี	27	$-\frac{\pi}{2}$
8	$(4x - 3)(x - 2)$	18	$x = \frac{19}{5}, y = -\frac{3}{5}$	28	$\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$
9	$x = \frac{1}{2}, -1$	19		29	ผลหาร = $2x - 1$, เศษ = 7
10	$[-2, 5]$	20	$x = 2$	30	

ช่วงที่ 1

จำนวนจริงและการดำเนินการเบื้องต้น



วันที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

Level : ประถมศึกษา - มัธยมศึกษาปีที่ 1

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- ในการดำเนินการของจำนวนในทางคณิตศาสตร์ เราใช้หลักการ BODMAS เพื่อเรียงลำดับการดำเนินการโดย
1) เรียงตามลำดับความสำคัญ 2) ในระดับความสำคัญเดียวกัน ให้ทำจากซ้ายไปขวา
B : Bracket (วงเล็บ) O : Order (อันดับ - ยกกำลัง / ราก)
D : Division - M : Multiplication (การหาร - การคูณ มีความสำคัญเท่ากัน ทำจากซ้ายไปขวา)
A : Addition - S : Subtraction (การบวก - การลบ มีความสำคัญเท่ากัน ทำจากซ้ายไปขวา)
- สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ในการกระจายวงเล็บ เราทราบว่า $-(-a) = a$
สมบัติการกระจาย (distribution property) $a(b + c) = ab + bc$
- เมื่อมีวงเล็บ ต้องกระจายเครื่องหมายหน้าวงเล็บเข้าไปในวงเล็บ ภายใต้การดำเนินการด้วย
เช่น $2 - (3 + 4) = 2 - 3 - 4$ $2 - (-3 - 4) = 2 + 3 + 4$
- ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a** เขียนแทนด้วย $|a|$ คือระยะทางที่วัดจากศูนย์ไปยังจำนวนจริง a มีค่าเป็นบวกหรือศูนย์
เช่น $|2| = 2$ $|-4| = 4$ $|-1.5| = 1.5$ $|0| = 0$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

- ตัวอย่างที่ 1** $8 + 2 \times 3 = 8 + 6 = 14$
(ไม่มีวงเล็บ ทำเครื่องหมายคูณก่อนเครื่องหมายบวก)
- ตัวอย่างที่ 2** $(8 + 2) \times 3 = 10 \times 3 = 30$
(ทำในวงเล็บก่อน แล้วทำจากซ้ายไปขวา)
- ตัวอย่างที่ 3** $18 \div 3 \times 2 = 6 \times 2 = 12$
(เครื่องหมายหารและคูณมีระดับความสำคัญเท่ากัน ทำจากซ้ายไปขวา)
- ตัวอย่างที่ 4** $20 - 4 \times 3 + 6 \div 2 = 20 - 12 + 3 = 11$
(ทำเครื่องหมายคูณและหารก่อน จากนั้นทำเรียงจากซ้ายไปขวา)
- ตัวอย่างที่ 5** $-(6 + 4) \times 2 + 3^2 = (-10) \times 2 + 9$
 $= -20 + 9 = -11$
(ทำในวงเล็บก่อน จากนั้นทำเครื่องหมายคูณให้เรียบร้อย แล้วจึงค่อยบวก)

ทบทวนความเข้าใจ 1 ข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้แก้ไขให้ถูกต้อง

ข้อความ	จริง	เท็จ	แก้ไข
$2 + 3 \times 4 = 20$			
$(2 + 3) \times 4 = 20$			
$12 \div 3 \times 2 = 8$			
$12 \div (3 \times 2) = 8$			
$-(3 + 2) = -3 + 2$			
$2 + 3^2 = 11$			
$18 - 3^2 \times 2 = 12$			
$8 + 12 \div 3 \times 2 = 16$			
$50 - 6 \times 4 + 8 \div 2 + \times 3 = 38$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงหาค่าของนิพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1 $36 \div (3 \times 2) + 5 \times 4$

② $48 \div 4 \times (3 + 1)^2$

3 $60 - 2^3 \times (5 + 1) + 12 \div 3$

4 $-(10 + 2^2 \times 3) + 4 \times 5$

5 $100 \div 5 \times 2 + 3^2 \times (4 - 1)$

⑥ $72 \div (6 + 3 \times 2) \times 4 + 5$

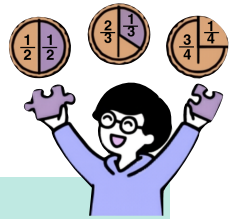
7 $72 \div [3 + 3 \times (2 + 4)] \times 5$

8 $150 - [10 \times (3 + 2^2) + 4 \times (6 - 1)]$

๑ สำหรับตัวแปร x จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย
 $3x + 2[x + 4(2x - 1)]$

⑩ สำหรับตัวแปร a จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย
 $5a - [2a + 3\{a - 2(1 - a)\}]$





วันที่ 2 เศษส่วน

Level : ประถมศึกษา - มัธยมศึกษาปีที่ 1

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- **การบวก - ลบ เศษส่วน** ต้องทำตัวส่วนให้เท่ากันก่อน โดยหา ค.ร.น. ของตัวส่วน จากนั้นทำตัวส่วนให้เท่ากัน (โดยการคูณจำนวนนับทั้งเศษและส่วน ให้มีตัวส่วนเท่ากับ ค.ร.น.) แล้วบวก - ลบ เฉพาะตัวเศษ เช่น

$$\bullet \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6} \quad (\text{กรณีนี้ ค.ร.น. ของ 3 และ 6 คือ 6})$$

$$\bullet \frac{1}{5} - \frac{3}{6} = \frac{1 \times 6}{5 \times 6} - \frac{3 \times 5}{6 \times 5} = \frac{6}{30} - \frac{15}{30} = -\frac{9}{30} = -\frac{3}{10} \quad (\text{กรณีนี้ ค.ร.น. ของ 5 และ 6 คือ 30})$$

- ในกรณีทั่วไป $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ เช่น $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1 \times 2 + 1 \times 3}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$

ข้อควรระวัง ห้ามบวกตัวเศษและตัวส่วนตรง ๆ เช่น $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$

- **การคูณเศษส่วน** คูณเศษกับเศษ คูณส่วนกับส่วน กล่าวคือ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

$$\text{เช่น } \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \quad (\text{อาจตัดทอนก่อนคูณ คือทอนเลข 3 กับ 6 ก่อน เพื่อให้คำนวณง่ายขึ้น})$$

- **การหารเศษส่วน** คูณด้วยเศษส่วนกลับ กล่าวคือ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

$$\text{เช่น } \frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

- **เศษส่วนซ้อน** มองเป็นเศษส่วนหารกัน $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3}$ (ค.ร.น. ของ 2, 4, 3 คือ 12)

วิธีทำ $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{6}{12} + \frac{9}{12} - \frac{8}{12}$
 $= \frac{15}{12} - \frac{8}{12}$
 $= \frac{7}{12}$

ตัวอย่างที่ 2 $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ (ค.ร.น. ของ 6, 4, 3 คือ 12)

วิธีทำ $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{10}{12} - \frac{3}{12} + \frac{8}{12}$
 $= \frac{7}{12} + \frac{8}{12}$
 $= \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

ตัวอย่างที่ 3 $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$

วิธีทำ $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{9}{8}$ (ทำคูณก่อนบวก)
 $= \frac{4}{8} + \frac{9}{8}$
 $= \frac{13}{8}$

ตัวอย่างที่ 4 $\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \right)$

วิธีทำ $\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{3}{5} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \right)$
 $= \frac{3}{5} + \frac{2}{12}$
 $= \frac{18}{30} + \frac{5}{30}$
 $= \frac{23}{30}$

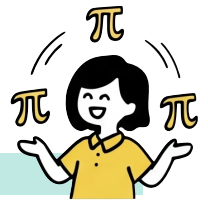
ทบทวนความเข้าใจ 1 ข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้แก้ไขให้ถูกต้อง

ข้อความ	จริง	เท็จ	แก้ไข
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{3}$			
$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{2} = \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{6}\right) \times \frac{3}{2}$			
$\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{5} + \frac{2}{12}$			
$\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right) = \frac{7-3}{8-4}$			
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงหาค่าของนิพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

❶ $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$	❷ $\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$
❸ $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$	❹ $\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right)$
❺ $\frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}} \times \frac{3}{5}$	❻ $1 - \left(\frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)\right) + \frac{5}{8}$





วันที่ 3 เลขยกกำลัง

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 1 - 2

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก เลขยกกำลังเป็นการเขียนจำนวนที่คูณซ้ำ ๆ

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}} \text{ โดยเรียก } a \text{ ว่าฐาน และเรียก } n \text{ ว่า เลขชี้กำลัง}$$

- สมบัติของเลขยกกำลัง

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$ เช่น $2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)$ เช่น $\frac{5^6}{5^2} = 5^4 = 625$
- $(a^m)^n = a^{mn}$ เช่น $(2^3)^2 = 2^6 = 64$
- $(ab)^n = a^n b^n$ เช่น $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 36$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$ เช่น $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
- $a^0 = 1, (a \neq 0)$ เช่น $7^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \neq 0)$ เช่น $2^{-3} = \frac{1}{8}$

- ข้อควรระวัง** สมบัติของเลขยกกำลังมักใช้กับการคูณและการหาร ไม่ครอบคลุมการบวก - ลบ

- ห้ามบวกเลขชี้กำลัง กล่าวคือ $a^m + a^n \neq a^{m+n}$ เช่น $2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12 \neq 2^5$
- ห้ามกระจายเลขชี้กำลังกับการบวก กล่าวคือ $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$ เช่น $(2 + 3)^2 = 25 \neq 4 + 9$
- ระมัดระวังการใช้กฎการคูณหรือหาร กล่าวคือ $a^m \times b^n \neq (ab)^{m+n}$ เช่น $2^2 \times 3^2 = 36 \neq 6^4$
- $a^0 = 1$ ใช้เมื่อ $a \neq 0$ เนื่องจากนิยาม 0^0
- ระวังเครื่องหมายลบ กล่าวคือ $(-a)^2 = a^2$ แต่ $-a^2 = -(a^2)$ เช่น $(-2)^2 = 4$ แต่ $-2^2 = -4$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

ตัวอย่างที่ 1 $\frac{3^5 \times 3^2}{3^3}$

วิธีทำ $\frac{3^5 \times 3^2}{3^3} = 3^{5+2-3}$
 $= 3^4 = 81$

ตัวอย่างที่ 2 $(2^2 \times 3^3)^2$

วิธีทำ $(2^2 \times 3^3)^2 = 2^{2 \times 2} \times 3^{3 \times 2}$
 $= 2^4 \times 3^6$
 $= 16 \times 729 = 11664$

ตัวอย่างที่ 3 $\frac{(4^2 \times 2^3)^2}{2^4}$

วิธีทำ $\frac{(4^2 \times 2^3)^2}{2^4} = \frac{((2^2)^2 \times 2^3)^2}{2^4}$
 $= \frac{(2^4 \times 2^3)^2}{2^4}$
 $= \frac{(2^7)^2}{2^4}$
 $= \frac{2^{14}}{2^4} = 2^{14-4} = 2^{10}$

ตัวอย่างที่ 4 $\frac{(2^{-3} \times 4^2)^2}{2^{-1} \times 8}$

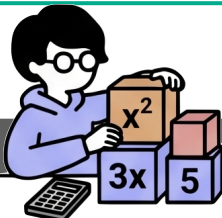
วิธีทำ $\frac{(2^{-3} \times 4^2)^2}{2^{-1} \times 8} = \frac{(2^{-3} \times (2^2)^2)^2}{2^{-1} \times 2^3}$
 $= \frac{(2^{-3} \times 2^4)^2}{2^{-1} \times 2^3}$
 $= \frac{(2^1)^2}{2^2}$
 $= \frac{2^2}{2^2} = 2^0 = 1$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้แก้ไขให้ถูกต้อง

ข้อความ	จริง	เท็จ	แก้ไข
$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$			
$2^{-1} + 2^{-1} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$			
$\frac{a^{-4}}{a^{-2}} = a^{-4-(-2)} = a^{-2}$			
$(2a)^{-2} = \frac{1}{(2a)^2} = \frac{1}{2^2 a^2} = \frac{1}{4a^2}$			
$\frac{2^{-3} \times 2^5}{2^2} = \frac{2^2}{2^2} = 2^0 = 1$			
$\frac{(2^2 \times 2^{-3})^2}{2^{-1}} = 2^2$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

① $\frac{(5^{-2} \times 25^3)^2}{5^{-3} \times 125}$	② $\frac{(6^{-1})^2 \times 2^4 \times 3^3}{2^{-2} \times 3^{-1}}$
③ $\frac{(2^2 \times 3^{-1})^3 \times (3^2 \times 2^{-1})^2}{2^{-2} \times 3^{-3}}$	④ $\frac{(18^{-1} \times 6^3)^2 \times 3^2}{2^{-3} \times 3^{-2}}$
⑤ $\left(\frac{(x^{-2}y^3)^2 \cdot (x^4y^{-1})}{(xy^{-2})^3} \right)^2, (x, y \neq 0)$	⑥ $\frac{\left(\frac{x^3y^{-2}}{(xy)^{-1}} \right)^2 \cdot \left(\frac{(x^2y)^{-1} \cdot (xy^2)^3}{x^{-1}y} \right)}{x^{-3}y^{-4}}, (x, y \neq 0)$





วันที่ 4 รากของจำนวนจริง

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 1 - 2

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- **รากที่สองของจำนวนจริง a** คือจำนวน x ที่เมื่อยกกำลังสองแล้ว ได้เท่ากับจำนวนนั้น กล่าวคือ $x^2 = a$
 - สัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ (กรณฑ์ที่สอง - square root) ใช้เขียนแทนรากที่สองที่เป็นบวกของ a ได้ว่า $x = \sqrt{a}$ และ $x = -\sqrt{a}$ เป็นรากที่สองของ a

เช่น รากที่สองของ 25 คือ 5 และ -5 เนื่องจาก $5^2 = 25$ และ $(-5)^2 = 25$

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5 \text{ และ } -\sqrt{25} = -\sqrt{5^2} = -5$$

รากที่สองของ 2 คือ $\sqrt{2}$ และ $-\sqrt{2}$
 - **ข้อควรระวัง** ภายใต้ระบบจำนวนจริง ไม่พิจารณารากที่สองของจำนวนจริงลบ และ $\sqrt{a^2} = |a| \neq \pm a$
- **รากที่ n ของจำนวนจริง a** คือจำนวน x ที่ $x^n = a$
 - สัญลักษณ์ $\sqrt[n]{a}$ (กรณฑ์ที่ n - n -th root) ใช้เขียนแทนรากที่ n ของ a

เช่น รากที่สามของ 1 เขียนแทนได้ด้วย $\sqrt[3]{1} = 1$ และรากที่สามของ -1 คือ -1 ทั้งนี้เนื่องจาก $(-1)^3 = -1$ ซึ่งเขียนได้ในรูป $\sqrt[3]{-1} = -1$
 - เราสามารถพิจารณารากที่ n ของจำนวนลบได้ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่
- **รากที่ n ในรูปแบบเลขยกกำลัง** เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1 เราทราบว่า $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ โดยที่ $\frac{m}{n}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ เรียกว่า **เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ** โดยสมบัติของเลขยกกำลัง เราสามารถพิจารณาสมบัติของรากที่ n ได้ กล่าวคือ
 - $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ เช่น $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$
 - $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ เช่น $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
 - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$ เช่น $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3}$
 - $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ และ $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ เช่น $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = |4| = 4$
 - $(\sqrt[n]{a})^n = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ a เป็นจำนวนจริง และเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ a เป็นจำนวนจริงบวก

เช่น $(\sqrt[3]{-8})^3 = -8$ $(\sqrt[4]{16})^4 = 16$

ค่าคงตัวใช้บ่อย

$$\sqrt{2} \approx 1.414$$

$$\sqrt{3} \approx 1.732$$

$$\sqrt{5} \approx 2.236$$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

ตัวอย่างที่ 1 $\sqrt{1080}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \sqrt{1080} &= \sqrt{36 \cdot 30} \\ &= 6\sqrt{30} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 $\sqrt{16x^4} \cdot \sqrt{4x^2}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \sqrt{16x^4} \cdot \sqrt{4x^2} &= \sqrt{64x^6} \\ &= \sqrt{(8x^3)^2} = 8|x^3| \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 $\frac{\sqrt[3]{54x^5} \cdot \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{3x^2}}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \frac{\sqrt[3]{54x^5} \cdot \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{3x^2}} &= \sqrt[3]{\frac{108x^6}{3x^2}} \\ &= \sqrt[3]{36x^4} \\ &= x\sqrt[3]{36x} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 $\frac{(32x^5)^{\frac{2}{3}} \cdot (4x)^{\frac{1}{2}}}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}}$ เมื่อ $x > 0$

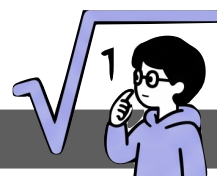
$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \frac{(32x^5)^{\frac{2}{3}} \cdot (4x)^{\frac{1}{2}}}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{(2^5)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{10}{3}} (2^2)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{(2^{\frac{3}{2}})^3 x^{\frac{9}{2}}} \\ &= \frac{2^{2+1-\frac{3}{2}} x^{2+\frac{1}{2}-\frac{9}{2}}}{2^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้แก้ไขให้ถูกต้อง

ข้อความ	จริง	เท็จ	แก้ไข
$\sqrt[4]{16x^4y^8} = 2xy^2$			
$\sqrt{50x^2} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot x^2} = 5x\sqrt{2}$			
$\frac{\sqrt{18x^3}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\frac{18x^3}{2x}} = \sqrt{9x^2} = 3 x $			
$\sqrt{8+18} = \sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$			
$\sqrt{(-3)^2 \cdot 12} = \sqrt{9 \cdot 12} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3}$			
$\sqrt[3]{a^3b^6} = ab^2$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายในรูปรากที่ n

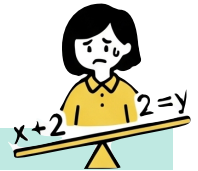
❶ $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{14}$	❷ $\frac{\sqrt{96} \cdot \sqrt{150} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{5}}$
❸ $\sqrt[3]{\frac{128x^7 \cdot 54x^2}{16x^3}}$	❹ $\left(\frac{\sqrt{48x^5} \sqrt{3x^3}}{\sqrt{2x}} \right)^2$
❺ $(16x^{-2}y^3)^{\frac{3}{4}} \cdot (8x^5y^{-2})^{\frac{1}{3}}$	❻ $\frac{(27x^6y^9)^{\frac{2}{3}}}{(3x^2y^3)^{\frac{3}{2}}}$



วันที่ 5 สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 1 - 2

วัน / เวลาที่ทำ :



Main Concept : สำคัญ

- **สมการ** คือประโยคทางคณิตศาสตร์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ (=) เพื่อบ่งบอกปริมาณที่เท่ากันทั้งสองข้าง
- **ตัวแปร (variable)** คือสัญลักษณ์ เช่น x, y, a ที่ใช้แทนตัวไม่ทราบค่า
- **คำตอบของสมการ** คือ จำนวนซึ่งเมื่อแทนในตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่าแล้วทำให้สมการเป็นจริง (สองข้างเท่ากัน)
เช่น $x + 3 = 7$ เป็นสมการที่มี x เป็นตัวแปร
และมี $x = 4$ เป็นคำตอบของสมการนี้ เพราะว่า เมื่อแทน $x = 4$ ในสมการดังกล่าว จะพบว่า
ด้านซ้ายมือ (L.H.S) คือ $4 + 3 = 7$ ซึ่งมีค่าเท่ากับด้านขวามือของสมการ (R.H.S) ทำให้สมการเป็นจริง
- **การแก้สมการ** สำหรับสมการเชิงเส้น (ตัวแปรมีเลขชี้กำลังเท่ากับหนึ่ง) ใช้สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง กล่าวคือ
 - สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
 - สมบัติการลบด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a - c = b - c$
 - สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a \times c = b \times c$
 - สมบัติการหารด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ โดยที่ $c \neq 0$
 - สมบัติการกระจาย $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- **ข้อควรระวัง** การแก้สมการจำเป็นต้องเขียนเครื่องหมายกำกับไว้เสมอ และควรเขียนเครื่องหมายเท่ากับให้ตรงกัน

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงแก้สมการเพื่อหาค่า x ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ตัวอย่างที่ 1 $x + 4 = 9$

วิธีทำ $x + 4 - 4 = 9 - 4$ (ลบด้วย 4 ทั้งสองข้าง)
 $x = 5$

ตัวอย่างที่ 2 $3x = 12$

วิธีทำ $\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ (หารด้วย 3 ทั้งสองข้าง)
 $x = 4$

ตัวอย่างที่ 3 $2x - 5 = 9$

วิธีทำ $2x - 5 + 5 = 9 + 5$ (บวกด้วย 5 ทั้งสองข้าง)
 $2x = 14$
 $\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$ (หารด้วย 2 ทั้งสองข้าง)
 $x = 7$

ตัวอย่างที่ 4 $4x + 3 = 2x + 11$

วิธีทำ $4x - 2x + 3 = 11$ (ลบด้วย $2x$ ทั้งสองข้าง)
 $2x + 3 = 11$
 $2x = 8$ (ลบด้วย 3 ทั้งสองข้าง)
 $x = 4$ (หารด้วย 2 ทั้งสองข้าง)

ตัวอย่างที่ 5 $\frac{2x-1}{3} = \frac{x+5}{2}$

วิธีทำ $2(2x - 1) = 3(x + 5)$
(คูณด้วย ค.ร.น. ของ 3 และ 2 คือ 6 ทั้งสองข้าง)
 $4x - 2 = 3x + 15$ (ใช้สมบัติการแจกแจง)
 $x = 17$
(ใช้สมบัติการบวกลบด้วยจำนวนที่เท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 6 $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{x+5}{6}$

วิธีทำ $4(2x + 1) - 3(x - 2) = 2(x + 5)$
(คูณด้วย ค.ร.น. ของ 3, 4 และ 6 คือ 12 ทั้งสองข้าง)
 $8x + 4 - 3x + 6 = 2x + 10$
(ใช้สมบัติการแจกแจง)
 $5x + 10 = 2x + 10$
 $3x = 0$
 $x = 0$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ตรวจสอบว่า ค่า x ที่กำหนดเป็นคำตอบของสมการที่กำหนดหรือไม่ ถ้าไม่เป็น จงหาค่า x

สมการ	x	เป็น	ไม่เป็น	คำตอบที่ถูกต้อง
$2x - 1 = 6$	4			
$\frac{2x - 1}{3} + 1 = 2$	2			
$3(2x - 1) - 2(x + 4) = 2x + 2$	2			
$\frac{3(x - 1)}{2} - \frac{x + 2}{4} = 4$	4			

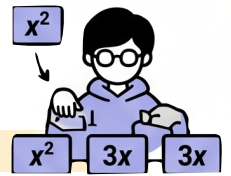
ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : แก้สมการหาค่า x

❶ $2x - 5 = 11$	❷ $3(x - 2) = 2x + 4$
❸ $5x - 3 = 2(2x + 1)$	❹ $4(x + 3) - 2(x - 1) = 3x + 10$
❺ $\frac{x}{3} + 2 = \frac{5x}{6}$	❻ $\frac{2x - 1}{3} - \frac{x + 2}{2} = 1$
❼ $\frac{3(x - 2)}{4} + \frac{2x + 1}{3} = \frac{5x}{6}$	❽ $\frac{2(x - 1)}{3} - \frac{3(x + 2)}{4} = \frac{x}{6} + 1$



ช่วงที่ 2

พื้นฐานพีชคณิตเบื้องต้น



วันที่ 6 พหุนาม

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 2

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- เอกนาม** คือ นิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูปของผลคูณของจำนวนจริง ตัวแปร โดยตัวแปรแต่ละตัวมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ เช่น $2x^2$, $3x^2y$, $\frac{2}{3}xy^2z^3$, $-6xyzw$
 - เอกนามคู่หนึ่งจะมีพจน์คล้ายกัน เมื่อเอกนามทั้งคู่มีตัวแปรเหมือนกัน และตัวแปรแต่ละตัวมีเลขชี้กำลังเท่ากัน
 - การบวก ลบ เอกนาม หากมีพจน์ที่คล้ายกัน ให้ใช้สมบัติการแจกแจง เช่น $3x^2 + 5x^2 = (3 + 5)x^2 = 8x^2$
 - การคูณ หาร เอกนาม ใช้สมบัติของเลขยกกำลังในการเขียนให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ
- พหุนาม** คือ ผลบวกและลบของเอกนามหลายเอกนาม (ที่ไม่คล้าย) โดยเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ
 - ดีกรีของพหุนาม** คือ ผลรวมของเลขชี้กำลังที่สูงที่สุดของบรรดาเอกนามที่บวกกันอยู่ เช่น พหุนาม $2x^3 + 4x + 2$ เป็นพหุนามดีกรีสาม พหุนาม $-2x^3y^2 + 4xy^3 + 2x$ เป็นพหุนามดีกรีห้า
 - การบวก - ลบพหุนาม** จะทำการบวก - ลบ พหุนามที่มีเอกนามคล้ายกัน เช่น $(3x^2 + 2x - 5) + (x^2 - x + 4) = (3x^2 + x^2) + (2x - x) + (-5 + 4) = 4x^2 + x - 1$
 - การคูณพหุนาม** ใช้สมบัติการกระจายกับพหุนาม
 - การคูณพหุนามด้วยเอกนาม เช่น $3x(2x^2 + x - 5) = 3x \cdot 2x^2 + 3x \cdot x + 3x \cdot (-5) = 6x^3 + 3x^2 - 15x$
 - การคูณพหุนามด้วยพหุนาม ให้กระจายพจน์ทีละพจน์จากวงเล็บหน้า เช่น $(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$
 $(2x - 1)(x^2 + 3x + 4) = 2x(x^2 + 3x + 4) - 1(x^2 + 3x + 4)$
 $= (2x^3 + 6x^2 + 8x) - (x^2 + 3x + 4)$
 $= 2x^3 + 6x^2 + 8x - x^2 - 3x - 4$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

ตัวอย่างที่ 1 $3x^2 + 5x - 2x^2 - 4x$

วิธีทำ $3x^2 + 5x - 2x^2 - 4x$
 $= (3x^2 - 2x^2) + (5x - 4x)$
 $= x^2 + x$

ตัวอย่างที่ 2 $(3x^2)(-2x^3)$

วิธีทำ $(3x^2)(-2x^3) = -6x^{2+3}$
 $= -6x^5$

ตัวอย่างที่ 3 $(3x^2 + 2x - 5) - (x^2 - 4x + 1)$

วิธีทำ $(3x^2 + 2x - 5) - (x^2 - 4x + 1)$
 $= 3x^2 + 2x - 5 - x^2 + 4x - 1$
 $= (3x^2 - x^2) + (2x + 4x) + (-5 - 1)$
 $= 2x^2 + 6x - 6$

ตัวอย่างที่ 4 $2x(3x^2 - x + 4)$

วิธีทำ $2x(3x^2 - x + 4)$
 $= 2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot (-x) + 2x \cdot 4$
 $= 6x^3 - 2x^2 + 8x$

ตัวอย่างที่ 5 $(3x - 2)(x + 5)$

วิธีทำ $(3x - 2)(x + 5)$
 $= 3x(x + 5) - 2(x + 5)$
 $= 3x^2 + 15x - 2x - 10$
 $= 3x^2 + 13x - 10$

ตัวอย่างที่ 6 $(2x^2 - x + 3)(x^2 + 2x - 1)$

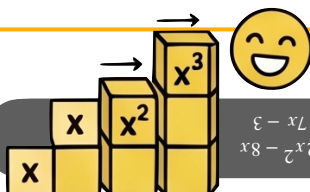
วิธีทำ $(2x^2 - x + 3)(x^2 + 2x - 1)$
 $= 2x^2(x^2 + 2x - 1) - x(x^2 + 2x - 1) + 3(x^2 + 2x - 1)$
 $= (2x^4 + 4x^3 - 2x^2) + (-x^3 - 2x^2 + x) + (3x^2 + 6x - 3)$
 $= 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x - 3$

ทบทวนความเข้าใจ 1 เขียนนิพจน์ที่กำหนดให้ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

นิพจน์	ผลสำเร็จ
$3x^2 + 5x^2$	
$7x^3 - 2x^3$	
$(3x^2)(-2x)$	
$\frac{8x^5}{2x^2}$	
$(3x^2 + 2x) + (x^2 - x)$	
$(4x^2 + 3x - 1) - (2x^2 - x + 5)$	
$2x(x + 3)$	
$(x + 2)(x + 5)$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

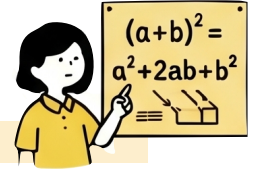
❶ $(3x^2 - 2x + 5) + (2x^2 + x - 3)$	❷ $(4x^2 + 3x - 1) - (2x^2 - 5x + 6)$
❸ $(5x^3 - 2x^2 + 2) + (-3x^3 + x^2 - 4x)$	❹ $-2x(3x^2 - x + 4)$
❺ $3x^2(2x^2 - 3x + 1)$	❻ $(x + 3)(2x + 5)$
❼ $(2x - 1)(x^2 + 4x + 3)$	❽ $(2x^2 - x + 3)(x^2 + 2x - 1)$



วันที่ 7 เอกลักษณะของพหุนามบางแบบ

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 2 - 3

วัน / เวลาที่ทำ :



Main Concept : สารสำคัญ

- ในการคูณพหุนามบางรูปแบบ อยู่ในรูปแบบที่มีแบบแผน หากพหุนามอยู่ในรูปผลคูณที่มีแบบแผน จะสามารถใช้เอกลักษณ์ของพหุนามมาช่วยคูณกระจายได้อย่างรวดเร็ว
- ในทำนองกลับกัน หากมีพหุนามมาให้ ต้องการเขียนพหุนามให้อยู่ในรูปการคูณกัน (เรียกว่า ตัวประกอบของพหุนาม) หากสามารถจำแบบแผนได้ จะสามารถเขียนพหุนามในรูปผลคูณของตัวประกอบได้เช่นกัน
- เอกลักษณ์ของพหุนามที่มีกใช้บ่อย**
 - กำลังสองสมบูรณ์ : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ เช่น $(a + 2b)^2 = a^2 + 2(a)(2b) + (2b)^2$
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ เช่น $(3x - y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(y) + y^2$
 - ผลต่างกำลังสอง : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ เช่น $(2a - b)(2a + b) = (2a)^2 - b^2$
 - กำลังสามสมบูรณ์ : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ เช่น $(x + 2)^3 = x^3 + 3(x)^2(2) + 3(x)(2^2) + 2^3$
 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ เช่น $(2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1^2) - 1^3$
 - ผลบวกกำลังสาม : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ เช่น $a^3 + 8 = a^3 + 2^3 = (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$
 - ผลต่างกำลังสาม : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ เช่น $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงทำให้้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

ตัวอย่างที่ 1 กระจายพจน์ $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2$

วิธีทำ $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2$
 $= [(2x)^2 + 4x + 1] - [x^2 - 2x + 1]$
 $= 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1$
 $= 3x^2 + 6x$

ตัวอย่างที่ 2 กระจายพจน์ $(3x - 2)^2 + (x + 4)^2$

วิธีทำ $(3x - 2)^2 + (x + 4)^2$
 $= [(3x)^2 - 12x + 4] + [x^2 + 8x + 16]$
 $= 9x^2 - 12x + 4 + x^2 + 8x + 16$
 $= 10x^2 - 4x + 20$

ตัวอย่างที่ 3 กระจายพจน์ $(2a + b)^3 - (a - 2b)^3$

วิธีทำ $(2a + b)^3 - (a - 2b)^3$
 $= [(2a)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b^2) + b^3] - [a^3 - 3a^2(2b) + 3a(2b)^2 - (2b)^3]$
 $= (8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3) - (a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3)$
 $= 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 - a^3 + 6a^2b - 12ab^2 + 8b^3$
 $= 7a^3 + 18a^2b - 6ab^2 + 9b^3$

ตัวอย่างที่ 4 แยกตัวประกอบของพหุนาม $8x^3 + 27y^3$

วิธีทำ $8x^3 + 27y^3$
 $= (2x)^3 + (3y)^3$
 $= (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$
 $= 3x^2 + 13x - 10$

ตัวอย่างที่ 5 แยกตัวประกอบของพหุนาม $4x^2 - (x - 3)^2$

วิธีทำ $4x^2 - (x - 3)^2$
 $= (2x)^2 - (x - 3)^2$
 $= (2x - (x - 3))(2x + (x - 3))$
 $= (x + 3)(3x - 3) = 3(x + 3)(x - 1)$

ตัวอย่างที่ 6 แยกตัวประกอบของพหุนาม $(2a + b)^2 - (a - 2b)^2$

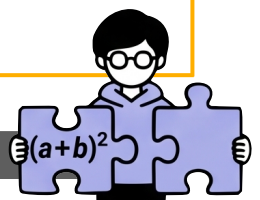
วิธีทำ $(2a + b)^2 - (a - 2b)^2 = ((2a + b) - (a - 2b))((2a + b) + (a - 2b))$
 $= (2a + b - a + 2b)(2a + b + a - 2b)$
 $= (a + 3b)(3a - b)$

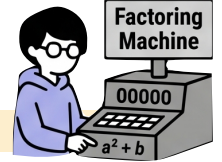
ทบทวนความเข้าใจ 1 คูณกระจายพหุนามโดยใช้เอกลักษณ์ของพหุนาม หรือ แยกตัวประกอบของพหุนาม

พหุนามในรูปการกระจาย	พหุนามที่จัดรูปผลสำเร็จหรือตัวประกอบแล้ว
$x^2 - 9$	$(x + 3)^2$
$4x^2 - 25$	$(2x - 5)^2$
$x^3 + 8$	$(x + 2)^3$
$8x^3 - 1$	$(3x - 2)^3$
$9x^2 - 4y^2$	$(2x + 3y)^2$
$x^2 + 6x + 9$	$(x - 4y)^2$
$27a^3 + b^3$	$(2a + b)^3$
$(3x + 1)^2 - (x - 2)^2$	$(3x + 1)^2 - (x - 2)^2$
$(2x - 1)^3 + (x + 2)^3$	$(2x + 1)^2 - (x - 3)^2$
$(3a - 2b)^2 - (a + 4b)^2$	$4a^2 - (a - 2b)^2$

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

❶ $(2x + 3)^3 - (x - 2)^3$	❷ $(3x - 1)^2 + (2x + 5)^2 - (x - 4)^2$
❸ แยกตัวประกอบ $x^3 + 27y^3 - 3xy(x + 3y)$	❹ แยกตัวประกอบ $(2a + b)^2 - (a - 2b)^2$





วันที่ 8 การแยกตัวประกอบของพหุนาม

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 2 - 3

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- ในกรณีของจำนวนนับ **ตัวประกอบของจำนวนนับ** n คือบรรดาจำนวนนับที่สามารถนำไปหารจำนวนนับ n ได้ลงตัว เช่น ตัวประกอบของ 14 คือ 1, 2, 7, 14 ทั้งนี้ เราสามารถเขียนจำนวนในรูปผลคูณของตัวประกอบเฉพาะ (ตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะ) เช่น $14 = 2 \times 7$ การเขียนรูปลักษณะนี้เรียกว่า การแยกตัวประกอบของจำนวนนับ
- ในกรณีของพหุนาม **การแยกตัวประกอบของพหุนาม** คือการเขียนพหุนามที่กำหนดให้ในรูปผลคูณของพหุนามย่อย ๆ รูปแบบการเขียนที่ถูกต้อง จะต้องแยกตัวประกอบให้สุด
- สมบัติการกระจาย มักถูกใช้เป็นขั้นตอนแรก ๆ ในการแยกตัวประกอบของพหุนาม และมักครอบคลุมทุกกรณี

$$\text{เช่น } ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (a + b)(x + y)$$

$$3a^2 - 6ab + 2a - 4b = (3a^2 - 6ab) + (2a - 4b)$$

$$= 3a(a - 2b) + 2(a - 2b) = (3a + 2)(a - 2b)$$

- ตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปแบบ** $x^2 + bx + c$ เราจะหาคู่ของจำนวนที่คูณกันได้ c และบวกกันได้ b กล่าวคือ หา A, B ซึ่ง $x^2 + bx + c = (x + A)(x + B) = x^2 + (A + B)x + AB$

ข้อสังเกต เรามักแยกตัวประกอบของจำนวนนับ c แล้วดูกรณีที่เป็นไปได้

$$\text{เช่น } x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4) : \text{เลือก } A = -3, B = -4 \text{ ซึ่ง } A + B = -7, AB = +12$$

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2) : \text{เลือก } A = 5, B = 2 \text{ ซึ่ง } A + B = +7, AB = +10$$

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1) : \text{เลือก } A = -6, B = 1 \text{ ซึ่ง } A + B = -5, AB = -6$$

$$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1) : \text{เลือก } A = 6, B = -1 \text{ ซึ่ง } A + B = +5, AB = -6$$

- ตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปแบบ** $ax^2 + bx + c$ หาคู่ของจำนวนที่คูณกันได้ $a \times c$ และบวกกันได้ b กล่าวคือ $ax^2 + bx + c = (Ax + B)(Cx + D) = ACx^2 + ADx + BCx + BD$

$$\text{เช่น } 6x^2 - 7x - 3 \text{ มีความเป็นไปได้ที่เกิดวงเล็บ } (2x \quad)(3x \quad) \text{ หรือ } (6x \quad)(x \quad)$$

ต่อไป เติมตัวประกอบของ -3 ที่อาจเป็นไปได้ (8 กรณี) พิจารณาพจน์กลางว่า เมื่อใดที่ได้พจน์กลางเป็น $-7x$

$$\text{พบว่า } 6x^2 - 7x - 3 = (2x - 3)(3x + 1) \text{ เนื่องจาก } (2x)(1) + (-3)(3x) = -7x$$

- ตัวประกอบของพหุนามบางกรณี ต้องใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ (ยังไม่กล่าวถึงในขณะนี้)

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $12y^2z - 20yz$

วิธีทำ ตัวร่วมที่ปรากฏทั้งสองพจน์คือ $4yz$

$$12y^2z - 20yz = 4yz(3y) - 4yz(5)$$

$$= 4yz(3y - 5)$$

ตัวอย่างที่ 2 $4x^2 - 8xy + 3x - 6y$

วิธีทำ $4x^2 - 8xy + 3x - 6y$

$$= (4x^2 - 8xy) + (3x - 6y)$$

$$= 4x(x - 2y) + 3(x - 2y)$$

$$= (4x + 3)(x - 2y)$$

ตัวอย่างที่ 3 $x^2 - x - 6$

วิธีทำ $A = -3, B = 2$ ซึ่ง $AB = -6, A + B = -1$

$$\text{ได้ว่า } x^2 - x - 6 = (x + (-3))(x + 2)$$

$$= (x - 3)(x + 2)$$

ตัวอย่างที่ 4 $x^2 + 4x - 5$

วิธีทำ $A = 5, B = -1$ ซึ่ง $AB = -5, A + B = 4$

$$\text{ได้ว่า } x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x + (-1))$$

$$= (x + 5)(x - 1)$$

ตัวอย่างที่ 5 $4x^2 + 4x - 3$

วิธีทำ ลองแยกวงเล็บ เช่น $(4x \quad)(x \quad)$ หรือ $(2x \quad)(2x \quad)$

และแยกตัวประกอบของ -3 พบว่า

$$4x^2 + 4x - 3 = (2x - 1)(2x + 3)$$

ตัวอย่างที่ 6 $3x^2 - 5x - 2$

วิธีทำ ลองแยกวงเล็บ ได้กรณีเดียว $(3x \quad)(x \quad)$

และแยกตัวประกอบของ -2 พบว่า

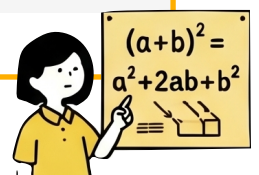
$$3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$$

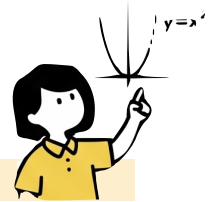
ตัวอย่างที่ 7 $x^2 + x + 1$

วิธีทำ กรณีนี้ ไม่สามารถหาจำนวนเต็ม A, B ที่ทำให้ $A + B = 1$ และ $AB = 1$ ได้ จึงไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ (พหุนาม $ax^2 + bx + c$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ ถ้า $b^2 - 4ac < 0$)

ทบทวนความเข้าใจ แยกตัวประกอบของพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

พหุนาม	ตัวประกอบของพหุนาม
$6x + 12$	
$9a^2b + 3ab$	
$4x^3 - 8x^2$	
$2x^2 + 6x + x + 3$	
$4a^2 + 8ab + a + 2b$	
$5x^2 - 10xy + 3x - 6y$	
$x^2 - 4x - 5$	
$x^2 - 4x + 4$	
$x^2 + 9x + 20$	
$x^2 - 6x + 8$	
$x^2 + 3x - 10$	
$x^2 - 8x + 15$	
$x^2 + 11x + 24$	
$x^2 - 2x - 15$	
$2x^2 + 7x + 3$	
$6x^2 - 7x - 3$	
$5x^2 + 13x + 6$	
$-5x^2 - x + 6$	
$3x^2 + 10x + 8$	
$4x^2 - 4x - 15$	
$2x^2 - x - 6$	
$6x^2 + 5x - 6$	
$4x^2 + 11x + 6$	
$-4x^2 + 4x + 3$	
$2x^2 + 9x + 4$	
$3x^2 + x - 4$	
$-2x^2 + x + 3$	
$-3x^2 - 5x + 2$	





วันที่ 9 สมการพหุนามกำลังสอง

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 2 - 3

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- **สมการพหุนามกำลังสอง** คือสมการที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ $a \neq 0$
- การแก้สมการพหุนามกำลังสอง จะใช้การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองเข้าช่วย เพื่อจัดรูปให้อยู่ในรูปตัวประกอบของพหุนาม ถ้า $ax^2 + bx + c = (Ax + B)(Cx + D)$ จะได้ว่า

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } (Ax + B)(Cx + D) = 0$$
 ซึ่งใช้หลักการว่า สำหรับจำนวนจริง m, n ได้ว่า $m \cdot n = 0$ ก็ต่อเมื่อ $m = 0$ หรือ $n = 0$
- **คำตอบของสมการกำลังสอง** สามารถหาได้จากสูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- จากสูตรคำตอบของสมการกำลังสอง สามารถวิเคราะห์จำนวนคำตอบของสมการได้ดังนี้
 - เมื่อ $b^2 - 4ac > 0$ สมการกำลังสองมีคำตอบเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน 2 คำตอบ (คำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ ถ้า $b^2 - 4ac$ เป็นจำนวนกำลังสอง)
 - เมื่อ $b^2 - 4ac = 0$ สมการกำลังสองมีคำตอบซ้ำกัน (มีคำตอบ 1 คำตอบ)
 - เมื่อ $b^2 - 4ac < 0$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง (มีคำตอบเป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยนิยามให้ $i^2 = -1$)

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงแก้สมการพหุนามกำลังสองต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $x^2 - 4 = 0$

วิธีทำ $x^2 - 4 = 0$
 $(x - 2)(x + 2) = 0$
 ได้ว่า $x - 2 = 0$ หรือ $x + 2 = 0$
 นั่นคือ $x = 2$ หรือ $x = -2$

ตัวอย่างที่ 2 $x^2 + 5x + 6 = 0$

วิธีทำ $x^2 + 5x + 6 = 0$
 $(x + 2)(x + 3) = 0$
 ได้ว่า $x + 2 = 0$ หรือ $x + 3 = 0$
 นั่นคือ $x = -2$ หรือ $x = -3$

ตัวอย่างที่ 3 $x^2 - x - 6 = 0$

วิธีทำ $x^2 - x - 6 = 0$
 $(x - 3)(x + 2) = 0$
 ได้ว่า $x - 3 = 0$ หรือ $x + 2 = 0$
 นั่นคือ $x = 3$ หรือ $x = -2$

ตัวอย่างที่ 4 $x^2 + 4x + 4 = 0$

วิธีทำ $x^2 + 4x + 4 = 0$
 $(x + 2)^2 = 0$
 ได้ว่า $x + 2 = 0$
 นั่นคือ $x = -2$

ตัวอย่างที่ 5 $2x^2 + 7x + 3 = 0$

วิธีทำ $2x^2 + 7x + 3 = 0$
 $(2x + 1)(x + 3) = 0$
 ได้ว่า $2x + 1 = 0$ หรือ $x + 3 = 0$
 นั่นคือ $x = -\frac{1}{2}$ หรือ $x = -3$

ตัวอย่างที่ 6 $6x^2 - x - 2 = 0$

วิธีทำ $6x^2 - x - 2 = 0$
 $(3x - 2)(2x + 1) = 0$
 ได้ว่า $3x - 2 = 0$ หรือ $2x + 1 = 0$
 นั่นคือ $x = \frac{2}{3}$ หรือ $x = -\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 7 $x^2 - 2x - 1 = 0$

วิธีทำ ใช้สูตรสมการกำลังสอง

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
 นั่นคือ $x = 1 + \sqrt{2}$ หรือ $x = 1 - \sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 8 $2x^2 + x + 1 = 0$

วิธีทำ ใช้สูตรสมการกำลังสอง เนื่องจาก
 $b^2 - 4ac = 1^2 - 4(2)(1) = -7 < 0$
 สมการดังกล่าวจึงไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง แต่เราได้ว่า

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4} \quad (\text{เมื่อ } i^2 = -1)$$
 นั่นคือ $x = \frac{-1 + \sqrt{-7}}{4}$ หรือ $x = \frac{-1 - \sqrt{-7}}{4}$

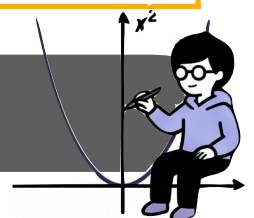
ทบทวนความเข้าใจ 1 แก้มการพหุนามกำลังสองต่อไปนี้

สมการพหุนามกำลังสอง	คำตอบของสมการ
$x^2 - 9 = 0$	
$4x^2 - 1 = 0$	
$2x^2 - 4 = 0$	
$x^2 + 7x + 12 = 0$	
$x^2 - 3x - 10 = 0$	
$x^2 + 4x + 3 = 0$	
$x^2 - x - 12 = 0$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : แก้มการพหุนามกำลังสองต่อไปนี้

❶ $2x^2 + 5x + 2 = 0$	❷ $3x^2 - x - 2 = 0$
❸ $4x^2 + 4x - 3 = 0$	❹ $6x^2 - 7x - 3 = 0$
❺ $5x^2 + 13x + 6 = 0$	❻ $2x^2 - x - 6 = 0$
❼ $x^2 - 6x - 5 = 0$	❽ $2x^2 - 3x - 1 = 0$
❾ $x^2 + 2x + 5 = 0$	❿ $x^2 + x + 1 = 0$

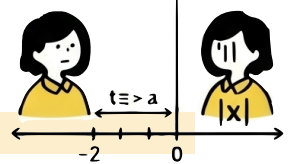
$$\frac{4}{3} \pm \sqrt{1 \mp \frac{4}{3}} = x \quad \frac{2}{3} - = x \quad \frac{2}{3} - = x \quad \frac{2}{3} - = x \quad \frac{2}{3} - = x \quad \frac{2}{3} - = x \quad \frac{2}{3} - = x \quad \frac{2}{3} - = x \quad \frac{2}{3} - = x \quad \frac{2}{3} - = x$$



วันที่ 10 อสมการและค่าสัมบูรณ์

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3 - 4

วัน / เวลาที่ทำ :



Main Concept : สำคัญ

- อสมการ** คือประโยคทางคณิตศาสตร์ที่มีเครื่องหมายบอกถึงการไม่เท่ากับกำกับอยู่ ประกอบด้วย มากกว่า ($>$) น้อยกว่า ($<$) มากกว่าหรือเท่ากับ ($\geq$) น้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$) และไม่เท่ากับ ($\neq$)
- หลักการแก้สมการเชิงเส้น ทำในทำนองคล้ายกันกับการแก้สมการเชิงเส้น แต่ต้องระมัดระวังการคูณหรือหารด้วยเครื่องหมายลบ ที่จะทำให้เครื่องหมายของอสมการเปลี่ยนข้าง

เช่น $2x + 1 \leq x - 2$ ได้ว่า $x \leq -3$ $-5x + 4 \geq -1$ ได้ว่า $-5x \geq -5$ นั่นคือ $x \leq 1$

- อสมการกำลังสอง** ต้องใช้การแยกตัวประกอบของพหุนาม ในการพิจารณาเครื่องหมายของอสมการ โดยต้องพิจารณาว่า พจน์ผลคูณเป็นบวกเมื่อใด เป็นลบเมื่อใด โดยการพิจารณามบนเส้นจำนวน
- เราสามารถเขียนเซตของจำนวนในรูปของช่วง (interval) ได้ ดังนี้

แก้อสมการ $(x-1)(x+1) > 0$
เครื่องหมายอาจเปลี่ยนที่ $x = -1, 1$

เครื่องหมาย	-1	1
$(x-1)$	-	+
$(x+1)$	-	+
$(x-1)(x+1)$	+	-

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

- การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ ใช้หลักการว่า $|x| = a$ ก็ต่อเมื่อ $x = a$ หรือ $x = -a$
เช่น $|x - 2| = 3$ ได้ว่า $x - 2 = 3$ หรือ $x - 2 = -3$ นั่นคือ $x = 5$ หรือ $x = -1$
- อสมการค่าสัมบูรณ์ ใช้หลักการว่า $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$
และ $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$
เช่น $|x - 2| \geq 3$ ได้ว่า $x - 2 \geq 3$ หรือ $x - 2 \leq -3$ ได้เซตคำตอบของอสมการคือ $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงแก้อสมการ - สมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $3x + 5 > 11$

วิธีทำ

$$3x + 5 > 11$$

$$3x > 6$$

$$x > 2$$

เซตคำตอบของอสมการ คือ $(2, \infty)$ ตัวอย่างที่ 2 $-2x + 3 \leq 7 + 4x$

วิธีทำ

$$-2x + 3 \leq 7 + 4x$$

$$-6x \leq 4$$

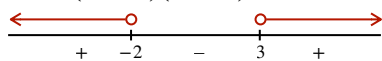
$$x \geq -\frac{2}{3}$$

เซตคำตอบของอสมการ คือ $\left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$ ตัวอย่างที่ 3 $x^2 - x - 6 > 0$

วิธีทำ

$$x^2 - x - 6 > 0$$

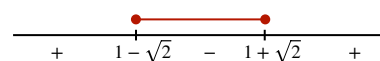
$$(x-3)(x+2) > 0$$

เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$ ตัวอย่างที่ 4 $x^2 - 2x - 1 \leq 0$

วิธีทำ

$$\text{ใช้สูตรสมการกำลังสองช่วยแยกตัวประกอบได้ คือ}$$

$$(x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2})) \leq 0$$

เซตคำตอบของอสมการ คือ $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$ ตัวอย่างที่ 5 $|2x - 3| = 5$

วิธีทำ

$$\text{จากสมการค่าสัมบูรณ์ได้ว่า}$$

$$2x - 3 = 5 \quad \text{หรือ} \quad 2x - 3 = -5$$

$$2x = 8 \quad \text{หรือ} \quad 2x = -2$$

$$\text{ได้ว่า } x = 4 \text{ หรือ } x = -1$$

ตัวอย่างที่ 6 $|6 - 2x| \leq 4$

วิธีทำ

$$\text{จากสมการค่าสัมบูรณ์ได้ว่า } -4 \leq 6 - 2x \leq 4$$

หรือ

$$-10 \leq -2x \leq -2$$

หารด้วย -2 ทั้งอสมการ

$$5 \geq x \geq 1$$

คืออสมการ

$$1 \leq x \leq 5$$

ได้เซตคำตอบของอสมการ คือ $[1, 5]$

เส้นจำนวน

$x > 3$		
$-2 \leq x < 5$		
$x \leq -1$		
$x \neq 4$		
	$(1, \infty)$	
	$(-3, 2]$	
	$(-\infty, -2)$	
	$(-1, 3] \cup (7, \infty)$	

บททวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : แก้มสมการ - อสมการต่อไปนี้ สำหรับอสมการ ตอบในรูปช่วง

❶ $3x - 5 > 2x + 1$

② $-2x + 4 \leq x - 5$

③ $-3 < 2x + 1 \leq 5$

④ $x^2 - 5x + 6 > 0$

5 $x^2 + x - 6 \leq 0$

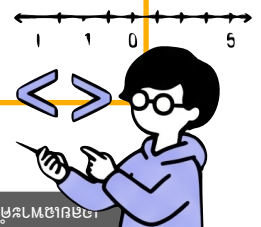
⑥ $2x^2 - 3x - 2 > 0$

⑦ $|x - 2| = 4$

8 $|2x + 1| = 3$

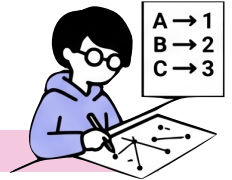
9 $|x - 3| \geq 2$

⑩ $|2x + 1| \leq 5$



ช่วงที่ 3

ฟังก์ชันพื้นฐาน



วันที่ 11 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

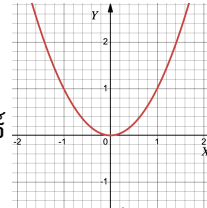
Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4

วัน / เวลาที่ทำ :

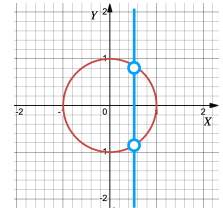
Main Concept : สารสำคัญ

- กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง
- หากกำหนด **ตัวแปรต้น** x **ตัวแปรตาม** y (สิ่งที่เปลี่ยนไปตามตัวแปรต้น) ตัวแปร x กับ y มักมีความสัมพันธ์กัน ในทางคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์ r คือเซตของคู่อันดับที่สอดคล้องกับเงื่อนไข เขียนได้ในรูปเซตได้ดังนี้

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \text{เงื่อนไขบางประการ}\}$$
- ความสัมพันธ์ชนิดพิเศษบนเซตของจำนวนจริงที่มีคุณสมบัติว่า สำหรับ x ใน $\mathbb{R}$ หนึ่งตัว สัมพันธ์กับ y ใน $\mathbb{R}$ เพียงหนึ่งตัวเท่านั้น เรียกว่า **ฟังก์ชัน (function)**
- เราอาจแทนความสัมพันธ์ได้ในรูปแบบกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนที่มีแกนอนคือแกน X และแกนตั้งคือแกน Y ได้
 เซตของจุด (x, y) ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ คือกราฟของความสัมพันธ์
- เราสามารถตรวจสอบกราฟของความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ได้จากการลากเส้นตรงขนานกับแกน Y หากพบว่าเส้นตรงนั้นตัดกราฟมากกว่า 1 จุด แสดงว่า ความสัมพันธ์ดังกล่าวไม่เป็นฟังก์ชัน



ความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน



ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน

- ฟังก์ชันค่าจริง มักเขียนฟังก์ชันได้ในรูปแบบสูตร เช่น เมื่อให้ y เป็นฟังก์ชันของ x จะเขียนฟังก์ชันในรูป $y = f(x)$ ได้ และการคำนวณค่าของฟังก์ชัน จะแทนค่าที่ต้องการลงในตัวแปร x ในสูตรที่กำหนดให้
 เช่น $f(x) = 2x + 1$ พบว่า $f(0) = 2(0) + 1 = 1$, $f(2) = 2(2) + 1 = 5$, $f(a) = 2(a) + 1 = 2a + 1$
 $g(x) = 3x^2 - 1$ พบว่า $g(0) = 3(0)^2 - 1 = -1$, $g(2) = 3(2)^2 - 1 = 11$
- ฟังก์ชันเชิงเส้น** (linear function) คือฟังก์ชันที่เขียนได้ในรูป $f(x) = ax + b$ มีกราฟเป็นเส้นตรง
- ฟังก์ชันกำลังสอง** (quadratic function) คือฟังก์ชันที่เขียนได้ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a \neq 0$ มีกราฟเป็นพาราโบลา เราจะกล่าวถึงกราฟดังกล่าวในภายหลัง

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = 3x + 4$

จงหา $f(2), f(-1)$

วิธีทำ $f(2) = 3(2) + 4 = 6 + 4 = 10$

$f(-1) = 3(-1) + 4 = -3 + 4 = 1$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x) = -5x + 2$

จงหา $f(1), f(-2)$

วิธีทำ $f(1) = -5(1) + 2 = -5 + 2 = -3$

$f(-2) = -5(-2) + 2 = 10 + 2 = 12$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $f(x) = x^2 - 3x + 2$

จงหา $f(1), f(-1), f(0), f(a)$

วิธีทำ $f(1) = (1)^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$

$f(0) = (0)^2 - 3(0) + 2 = 2$

$f(a) = a^2 - 3a + 2$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $f(x) = x^2 + 1$

จงหา $f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), f\left(\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$

$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $f(x) = x^2 + 2x - 1$

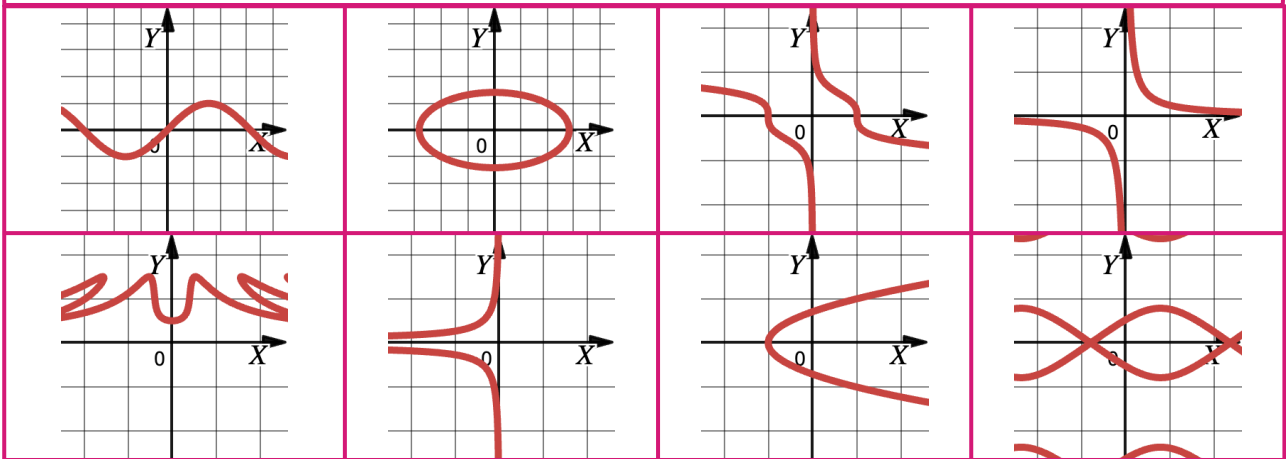
จงหา $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ เมื่อ $h \neq 0$

วิธีทำ $f(a+h) = (a+h)^2 + 2(a+h) - 1 = a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2h - 1$

$f(a) = a^2 + 2a - 1$

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2h - 1) - (a^2 + 2a - 1)}{h}$

$= 2a + h + 2$

ทบทวนความเข้าใจ 1 กราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเหตุใด

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงหาค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1 กำหนด $f(x) = 5$

จงหา $f(2), f(-3), f\left(\frac{1}{2}\right)$

2 กำหนด $f(x) = 2x + 1$

จงหา $f(-1), f(3), f\left(\sqrt{2}\right)$

3 กำหนด $f(x) = -3x + 4$

จงหา $f(2), f(-2), f\left(\frac{1}{3}\right)$

4 กำหนด $f(x) = x^2$

จงหา $f(-2), f(3), f\left(\frac{1}{2}\right)$

5 กำหนด $f(x) = x^2 - 2x$

จงหา $f(1), f(-1), f\left(\sqrt{3}\right)$

6 กำหนด $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

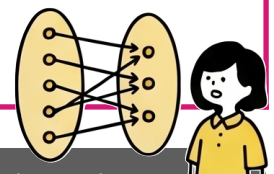
จงหา $f(0), f(2), f\left(-\frac{1}{2}\right)$

7 กำหนด $f(x) = -x + 4$

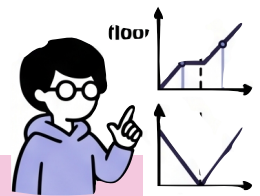
จงหา $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ เมื่อ $h \neq 0$

8 กำหนด $f(x) = 3x^2 - 2x$

จงหา $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ เมื่อ $h \neq 0$



$$\begin{aligned} & 2 - 4\epsilon + 29 \cdot 1 - \epsilon = \left(\frac{2}{1}\right) f' \epsilon = (2) f' 1 = (0) f' \epsilon \wedge 2 - \epsilon = (\epsilon \wedge) f' \epsilon = (1-) f' 1 - = (1) f' \epsilon \wedge \frac{1}{1} = \left(\frac{2}{1}\right) f' 6 = (\epsilon) f' 4 = (2-) f' \epsilon \\ & \epsilon = \left(\frac{\epsilon}{1}\right) f' 01 = (2-) f' 2 - = (2) f' \epsilon \wedge 1 + 2 \wedge 2 = (2 \wedge) f' 2 = (\epsilon) f' 1 - = (1-) f' \epsilon \wedge \frac{1}{1} = \left(\frac{2}{1}\right) f' 5 = (\epsilon-) f' 5 = (2) f' \epsilon : \text{กอบุญคุณมณีมณี} \end{aligned}$$



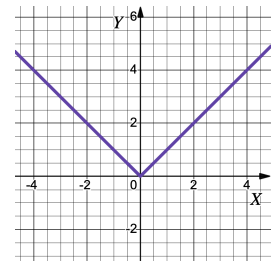
วันที่ 12 ฟังก์ชันบางชนิดที่น่าสนใจ

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- โดเมนของฟังก์ชัน** f (แทนด้วย D_f) คือเซตของจำนวนซึ่งสามารถคำนวณค่าของฟังก์ชันได้
เช่น กำหนด $f(x) = 2x + 1$ ได้ว่า $D_f = \mathbb{R}$ (คำนวณค่าของฟังก์ชันได้ทุกค่าในจำนวนจริง)
กำหนด $g(x) = \sqrt{x}$ ได้ว่า $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$ (ภายใต้เครื่องหมาย $\sqrt{\quad}$ เป็นบวกเสมอ)
กำหนด $h(x) = \frac{1}{x-1}$ ได้ว่า $D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ (ตัวส่วนห้ามเป็นศูนย์)
- ฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง** (piecewise-defined function) เป็นฟังก์ชันที่นิยามตามเงื่อนไขที่เกี่ยวกับการคำนวณค่าขึ้นอยู่กับเงื่อนไขที่กำหนดอยู่
เช่น $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & ; x \leq 0 \\ 2x + 2 & ; x > 0 \end{cases}$ จะได้ว่า $f(-2) = -2 + 1 = -1$
 $f(0) = 0 + 1 = 1, f(1) = 2(1) + 2 = 4$
- ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์** (absolute function) เป็นฟังก์ชันที่เขียนได้
ในรูปฟังก์ชันที่นิยามตามช่วง กล่าวคือ
 $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ x & ; x \geq 0 \end{cases}$ เช่น $f(-1) = -(-1) = 1, f(\pi) = \pi$
- ฟังก์ชันตรรกยะ** (rational function) เป็นฟังก์ชันในรูป $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ โดยที่ $q(x) \neq 0$ โดเมนคือเซตของจำนวนจริงที่ยกเว้นค่า x ที่ทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์



กราฟของ $f(x) = |x|$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
วิธีทำ จากเงื่อนไข ได้ว่า $1-x^2 \geq 0$
หรือ $x^2 - 1 \leq 0$ ใส่อสมการ $(x-1)(x+1) \leq 0$
เซตคำตอบของอสมการคือ $[-1, 1]$
นั่นคือ $D_f = [-1, 1]$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
วิธีทำ พิจารณาเงื่อนไข 1) $x+2 \geq 0$ และ 2) $x+2 \neq 0$
ได้ว่า โดเมนคือ $[-2, \infty) \cap (\mathbb{R} - \{-2\})$
ดังนั้น โดเมนคือ $(-2, \infty)$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ 2x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$
จงหา $f(-2), f(0), f(3)$
วิธีทำ $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$
 $f(0) = 2(0) + 3 = 3$
 $f(3) = 2(3) + 3 = 9$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
จงหา $f(2), f(-1)$
วิธีทำ $f(2) = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$
 $f(-1) = \frac{1 - 1}{-1 - 1} = 0$
หมายเหตุ ถ้ากำหนด $g(x) = x + 1$
จะกล่าวว่า $f(x) \neq g(x)$ เนื่องจาก $D_f \neq D_g$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$ จงหา $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ เมื่อ $h > 0$ และเมื่อ $h < 0$
วิธีทำ เมื่อ $h > 0$ ได้ว่า $1+h > 0$ จึงได้ว่า $f(1+h) = (1+h) + 1 = 2+h$
เพราะฉะนั้น $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2+h-1}{h} = \frac{1+h}{h} = \frac{1}{h} + 1$
เมื่อ $h < 0$ ได้ว่า $1+h < 0$ จึงได้ว่า $f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$
เพราะฉะนั้น $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$

ทบทวนความเข้าใจ 1 คำนวณค่าของฟังก์ชัน ณ จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	โจทย์ให้คำนวณ	ค่าของฟังก์ชัน
$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ x + 4, & x \geq 1 \end{cases}$	$f(0)$	
	$f(1)$	
	$f(\pi)$	
$g(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \leq -1 \\ x^2 + 1, & x > -1 \end{cases}$	$g(-\sqrt{2})$	
	$g(-1)$	
	$g(0)$	
$h(x) = \begin{cases} x + 4, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ 2x - 1, & x \geq 2 \end{cases}$	$h(-1)$	
	$h(1)$	
	$h(2)$	
$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$	$f(3)$	
	$f(-2)$	
	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	
$g(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x + 2}$	$g(1)$	
	$g(2)$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด

❶ จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x - 3}$

❷ จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$

❸ กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + 2, & x > 1 \end{cases}$
 จงหา $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ เมื่อ $h > 0$ และ $h < 0$

❹ กำหนด $g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < 2 \\ x^2 - 3, & x \geq 2 \end{cases}$
 จงหา $\frac{g(2+h) - g(2)}{h}$ เมื่อ $h > 0$ และ $h < 0$





วันที่ 13 การสร้างฟังก์ชันใหม่

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สารสำคัญ

- พิชคณิตของฟังก์ชัน** หากมีฟังก์ชัน f และ g เดิม เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่จากฟังก์ชันเดิมได้โดยการบวก ลบ คูณ หาร ฟังก์ชันเดิมได้ โดยที่โดเมนของฟังก์ชันใหม่ที่สร้างขึ้น จะเป็นผลตัด (intersection) ของฟังก์ชันที่นำมาสร้างใหม่ เช่น กำหนด $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ ได้ว่า $h(x) := (f + g)(x) = 2x + 1 + \sqrt{x}$ โดยที่โดเมนของ $h(x)$ คือ $D_h = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [0, \infty) = [0, \infty)$
- ฟังก์ชันประกอบ** (composite function) เป็นฟังก์ชันเกิดจากการนำฟังก์ชันหนึ่งไปคำนวณค่าในฟังก์ชันอีกฟังก์ชันหนึ่ง หากกำหนด $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ จะได้ว่า $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ ดังแผนภาพ

 ภายใต้เงื่อนไขว่า $D_f \cap R_g \neq \emptyset$ (R_g คือเรนจ์ของฟังก์ชัน g)
 เช่น ให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = 2x + 1$
 ได้ว่า $h(x) := f(g(x)) = (g(x))^2 = (2x + 1)^2$
 ทำนองกลับกัน $j(x) := g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2x^2 + 1$
 โดยทั่วไป $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = x^2 - 3$
 จงหา $(f + g)(x)$, $(f + g)(2)$, $(f \circ g)(x)$, $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(x)$, $(g \circ f)(2)$
วิธีทำ $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x + 1) + (x^2 - 3) = x^2 + 2x - 2$
 ดังนั้น $(f + g)(2) = 2^2 + 2(2) - 2 = 6$ ซึ่งเท่ากับ $f(2) + g(2) = 5 + 1 = 6$
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x)) + 1 = 2(x^2 - 3) + 1 = 2x^2 - 5$ ซึ่ง $(f \circ g)(2) = 2(2)^2 - 5 = 3$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 - 3 = 4x^2 + 4x - 2$ ซึ่ง $(g \circ f)(2) = 4(2)^2 - 4(2) - 2 = 6$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $h(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$
 จงเขียนฟังก์ชัน $h(x)$ ในรูป $y = f(u)$, $u = g(x)$
วิธีทำ เลือกฟังก์ชัน $y = f(u) = \sqrt{u}$
 และ $u(x) = 2x^2 + 1$
 ได้ว่า $h(x) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{2x^2 + 1}$
 และเราได้ว่า $D_h = \mathbb{R}$
 เนื่องจาก $2x^2 + 1 \geq 1$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $h(x) = (2x + 5)^3$
 จงเขียนฟังก์ชัน $h(x)$ ในรูป $y = f(u)$, $u = g(x)$
วิธีทำ เลือกฟังก์ชัน $y = f(u) = u^3$
 และ $u(x) = 2x + 5$
 ได้ว่า $h(x) = (u(x))^3 = (2x + 5)^3$
 และเราได้ว่า $D_h = \mathbb{R}$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $h(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 4}$
 จงเขียนฟังก์ชัน $h(x)$ ในรูป $y = f(u)$, $u = g(x)$
วิธีทำ เลือกฟังก์ชัน $y = f(u) = \frac{u}{2u - 6}$
 และ $u(x) = x^2 + 1$
 ได้ว่า $h(x) = \frac{u(x)}{2u(x) - 6} = \frac{x^2 + 1}{2(x^2 + 1) - 6}$
 และเราได้ว่า $D_h = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}$
 เนื่องจาก $2x^2 - 4 \neq 0$ หรือได้ว่า $x \neq \pm\sqrt{2}$

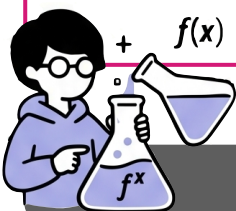
ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $g(x) = x^2 + 1$
 และ $h(x) = 2x - 3$ จงหา $f(g(h(2)))$
วิธีทำ $f(g(h(x))) = f(g(2x - 3))$
 $= f((2x - 3)^2 + 1)$
 $= \frac{1}{((2x - 3)^2 + 1) - 1}$
 $= \frac{1}{(2x - 3)^2}$
 ดังนั้น $f(g(h(2))) = \frac{1}{(2(2) - 3)^2} = 1$

ทบทวนความเข้าใจ 1 เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ จงเขียนฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $y = f(u)$, $u = g(x)$ พร้อมหาโดเมน

ฟังก์ชัน $h(x)$	$y = f(u)$	$u = g(x)$	โดเมนของ $h(x)$
$h(x) = (x + 2)^2$			
$h(x) = \sqrt{x + 3}$			
$h(x) = (2x - 1)^3$			
$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$			
$h(x) = \sqrt{3x^2 + 2x}$			
$h(x) = (x^2 - 1)^2$			
$h(x) = \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}$			
$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด

❶ กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{2}{x - 1}$ จงหาค่า $f(g(3))$	❷ กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x + 4}$, $g(x) = 3x^2 - 2$ จงหาค่า $f(g(2))$, $g(f(2))$
❸ กำหนดให้ $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$, $g(x) = x^2 - 1$ จงหาค่า $f(g(-2))$, $g(f(-2))$	❹ กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2$ และ $h(x) = \sqrt{x + 5}$ จงหาค่า $h(g(f(1)))$
❺ กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x - 2$ และ $h(x) = x^2 + 3$ จงหาค่า $h(g(f(-1)))$	❻ กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = x^2 - 1$ และ $h(x) = x - 1$ จงหาค่า $f(g(h(0)))$



$$I = (((0) y) s) f \oplus \tau I = (((1-) f) s) y \oplus \frac{1}{\tau} I \wedge = (((1) f) s) y \oplus$$

$$\frac{91}{15} - = ((\tau-) f) s \cdot b = ((\tau-) s) f \oplus 91 = ((\tau) f) s \cdot \frac{1}{\tau} I \wedge = ((\tau) s) f \oplus \tau = ((\tau) s) f \oplus : \text{นอชบุณนเมษากษช}$$



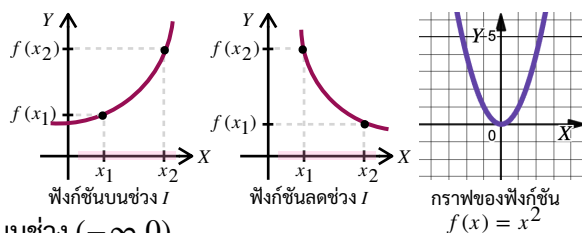
วันที่ 14 สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4

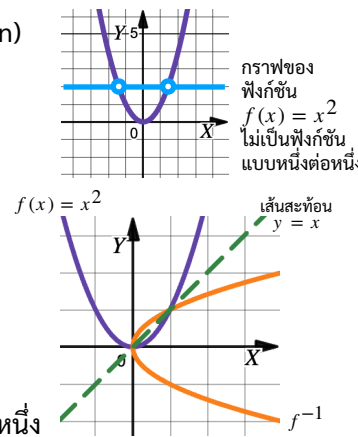
วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- ฟังก์ชัน f เป็น **ฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing function) บนช่วง I สำหรับทุก $x_1, x_2 \in I$ ถ้า $x_1 \leq x_2$ แล้ว $f(x_1) \leq f(x_2)$
 - ฟังก์ชัน f เป็น **ฟังก์ชันลด** (decreasing function) บนช่วง I สำหรับทุก $x_1, x_2 \in I$ ถ้า $x_1 \leq x_2$ แล้ว $f(x_1) \geq f(x_2)$
- เช่น สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ พบว่า
 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, \infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty, 0)$



- ให้ f เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง** (one-to-one function) เมื่อสำหรับ $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$
- เราอาจตรวจสอบว่าฟังก์ชันหนึ่งไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งได้จากการลากเส้นตรงขนานแกน X หากเส้นตรงตัดกราฟมากกว่าหนึ่งจุด แสดงว่าฟังก์ชันดังกล่าวไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง
- ตัวผกผัน** (inverse) ของฟังก์ชัน f หาได้จากการสลับ x และ y แล้วเขียน y ในรูปของ x ตัวผกผันนี้เขียนแทนด้วย f^{-1}
- กราฟของตัวผกผันของฟังก์ชันวาดได้จากการสะท้อนกราฟของ $y = f(x)$ ผ่านไปยังเส้นตรง $y = x$
- ตัวผกผันของฟังก์ชันอาจไม่เป็นฟังก์ชัน แต่เราทราบว่าฟังก์ชัน f มี **ฟังก์ชันผกผัน** (inverser function) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง



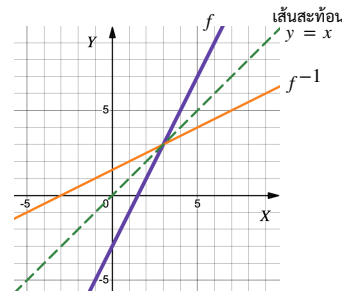
ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 3$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ดังกราฟสีม่วง

- f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง
- f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนเซต $\mathbb{R}$
- พิจารณาตัวผกผันของ f : สลับ x และ y พบว่า

$$x = 2y - 3 \text{ หรือได้ว่า } y = \frac{x+3}{2}$$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ แสดงดังกราฟ ทั้งนี้ $f^{-1}(5) = \frac{5+3}{2} = 4$

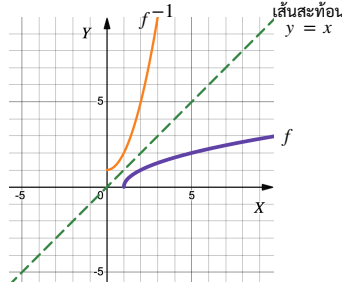


ตัวอย่างที่ 2 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x-1}$ สำหรับทุก $x \in [1, \infty)$ ดังกราฟสีม่วง

- f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง
- f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[1, \infty)$
- พิจารณาตัวผกผันของ f : สลับ x และ y พบว่า

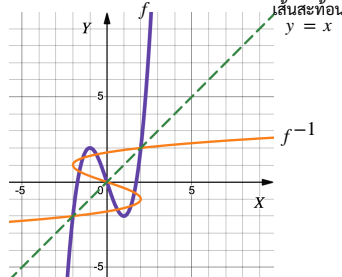
$$x = \sqrt{y-1} \text{ หรือได้ว่า } y = x^2 + 1 \text{ เมื่อ } y \geq 1, x \geq 0$$

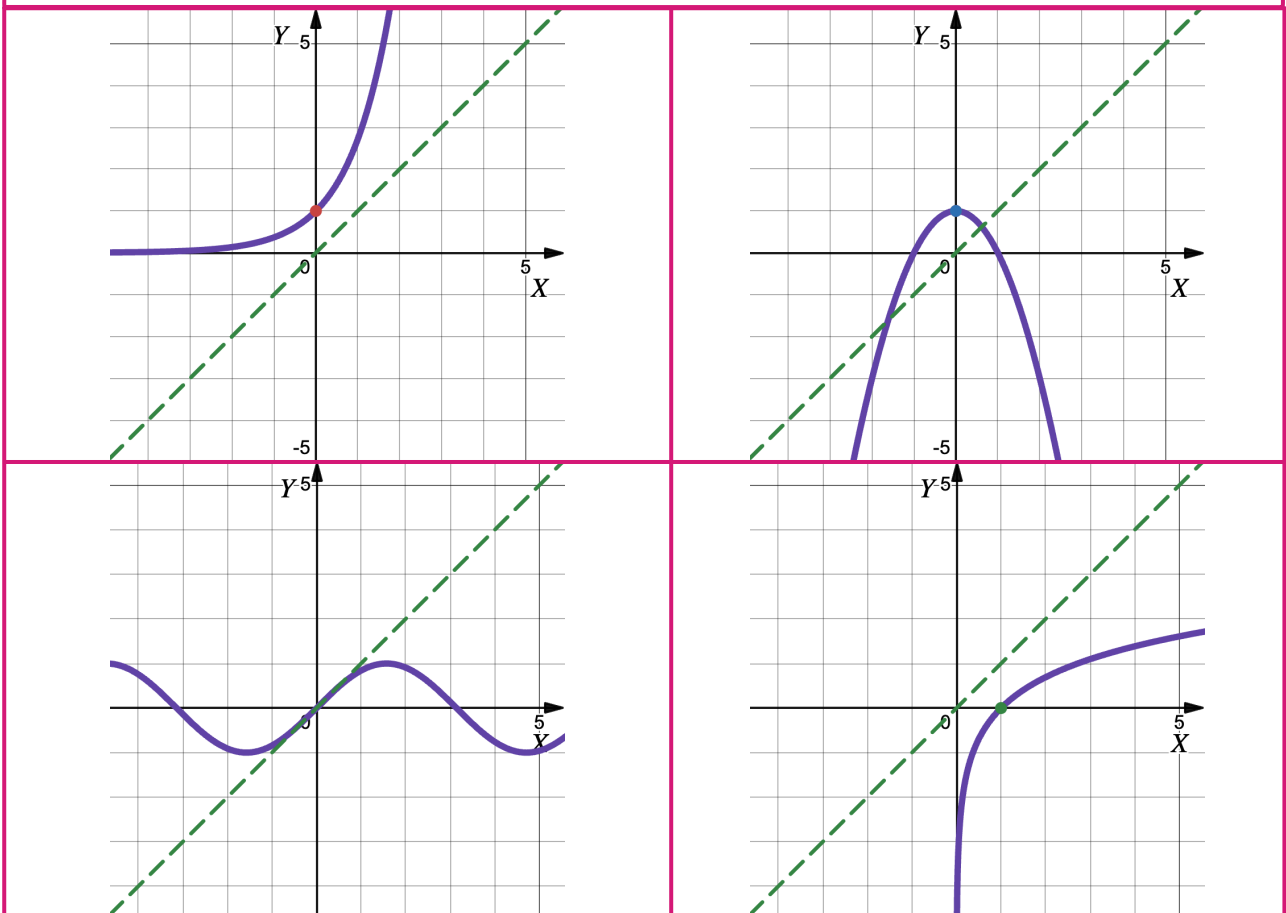
นั่นคือ $f^{-1}(x) = x^2 + 1$ แสดงดังกราฟ ทั้งนี้ $f^{-1}(4) = 4^2 + 1 = 17$



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x$ ดังกราฟสีม่วง

- f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เนื่องจากมี $x_1 = -1, x_2 = 2$ ที่ $f(x_1) = 2 = f(x_2)$ แต่ $x_1 \neq x_2$
- f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -1)$ และ $(1, \infty)$
 f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-1, 1)$
- f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ตัวผกผันจึงไม่เป็นฟังก์ชัน



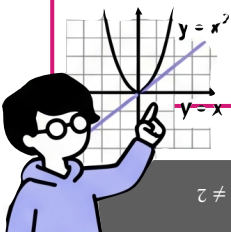
ทบทวนความเข้าใจ 1 ร่างกราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์ พร้อมอธิบายว่าฟังก์ชันเพิ่ม / ลดบนช่วงใด

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหาฟังก์ชันผกผัน (ถ้ามี)

❶ $f(x) = -3x + 4$

❷ $f(x) = \sqrt{1-2x}$

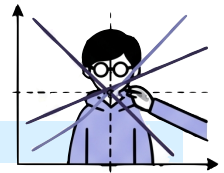
❸ $f(x) = x^2 + 2$ เมื่อ $x \geq 0$

❹ $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ เมื่อ $x \neq 1$



ช่วงที่ 4

กราฟของฟังก์ชันและเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น



วันที่ 15 กราฟเส้นตรง

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3 - 4

วัน / เวลาที่ทำ :

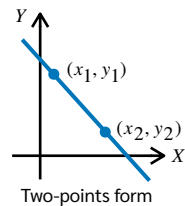
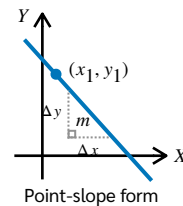
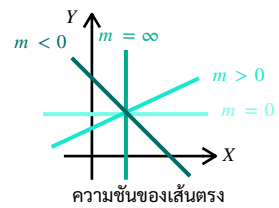
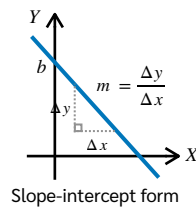
Main Concept : สำคัญ

- สมการในรูปทั่วไปของเส้นตรงในระนาบ เขียนได้ในรูป $Ax + By + C = 0$
- เมื่อเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้สมการในรูป $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ หรือเขียนได้ในรูป $y = mx + b$

โดยที่ $m = -\frac{A}{B}$ คือ **ความชัน** (slope) ของเส้นตรง

และ $b = -\frac{C}{B}$ คือ **จุดตัดแกน Y** (Y-intercept) ของเส้นตรงดังกล่าว

- ทั้งนี้ เส้นตรงในรูปฟังก์ชันเส้นตรง คือ $y = f(x) = mx + b$
- $m = 0$: เส้นตรงขนานกับแกน X $m > 0$: เส้นตรงทำมุมแหลมกับแกน X
- $m = \infty$: เส้นตรงตั้งฉากกับแกน X $m < 0$: เส้นตรงทำมุมป้านกับแกน X



- ในการสร้างสมการเส้นตรง มีวิธีการสร้างได้หลายรูปแบบ อาทิ
 - เมื่อทราบจุดผ่าน (x_1, y_1) และความชัน m สมการเส้นตรง คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$
 - เมื่อทราบจุดผ่านสองจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ สมการเส้นตรง คือ $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
- (ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดนั้นคือ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$)
- ถ้า m_1, m_2 เป็นความชันของเส้นตรง ℓ_1, ℓ_2 ได้ว่า ℓ_1 ขนานกับ ℓ_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$ และ ℓ_1 ตั้งฉากกับ ℓ_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 \cdot m_2 = -1$

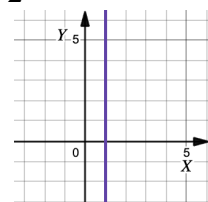
ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $3x - 2y + 6 = 0$ จงเขียนรูปมาตรฐาน หาความชัน จุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y

- วิธีทำ** สมการในรูปมาตรฐานคือ $y = \frac{3}{2}x + 3$
- ความชันคือ $m = \frac{3}{2}$
 - จุดตัดแกน Y (ให้ $x = 0$) คือจุด $(0, 3)$
 - จุดตัดแกน X (ให้ $y = 0$) คือจุด $(-2, 0)$
- สามารถวาดกราฟนี้ได้โดยการหาจุดตัดแกน X, Y แล้วลากเส้นตรงผ่านสองจุดนั้น

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $2x = 1$ จงเขียนรูปมาตรฐาน หาความชัน จุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y

- วิธีทำ** สังเกตว่า สมการนี้อยู่ในรูป $x = \frac{1}{2}$
- เส้นตรงนี้ขนานกับแกน Y มีความชันเป็นอนันต์
 - เส้นตรงนี้ตัดแกน X ที่จุด $(\frac{1}{2}, 0)$
 - เส้นตรงนี้ไม่ตัดแกน Y

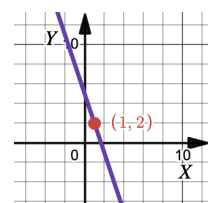


ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับแกน X และผ่านจุด $(2, -3)$

วิธีทำ เส้นตรงที่ขนานกับแกน X จะมีค่า y คงที่เสมอ โดยมีความชันเท่ากับ 0 สมการเส้นตรงหาได้จาก $y - (-3) = 0(x - 2)$ นั่นคือ $y = -3$

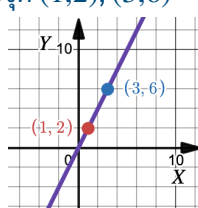
ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ -3 และผ่านจุด $(1, 2)$

วิธีทำ สมการเส้นตรงหาได้จาก $y - 2 = (-3)(x - 1)$ หรือ $y = -3x + 5$



ตัวอย่างที่ 5 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2), (3, 6)$

วิธีทำ สมการเส้นตรงหาได้จาก $y - 2 = \left(\frac{6-2}{3-1}\right)(x - 1)$ หรือ $y - 2 = 2(x - 1)$ ได้ว่า $y = 2x$



ตัวอย่างที่ 6 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $-x + 2y + 3 = 0$

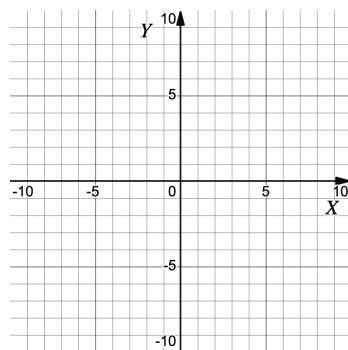
วิธีทำ เส้นตรงที่กำหนดให้มีความชันคือ $\frac{1}{2}$ เส้นตรงที่จะหาจึงต้องมีความชันเท่ากับ -2 ได้สมการเส้นตรงคือ $y - 3 = (-2)(x - (-1))$ หรือ $y = -2x + 1$

ทบทวนความเข้าใจ 1 เติมช่องว่างในตารางให้สมบูรณ์

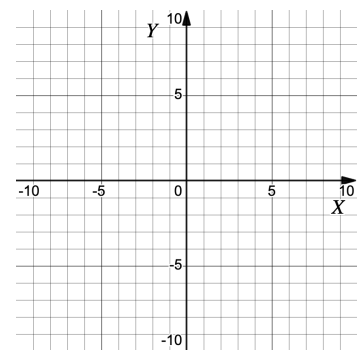
สมการรูปทั่วไป	สมการมาตรฐาน	ความชัน	จุดตัดแกน X	จุดตัดแกน Y	จุดผ่าน
$2x - y - 4 = 0$			(2,0)	(0,3)	
		-4		(0,0.5)	
	$y = x - 2$				
		1			(2, -2)
$3x - y + 9 = 0$					
	$y = \frac{1}{2}x - 1$				
				(0, -1)	(-3,4)
		0		(0,3)	
$y = -5$					
	$y = 2x + 3$				
$x + 4y - 1 = 0$					

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงหาสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด พร้อมวาดกราฟ

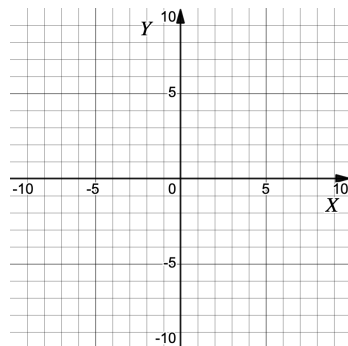
① สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,3), (2,1)$



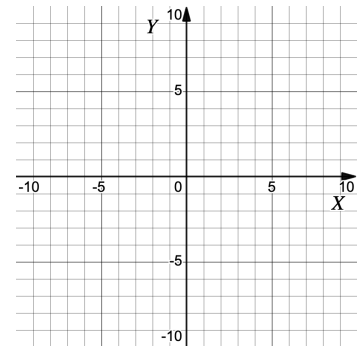
② สมการเส้นตรงที่มีความชัน 4 ผ่านจุด $(1, -2)$

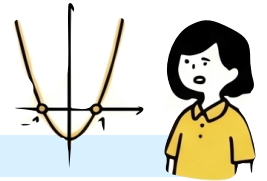


③ สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ $-2x + 3y + 6 = 0$ และผ่านจุด $(0,4)$



④ สมการเส้นตรงที่ขนานกับ $y = -2x + 5$ และผ่านจุด $(-1,2)$





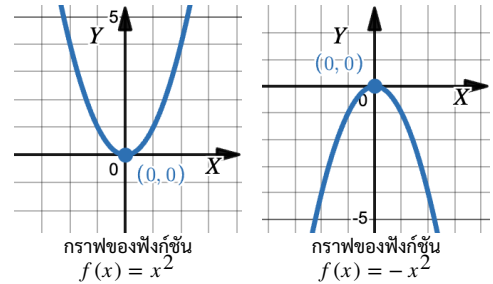
วันที่ 16 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3 - 4

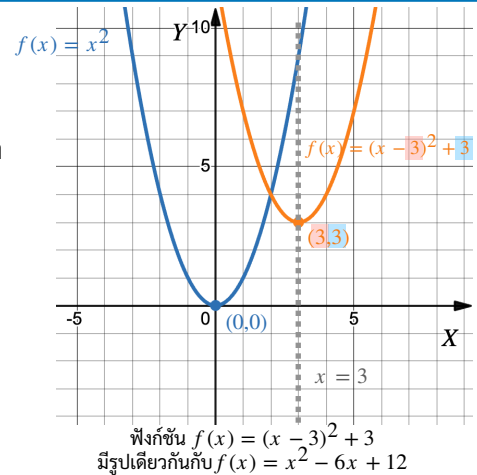
วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูปทั่วไป $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a \neq 0$
- กราฟของฟังก์ชันกำลังสองเป็นรูปพาราโบลา (parabola) เมื่อพิจารณากราฟเริ่มต้นในรูป $y = ax^2$
 - จุดยอด / จุดวกกลับอยู่ที่ $(0,0)$ แกนสมมาตรคือ $x = 0$
 - พาราโบลาหงาย เมื่อ $a > 0$ (ยิ่ง a เพิ่มขึ้น กราฟยิ่งหุบเข้า)
 - พาราโบลาคว่ำ เมื่อ $a < 0$



- ในกรณีทั่วไป เราสามารถเขียนรูปทั่วไปให้อยู่ในรูปมาตรฐานในรูป $y = a(x - h)^2 + k$ โดยที่ $a \neq 0$ พาราโบลานี้เป็นพาราโบลามาตรฐานที่ถูกเลื่อนไปที่จุด (h, k)
- จากรูปมาตรฐาน $y = ax^2 + bx + c$ จะได้ว่า จุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่ $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$
 - แกนสมมาตร คือ $x = h$
 - เมื่อ $a > 0$ พาราโบลาหงาย และที่ (h, k) เป็นจุดต่ำสุด
 - เมื่อ $a < 0$ พาราโบลาคว่ำ และที่ (h, k) เป็นจุดสูงสุด
- จุดตัดแกน X หาจาก $(x, 0)$ โดย x คือค่าซึ่ง $f(x) = 0$ และจุดตัดแกน Y คือ $(0, c)$

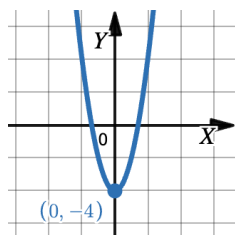


ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 จงวิเคราะห์ $f(x) = 2x^2 - 4$

วิธีทำ

- กราฟของพาราโบลานี้หงาย
- จุดยอด $(h, k) = (0, -4)$
- แกนสมมาตรของพาราโบลา คือ $x = 0$
- จุดตัดแกน X เกิดขึ้นที่ $x = \pm \sqrt{2}$

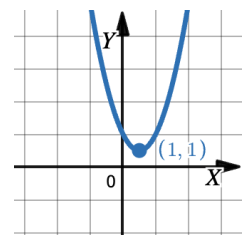


ตัวอย่างที่ 2 จงวิเคราะห์ $f(x) = x^2 - 2x + 2$

วิธีทำ เขียนสมการในรูปมาตรฐาน

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

- กราฟของพาราโบลานี้หงาย
- จุดยอด $(h, k) = (1, 1)$
- แกนสมมาตรของพาราโบลา คือ $x = 1$

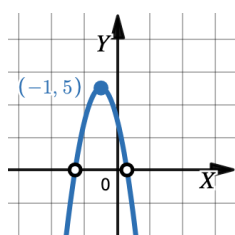


ตัวอย่างที่ 3 จงวิเคราะห์ $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$

วิธีทำ เขียนสมการในรูปมาตรฐาน

$$f(x) = -2\left(x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right) = -2\left[\left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 - \frac{3}{2}\right] = -2(x + 1)^2 + 5$$

- กราฟของพาราโบลานี้คว่ำ
- จุดยอด $(h, k) = (-1, 5)$
- แกนสมมาตรของพาราโบลา คือ $x = -1$
- จุดตัดแกน X เกิดขึ้นที่ $x = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$



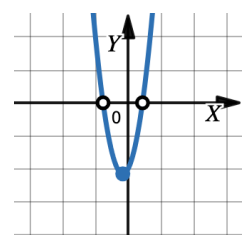
ตัวอย่างที่ 4 จงวิเคราะห์ $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$

วิธีทำ

- กราฟของพาราโบลานี้หงาย
- จุดยอดอยู่ที่

$$(h, k) = \left(\frac{-2}{2(3)}, -4 - \frac{2^2}{4(3)}\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{13}{3}\right)$$

- แกนสมมาตรของพาราโบลา คือ $x = -1/3$
- จุดตัดแกน X เกิดขึ้นที่ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$

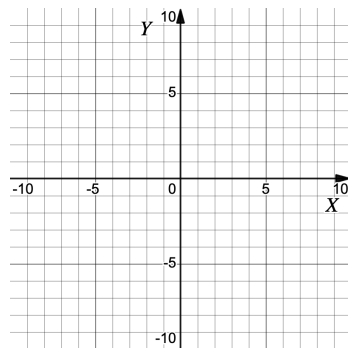


ทบทวนความเข้าใจ 1 เติมช่องว่างในตารางให้สมบูรณ์

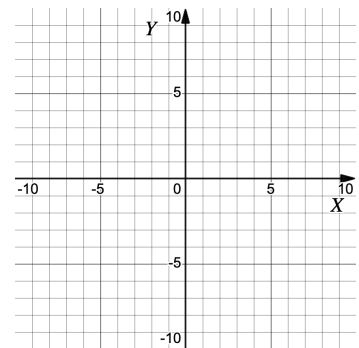
สมการรูปทั่วไป	สมการมาตรฐาน	หงาย - คว่า	จุดยอด	แกนสมมาตร	จุดตัดแกน X
$y = x^2 + 4x + 1$					
	$y = (x - 3)^2 - 5$				
	$y = -2(x + 2)^2 + 3$				
	$y = x^2 + 4$				
$y = -x^2 - 8x - 8$					

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : วิเคราะห์และวาดกราฟของฟังก์ชันกำลังสองต่อไปนี้

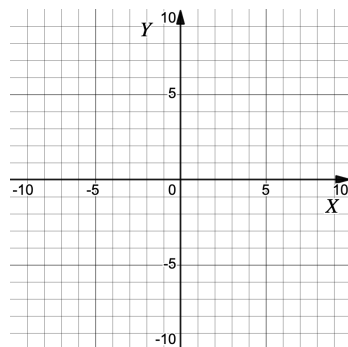
① $f(x) = 3(x - 2)^2 - 7$



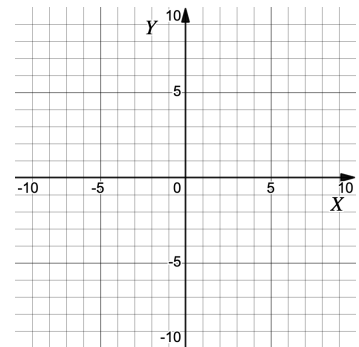
② $f(x) = -2(x + 1)^2 + 5$



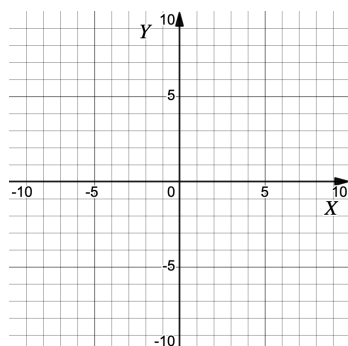
③ $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$



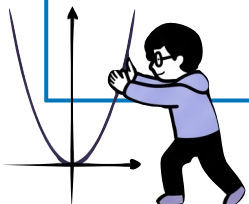
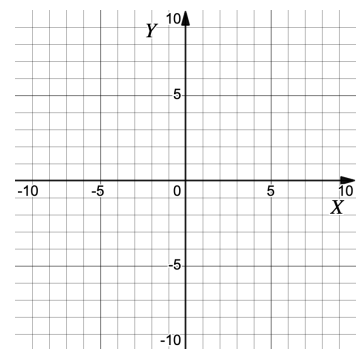
④ $f(x) = -x^2 + 6x - 4$

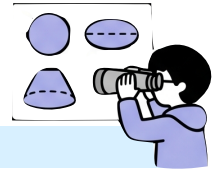


⑤ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$



⑥ $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$





วันที่ 17 สมการของภาคตัดกรวย

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4

วัน / เวลาที่ทำ :

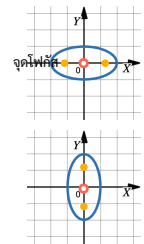
Main Concept : สำคัญ

สมการของภาคตัดกรวยในรูปทั่วไป (ที่ไม่มีการหมุนแกน) อยู่ในรูป. $Ax^2 + Bx^2 + Cx + Dy + E = 0$ เราจะเริ่มจากสมการของภาคตัดกรวยรูปแบบมาตรฐานที่ยังไม่มีการเลื่อนแกนก่อน ในที่นี้ จะกำหนดจุดอ้างอิงของแต่ละรูปด้วยจุดกลมสีแดง (โปรง) เพื่อจะนำไปใช้ในการเลื่อนแกนในหัวข้อถัดไป

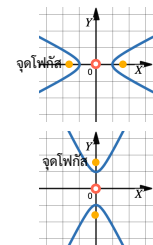
- พาราโบลา** (parabola) คือเซตของจุดที่อยู่ห่างจากจุดคงที่ (จุดโฟกัส) กับเส้นตรงคงที่ (เส้นไดเรกทริกซ์) เป็นระยะเท่ากัน
- กำหนด c คือระยะจากจุดยอด ในที่นี้คือจุด $(0,0)$ ไปยังจุดโฟกัส
- กรณีเส้นไดเรกทริกซ์ขนานแกน X จุดโฟกัสอยู่ตามแกน Y (พาราโบลาหงาย - คว่ำ) สมการอยู่ในรูป $x^2 = 4cy$ หรือ $x^2 = -4cy$
- กรณีเส้นไดเรกทริกซ์ขนานแกน Y จุดโฟกัสอยู่ตามแกน X (พาราโบลาตะแคงซ้าย - ขวา) สมการอยู่ในรูป $y^2 = 4cx$ หรือ $y^2 = -4cx$



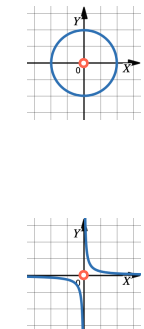
- วงรี** (ellipse) คือเซตของจุดที่ผลรวมของระยะจากจุดคงที่สองจุด ไปยังจุดหนึ่งในเซตนั้น มีค่าคงที่เสมอ
- กำหนดให้ a คือระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังปลายแกนเอก และ b คือระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังแกนโท ($a > b$)
- สมการวงรีที่แกนเอกอยู่ตามแกน X อยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- สมการวงรีที่แกนเอกอยู่ตามแกน Y อยู่ในรูป $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$



- ไฮเพอร์โบลา** (hyperbola) คือเซตของจุดที่ผลต่างของระยะจากจุดคงที่สองจุด ไปยังจุดหนึ่งในเซตนั้น มีค่าคงที่เสมอ
- กำหนดให้ a คือระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังปลายแกนเอก และ b คือระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังแกนโท ($a > b$)
- สมการไฮเพอร์โบลาที่แกนเอกอยู่ตามแกน X อยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- สมการไฮเพอร์โบลาที่แกนเอกอยู่ตามแกน Y อยู่ในรูป $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



- วงกลม** (circle) คือเซตของจุดที่อยู่ห่างจากจุดคงที่ (จุดศูนย์กลาง) เป็นระยะทางคงที่ (รัศมี)
- สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ รัศมี r คือ $x^2 + y^2 = r^2$
- ไฮเพอร์โบลามุมฉาก** (rectangular hyperbola) เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีการหมุนแกน มีสมการในรูป $xy = 1$



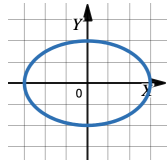
ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 หารูปมาตรฐานของ $4x^2 + 9y^2 = 36$

วิธีทำ นำ 36 ไปหารทั้งสมการ

$$\text{ได้ } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

เป็นสมการวงรีนอน แกนเอกคือแกน X จุดศูนย์กลาง $(0,0)$

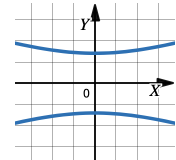


ตัวอย่างที่ 2 หารูปมาตรฐานของ $9y^2 - x^2 = 18$

วิธีทำ นำ 18 ไปหารทั้งสมการ

$$\text{ได้ } \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{18} = 1$$

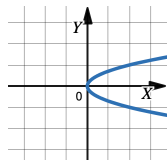
เป็นสมการไฮเพอร์โบลาคตามแกน Y จุดอ้างอิง $(0,0)$



ตัวอย่างที่ 3 จงวิเคราะห์ $4y^2 - 2x = 0$

วิธีทำ จัดรูป โดยเขียนได้เป็น $y^2 = \frac{1}{2}x$

เป็นสมการพาราโบลา ตะแคงด้านขวา จุดยอดคือ $(0,0)$ สมการไดเรกทริกซ์คือ $4c = \frac{1}{2} \rightarrow x = -c = -\frac{1}{8}$

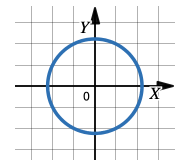


ตัวอย่างที่ 4 จงวิเคราะห์ $x^2 + y^2 = 5$

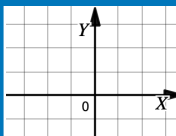
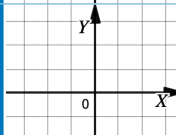
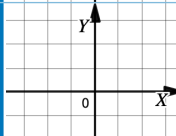
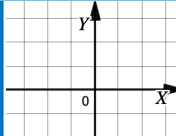
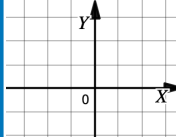
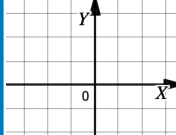
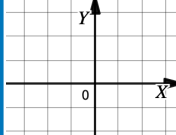
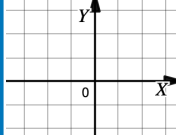
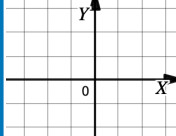
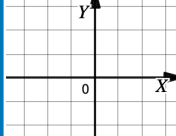
วิธีทำ สมการดังกล่าวอยู่ในรูป

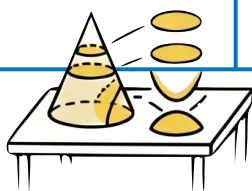
$$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$$

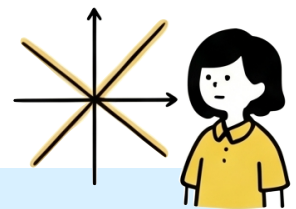
เป็นสมการวงกลม จุดศูนย์กลาง $(0,0)$ รัศมี $\sqrt{5}$ หน่วย



ทบทวนความเข้าใจ ให้วิเคราะห์สมการ เช่น จุดศูนย์กลาง จุดอ้างอิง แกนที่เกี่ยวข้อง และร่างกราฟพอสั่งเขป

รูปทั่วไป	ชื่อ	รูปมาตรฐาน	แกน	ข้อมูลอื่น ๆ	ร่างกราฟ
$x^2 + y^2 = 16$					
$16x^2 + 9y^2 = 144$					
$9x^2 + 4y^2 = 36$					
$x^2 - 4y^2 = 16$					
$9y^2 - 16x^2 = 144$					
$y^2 = 8x$					
$x^2 = -12y$					
$2x^2 + 3y^2 = 12$					
$x^2 - y^2 = 25$					
$y^2 + 4x = 0$					





วันที่ 18 ระบบสมการสองตัวแปร

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3 - 4 * เนื้อหาบางส่วนไม่อยู่ในหลักสูตรฉบับใหม่

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- จุดมุ่งหมายของการแก้ระบบสมการ คือ หาจุดตัดของกราฟของความสัมพันธ์สองเส้นที่ตัดกัน
- เมื่อมีเส้นตรงสองเส้น เราจะแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร
กำหนดสมการ $a_1x + b_1y = c_1$ — (1)
 $a_2x + b_2y = c_2$ — (2)
สามารถแก้ระบบสมการได้หลายวิธี อาทิ
 - จัดรูปสมการหนึ่ง แล้วแทนค่าตัวแปรในอีกสมการหนึ่ง
 - ทำสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรหนึ่งให้เท่ากัน แล้วเริ่มกำจัดทีละตัวแปร จากนั้นแทนค่าคืนเพื่อหาคำตอบอีกตัวแปร
- ระบบสมการเชิงเส้นจะมีคำตอบ 1 คำตอบ เมื่อ เส้นตรงทั้งสองไม่ขนานกัน หรือ ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน เส้นตรงทั้งสองเส้นเป็นเส้นตรงเดียวกัน (มีคำตอบของระบบสมการไม่จำกัด)
- * ในกรณีที่มีความสัมพันธ์สองตัวแปรสองความสัมพันธ์ แทนด้วยฟังก์ชันแฝง (implicit function)
 $F_1(x, y) = 0$ — (1) $F_2(x, y) = 0$ — (2)
โดยทั่วไป มักจะแทนค่าตัวแปรหนึ่งในสมการหนึ่ง ลงไปในอีกสมการหนึ่ง จากนั้นแก้สมการเพื่อหาคำตอบตัวแปรอื่น

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 แก้ระบบสมการ $x + 2y = 1$ — (1)

$$2x - y = 2 \quad \text{— (2)}$$

วิธีทำ จาก (1) จะได้ว่า $x = 1 - 2y$ — (3)

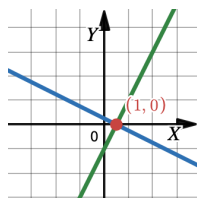
แทน (3) ใน (2) ได้ว่า $2(1 - 2y) - y = 2$

หรือได้ว่า $2 - 5y = 2$

นั่นคือ $y = 0$

แทน $y = 0$ ใน (3) ได้ว่า $x = 1$

คำตอบของระบบสมการ คือ $(1, 0)$



ตัวอย่างที่ 1 แก้ระบบสมการ $3x + y = -1$ — (1)

$$-x + 2y = 2 \quad \text{— (2)}$$

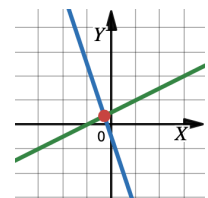
วิธีทำ นำ $3 \times (2)$ จะได้ว่า $-3x + 6y = 6$ — (3)

นำ (1) + (3) ได้ว่า $7y = 5$ หรือ $y = \frac{5}{7}$

แทน $y = \frac{5}{7}$ ใน (2)

ได้ว่า $x = 2\left(\frac{5}{7}\right) - 2 = -\frac{4}{7}$

คำตอบ คือ $\left(-\frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right)$



ตัวอย่างที่ 3 แก้ระบบสมการ $y = x + 3$ — (1)

$$y = x^2 + 1 \quad \text{— (2)}$$

วิธีทำ แทน (1) ใน (2) จะได้

$$x + 3 = x^2 + 1$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

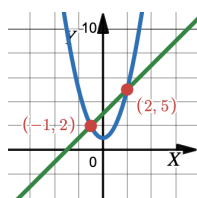
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

ได้ว่า $x = -1$ หรือ $x = 2$

เมื่อ $x = -1$ ได้ $y = -1 + 3 = 2$

เมื่อ $x = 2$ ได้ $y = 2 + 3 = 5$

คำตอบ คือ $(-1, 2)$ และ $(2, 5)$



ตัวอย่างที่ 4 แก้ระบบสมการ $x + y = 1$ — (1)

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{— (2)}$$

วิธีทำ จาก (1) จะได้ว่า $y = 1 - x$ — (3)

แทน (3) ใน (2) ได้ว่า $x^2 + (1 - x)^2 = 9$

หรือได้ว่า $2x^2 - 2x - 8 = 0$

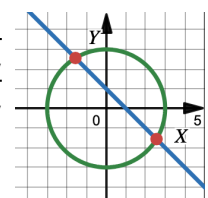
นั่นคือ $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$ แทนใน (3)

เมื่อ $x = 2 + 2\sqrt{2}$, $y = -1 - 2\sqrt{2}$

เมื่อ $x = 2 - 2\sqrt{2}$, $y = -1 + 2\sqrt{2}$

คำตอบ คือ $(2 + 2\sqrt{2}, -1 - 2\sqrt{2})$

และ $(2 - 2\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2})$



ตัวอย่างที่ 5 แก้ระบบสมการ $y^2 - x = 3$ — (1)

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{— (2)}$$

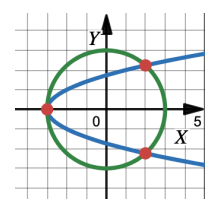
วิธีทำ จาก (1) ได้ว่า $y^2 = 3 + x$ — (3) แทน (3) ใน (2) ได้ว่า $x^2 + (3 + x) = 9$

นั่นคือ $x^2 + x - 6 = 0$ ซึ่งได้ว่า $(x + 3)(x - 2) = 0$ ได้ว่า $x = -3$ หรือ $x = 2$

แทนใน (3) เมื่อ $x = -3$ ได้ว่า $y^2 = 0$ นั่นคือ $y = 0$

แทนใน (3) เมื่อ $x = 2$ ได้ว่า $y^2 = 5$ นั่นคือ $y = \pm\sqrt{5}$

คำตอบของระบบสมการ คือ $(-3, 0)$, $(2, \sqrt{5})$, $(2, -\sqrt{5})$



ทบทวนความเข้าใจ แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : แก่ระบบสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\textcircled{1} \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

③ $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 5x - y = 9 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} 3x - 4y = -2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

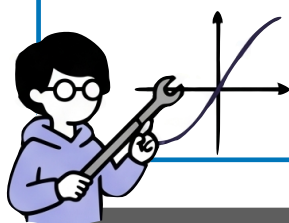
$$\textcircled{6} \begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$$

$$\textcircled{7} \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

8 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$

9 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$

⑩ $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$





วันที่ 19 การเลื่อนแกนทางขนาน

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

ที่ผ่านมา (โดยเฉพาะวันที่ 17) เรารู้จักกราฟที่ในรูปแบบมาตรฐานแล้ว ในที่นี้ เราต้องการเลื่อนจุดศูนย์กลาง / จุดอ้างอิง จากจุดกำเนิด $(0,0)$ ไปยังจุดใหม่ (h, k) ตามทางขนานแกน X และแกน Y

• เราเคยทำลักษณะนี้กับฟังก์ชันกำลังสองมาแล้วในวันที่ 16 ในตัวอย่าง เราใช้วิธีการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ เพื่อจัดรูปแบบกำลังสองที่เป็นรูปทั่วไปให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

• สมการในวันที่ 17 จะอยู่ในรูปที่ปรากฏ (h, k) เช่น

- สมการวงกลม จุดศูนย์กลางที่ (h, k) รัศมี r $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
- สมการวงรี จุดศูนย์กลาง (h, k) $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ หรือ $\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$
- สมการพาราโบลา จุดยอดที่ (h, k) $(x - h)^2 = \pm 4c(y - k)$ หรือ $(y - h)^2 = \pm 4c(x - k)$
- สมการไฮเพอร์โบลา จุดอ้างอิงที่ (h, k) $\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ หรือ $\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$
- สมการไฮเพอร์โบลามุมฉาก จุดอ้างอิงที่ (h, k) $(x - h)(y - k) = 1$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : หาจุดศูนย์กลางของสมการที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 1 $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

วิธีทำ แยกกลุ่มตัวแปรก่อน ได้สมการเป็น

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) + 9 = 0$$

ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = -9 + 9 + 16$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$$

เป็นสมการวงกลม จุดศูนย์กลาง $(3, -4)$ รัศมี 4 หน่วย

ตัวอย่างที่ 2 $4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y - 63 = 0$

วิธีทำ แยกกลุ่มตัวแปร และดึงตัวร่วม ได้สมการเป็น

$$4(x^2 - 6x) + 9(y^2 + 2y) - 63 = 0$$

ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 + 2y + 1) = 63 + 36 + 9$$

$$4(x - 3)^2 + 9(y + 1)^2 = 108$$

$$\frac{(x - 3)^2}{27} + \frac{(y + 1)^2}{12} = 1$$

เป็นสมการวงรี แกนเอกอยู่ที่แกน X จุดศูนย์กลาง $(3, -1)$

ตัวอย่างที่ 3 $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y - 19 = 0$

วิธีทำ แยกกลุ่มตัวแปร และดึงตัวร่วม ได้สมการเป็น

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 + 4y) - 19 = 0$$

ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = 19 + 81 - 16$$

$$9(x - 3)^2 - 4(y + 2)^2 = 84$$

$$\frac{(x - 3)^2}{28/3} - \frac{(y + 2)^2}{21} = 1$$

เป็นสมการไฮเพอร์โบลาตามแกน X จุดอ้างอิง $(3, -2)$

ตัวอย่างที่ 4 $y^2 + 6y - 4x + 1 = 0$

วิธีทำ จัดกลุ่มตัวแปร พบว่า

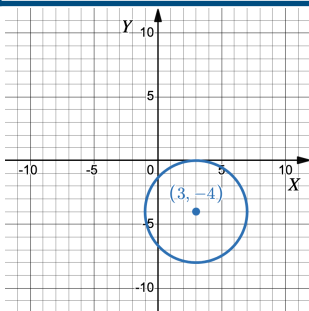
$$y^2 + 6y = 4x - 1$$

ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

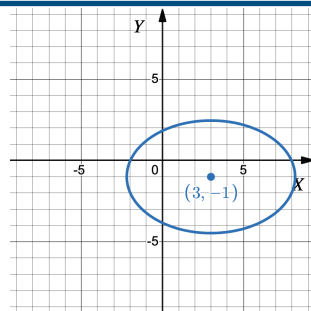
$$y^2 + 6y + 9 = 4x - 1 + 9$$

$$(y + 3)^2 = 4(x + 2)$$

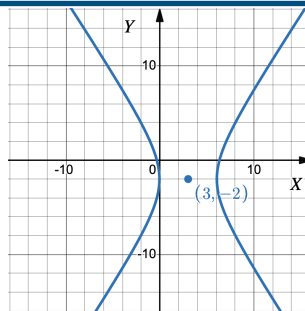
เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ต่แคงขวา จุดยอด $(-2, -3)$



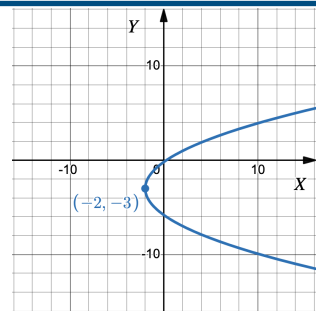
$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$$



$$4x^2 + 9y^2 - 24x + 18y - 63 = 0$$



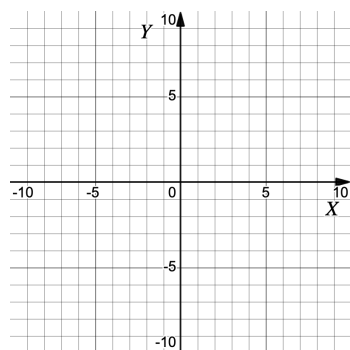
$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y - 19 = 0$$



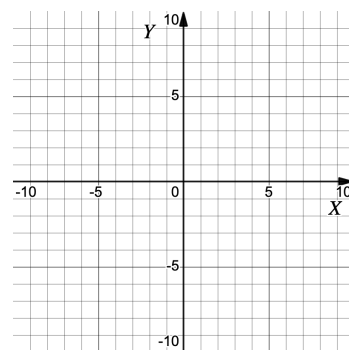
$$y^2 + 6y - 4x + 1 = 0$$

ทบทวนความเข้าใจ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน พร้อมระบุจุดอ้างอิง วิเคราะห์ข้อมูล และร่างกราฟ

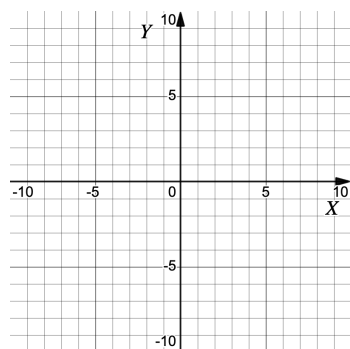
❶ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$



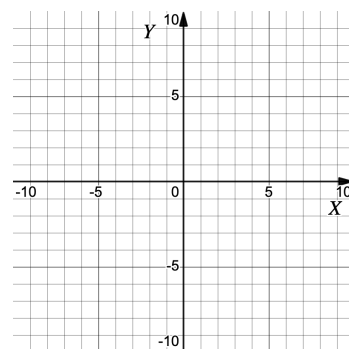
❷ $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$



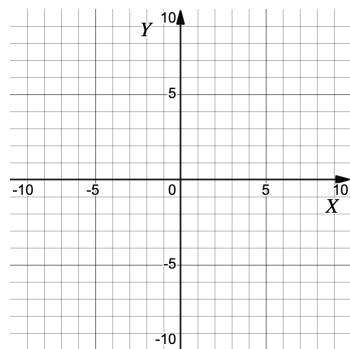
❸ $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$



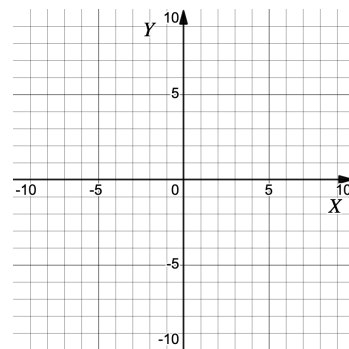
❹ $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y - 5 = 0$



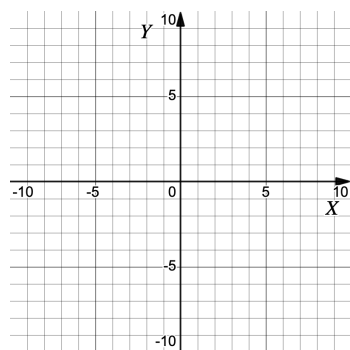
❺ $9y^2 - 16x^2 + 18y + 32x - 7 = 0$



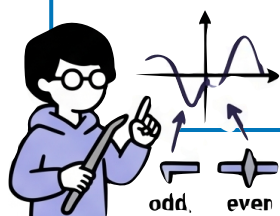
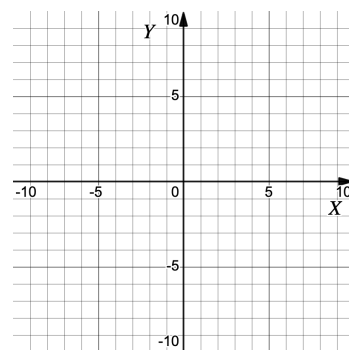
❻ $x^2 - 2x - 4y + 5 = 0$



❼ $y^2 + 4y - 8x + 4 = 0$

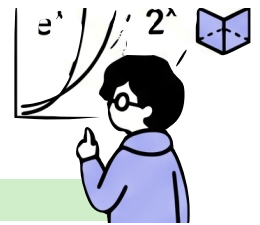


❽ $4y^2 + 8y + 16x + 9 = 0$



ช่วงที่ 5

ฟังก์ชันที่สำคัญในแคลคูลัส



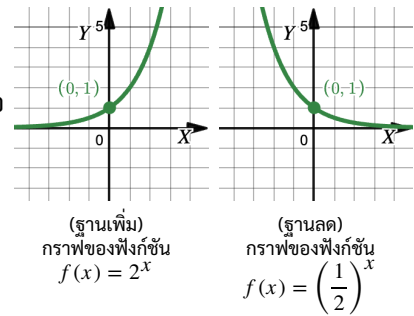
วันที่ 20 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (exponential function) เป็นฟังก์ชันที่เขียนได้ในรูป $y = a^x$ โดยที่ $a \neq 1, a > 0$
- ในรูปมาตรฐาน $y = a^x$ กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจะผ่าน $(0,1)$ เสมอ
- เราสามารถแบ่งกรณีของ a ออกเป็นสองกรณีคือ
 - ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเพิ่ม (เป็นฟังก์ชันเพิ่ม) เมื่อ $a > 1$
 - ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลลด (เป็นฟังก์ชันลด) เมื่อ $0 < a < 1$
- กรณีที่ฐานเป็นจำนวน $e \approx 2.7$ (จำนวนอตรรกยะ) ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลนั้นคือ $y = e^x$ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลฐานเพิ่ม



- เราประยุกต์ใช้สมบัติของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลได้ โดยใช้สมบัติเดียวกันกับเลขยกกำลัง
- สมการเอกซ์โพเนนเชียล $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ และ $a^x = b^x$ แล้ว $x = 0$
เช่น $3^x = 9$ ได้ว่า $3^x = 3^2$ นั่นคือ $x = 2$
- สำหรับสมการเอกซ์โพเนนเชียล ต้องพิจารณาเงื่อนไขของฐานประกอบด้วย
 - กรณีฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $a^x \geq a^y$ แล้ว $x \geq y$
 - กรณีฟังก์ชันลด ถ้า $a^x \geq a^y$ แล้ว $x \leq y$

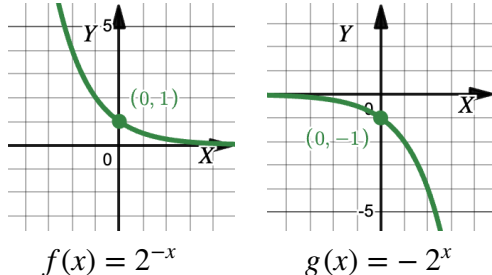
กำหนด $f(x) = a^x$
 $D_f = \mathbb{R}$
 $R_f = (0, \infty)$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 วาดกราฟ $f(x) = 2^{-x}$ และ $g(x) = -2^x$

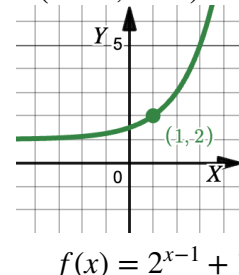
วิธีทำ สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

และสำหรับ $g(x) = -2^x$ คือกราฟ $h(x) = 2^x$ แต่สะท้อนตามแกน X



ตัวอย่างที่ 2 วาดกราฟ $f(x) = 2^{x-1} + 1$

วิธีทำ เขียนฟังก์ชันได้ในรูป $y - 1 = 2^{x-1}$
 กราฟดังกล่าวคือกราฟของ $y = 2^x$ ที่ถูกเลื่อนแกนทางขนานไปที่จุด $(1,1)$ โดยที่จุดอ้างอิง $(0,1)$ ถูกเลื่อนไปที่ $(0+1, 1+1) = (1,2)$



ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $3^{x^2} = 81$

วิธีทำ เขียน $81 = 3^4$ ดังนั้น $3^{x^2} = 3^4$
 โดยสมบัติของเลขยกกำลัง ได้ว่า $x^2 = 4$
 จึงได้ว่า $x = 2$ หรือ $x = -2$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $4^{2x+1} = \frac{1}{64}$

วิธีทำ เขียนฐานเหมือนกันได้ว่า $(2^2)^{2x+1} = 2^{-6}$
 หรือได้ว่า $2^{4x+2} = 2^{-6}$
 โดยสมบัติของเลขยกกำลัง ได้ว่า $4x + 2 = -6$
 จึงได้ว่า $4x = -8$ ได้ว่า $x = -2$

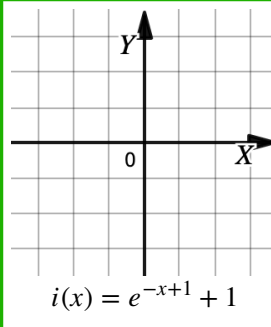
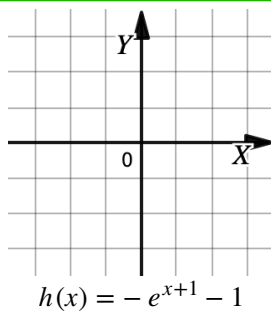
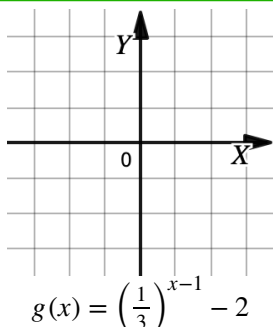
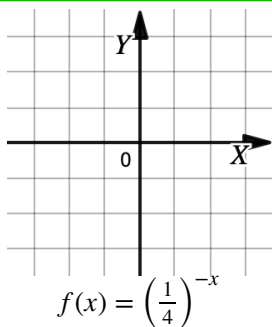
ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $2^{x+1} > 16$

วิธีทำ จัดรูปฐานของเลขยกกำลัง ได้ $2^{x+1} > 2^4$
 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ได้ว่า $x + 1 > 4$
 เพราะฉะนั้น $x > 3$

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x^2} \leq \left(\frac{1}{27}\right)$

วิธีทำ เขียนฐานเหมือนกันได้ว่า $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x^2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$
 เป็นฟังก์ชันฐานลด ได้ว่า $4 - x^2 \geq 3$
 แก้อสมการในรูป $x^2 - 1 \leq 0$ ได้เซตคำตอบคือ $[-1, 1]$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ร่างกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่กำหนดให้ต่อไปนี้



บททวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงแก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียลที่กำหนดให้

① $2^{x+1} = 16$

② $5^{2x-1} = 125^{-1}$

3 $2^{x^2} = 16$

④ $3^{x^2-1} = 27$

5 $0.5^{x^2-3x} = 0.0625$

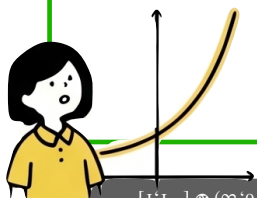
⑥ $9^{x^2-2x} = 81$

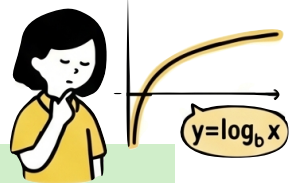
⑦ $3^{x+2} > 27$

$$\textcircled{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq \frac{1}{8}$$

⑨ $2^{x^2-3} \geq 8$

$$\textcircled{10} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} \geq \frac{1}{9}$$





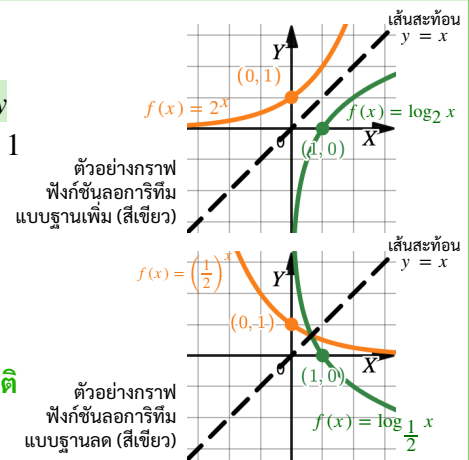
วันที่ 21 ฟังก์ชันลอการิทึม

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ตัวผกผันจึงเป็นฟังก์ชัน เรียกฟังก์ชันนี้ว่า **ฟังก์ชันลอการิทึม** (logarithmic function) ดังความสัมพันธ์ $y = a^x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \log_a y$
- ฟังก์ชันลอการิทึม คือฟังก์ชันที่เขียนในรูป $y = \log_a x$ โดยที่ $a > 0, a \neq 1$
- ในการทำงานเดียวกันกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
 - ฟังก์ชันลอการิทึมฐานเพิ่ม (เป็นฟังก์ชันเพิ่ม) เมื่อ $a > 1$
 - ฟังก์ชันลอการิทึมฐานลด (เป็นฟังก์ชันลด) เมื่อ $0 < a < 1$
- ในรูปแบบมาตรฐาน กราฟจะตัดแกน X ที่จุด $(1, 0)$
- กรณีที่ฐาน a เป็นจำนวน $e \approx 2.7$ (จำนวนอตรรกยะ) จะเขียนฟังก์ชันลอการิทึมในรูป $y = \ln x$ เรียกว่า **ลอการิทึมฐานธรรมชาติ** (natural logarithm)
- โดยทั่วไป หากไม่กำกับฐาน เช่น $y = \log x$ จะหมายถึงลอการิทึมฐาน 10



- สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม มีดังนี้

- $\log_a 1 = 0$ และ $\log_a a = 1$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a(x^k) = k \log_a x$ และ $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ และ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $a^{\log_a x} = x$ และ $\log_a(a^x) = x$

ข้อควรระวัง

- $\log(x \pm y) \neq \log x \pm \log y$
- $\log(xy) \neq \log x \cdot \log y$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{\log x}{\log y}$
- $(\log x)^n \neq n \log x$
- $\log(ax) \neq a \log x$

กำหนด $f(x) = \log_a x$
 $D_f = (0, \infty)$
 $R_f = \mathbb{R}$
 นั่นคือ $x > 0$ เสมอ

ค่าคงตัวใช้บ่อย

$\log 2 \approx 0.301$
 $\log 3 \approx 0.477$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก :

ตัวอย่างที่ 1 วาดกราฟ $f(x) = \ln(x-1) + 2$

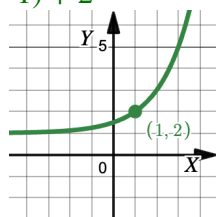
วิธีทำ เขียน $y - 2 = \ln(x-1)$

คือกราฟของ $y = \ln x$

ที่จุดกำเนิดใหม่ อยู่ที่ $(1, 2)$

โดยที่จุดอ้างอิง $(1, 0)$

ถูกเลื่อนไปที่ $(2, 2)$



ตัวอย่างที่ 2 หาโดเมนของ $f(x) = \log(1-x^2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $1-x^2 > 0$ จึงได้ว่า

$$x^2 - 1 < 0$$

หรือได้สมการ คือ $(x+1)(x-1) < 0$

ดังนั้น โดเมนคือ $(-1, 1)$

ตัวอย่างที่ 3 ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$2 \log(3) + \frac{1}{2} \log(16)$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } 2 \log(3) + \frac{1}{2} \log(16) &= \log 3^2 + \log 16^{\frac{1}{2}} \\ &= \log(9 \cdot 4) = \log(36) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย $e^{-\ln(1+x^2)}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } e^{-\ln(1+x^2)} &= e^{\ln(1+x^2)^{-1}} \\ &= (1+x^2)^{-1} \quad (\text{สมบัติข้อที่ 6}) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\log_2(\sqrt{32}) - \log_2(4)$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \log_2(\sqrt{32}) - \log_2(4) &= \log_2(2^{\frac{5}{2}}) - \log_2(2^2) \\ &= \frac{5}{2} \log_2 2 - 2 \log_2 2 \\ &= \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 เขียน $\ln\left(\frac{x^2\sqrt{y}}{z}\right)$ ให้อยู่ในรูปผลบวก - ลบ

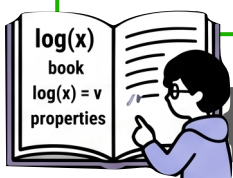
$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } \ln\left(\frac{x^2\sqrt{y}}{z}\right) &= \ln(x^2) + \ln(\sqrt{y}) - \ln z \\ &= 2 \ln x + \frac{1}{2} \ln y - \ln z \end{aligned}$$

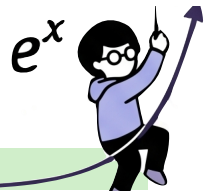
ทบทวนความเข้าใจ 1 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้แก้ไขให้ถูกต้อง

ข้อความ	จริง	เท็จ	แก้ไข
$\log_2(8 \cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4$			
$\log_2(8 + 4) = \log_2 8 + \log_2 4$			
$\log_3\left(\frac{27}{3}\right) = \log_3 27 - \log_3 3$			
$\log_2(16) = (\log_2 4)^2$			
$\log_5(25^x) = 2x$			
$\log_2 8 = \frac{1}{\log_8 2}$			
$\log_2(\sqrt{8}) = \frac{3}{2}$			
$\log_2(8^{x+1}) = (x+1)\log_2 8$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1 $2 \log_3(9) - \log_3(\sqrt{3})$	2 $3 \ln(e) + \ln\left(\frac{\sqrt{e^2}}{e^4}\right)$
3 $\log_2(4^3) - 2 \log_2(2^2) + \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	4 $2 \log_3(9x) - \log_3(3x^2)$ เมื่อ $x > 0$
5 ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย $3^{-\frac{1}{2} \log_3(x^2+4)^2}$	6 เขียนในรูปฐานธรรมชาติ $\log_2(8) + \log_2(\sqrt{2}) - \log_2(4)$
7 เขียนในรูปผลบวก - ลบ $\ln\left(\frac{e^{2x}\sqrt{e^x}}{e^3}\right)$	8 เขียนในรูปผลบวก - ลบ $\log_2\left(\frac{8\sqrt{2x^3}}{4x}\right)$, $x > 0$





วันที่ 22 สมการและอสมการลอการิทึม

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- ในทำนองคล้ายกันกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เรามีสมบัติของสมการลอการิทึม กล่าวคือ $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
- นอกจากนี้ เราอาจใช้สมบัติของลอการิทึมที่เชื่อมโยงกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $y = a^x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \log_a y$
- เราใช้ลอการิทึมช่วยในการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลได้ในกรณีที่ไม่สามารถจัดรูปฐานให้เท่ากันทั้งสองข้าง โดยการใส่ลอการิทึมทั้งสองข้าง
เช่น $2^x = 5$ ต้องการแก้หาค่า x ใส่ลอการิทึมฐานสองทั้งสองข้าง ได้ $\log_2 2^x = \log_2 5$ ได้ว่า $x = \log_2 5$
- เมื่อแก้สมการ ต้องตรวจสอบเงื่อนไขของคำตอบว่าสอดคล้องกับฟังก์ชันลอการิทึมหรือไม่
- ในทำนองคล้ายกันกับอสมการเอกซ์โพเนนเชียล เราสามารถใช้หลักการแก้สมการ โดยแบ่งตามลักษณะฐาน ดังนี้
 - กรณีฐานเพิ่ม ($a > 1$) $\log_a x \geq \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x \geq y$
เช่น $\log_2 x \geq \log_2 5$ ได้ว่า $x \geq 5$ หรือ $2^x > 3$ ใส่ $\log_2$ ทั้งสองข้าง ได้ว่า $\log_2 2^x = x > \log_2 3$
 - กรณีฐานลด ($0 < a < 1$) $\log_a x \geq \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq y$
เช่น $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 5$ ได้ว่า $x \leq 5$ หรือ $(\frac{1}{2})^x > 3$ ใส่ $\log_{\frac{1}{2}}$ ทั้งสองข้าง ได้ว่า $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^x = x < \log_{\frac{1}{2}} 3$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 แก้สมการ $\log_2 x = 3$

วิธีทำ $\log_2 x = 3$ เขียนได้ในรูป $x = 2^3$
ได้ว่า คำตอบของสมการ คือ $x = 8$

ตัวอย่างที่ 3 แก้สมการ $\log_2 x = \log_4 16$

วิธีทำ ทำฐานลอการิทึมให้เท่ากัน ได้ว่า

$$\log_2 x = \frac{1}{2} \log_2 2^4$$

$$\text{หรือได้ว่า } \log_2 x = \log_2 2^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = 4$$

ตัวอย่างที่ 5 แก้สมการ $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$

วิธีทำ ใช้สมบัติลอการิทึมจัดในรูปอย่างง่าย ได้ว่า

$$\log_2[(x-1)(x-3)] = 3$$

$$\text{ดังนั้น } (x-1)(x-3) = 8$$

$$\text{หรือได้ว่า } x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x-5)(x+1) = 0$$

$$\text{ได้ว่า } x = -1 \text{ หรือ } x = 5$$

$$\text{แต่ } x = -1 \text{ ทำให้ไม่จริงในเงื่อนไขโจทย์ ดังนั้น } x = 5$$

ตัวอย่างที่ 7 แก้สมการ $\log_2(x-1) > 3$

วิธีทำ เขียนพจน์ด้านขวาในรูปลอการิทึม

$$\log_2(x-1) > \log_2 2^3$$

โดยสมบัติของอสมการลอการิทึม ได้ว่า

$$x-1 > 8$$

$$\text{หรือได้ว่า } x > 9 \text{ เซตคำตอบของสมการคือ } (9, \infty)$$

ตัวอย่างที่ 2 แก้สมการ $\log_3(x-1) = 2$

วิธีทำ $\log_3(x-1) = 2$ เขียนได้ในรูป $x-1 = 3^2$
ได้ว่า คำตอบของสมการ คือ $x = 10$

ตัวอย่างที่ 4 แก้สมการ $\log_3(x^2-1) = 2$

วิธีทำ $\log_3(x^2-1) = 2$ เขียนได้ในรูป $x^2-1 = 2^3$

$$\text{แก้สมการ } x^2 = 9 \text{ ได้คำตอบคือ } x = \pm 3$$

เมื่อตรวจสอบพบว่า ทั้งสองคำตอบสอดคล้องกับเงื่อนไข
เพราะฉะนั้น $x = 3$ หรือ $x = -3$

ตัวอย่างที่ 6 แก้สมการ $5^{x+1} = 2^x$

วิธีทำ ใส่ $\ln$ ทั้งสองข้าง ได้ว่า $\ln(5^{x+1}) = \ln(2^x)$

$$\text{ได้ว่า } (x+1)\ln 5 = x \ln 2$$

$$\text{หรือได้ว่า } x(\ln 5 - \ln 2) = -\ln 5$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = -\frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2}$$

$$\text{หรือคำตอบคือ } x = \frac{\ln 5}{\ln 2 - \ln 5}$$

ตัวอย่างที่ 6 แก้สมการ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 2$

วิธีทำ ใส่ $\ln$ ทั้งสองข้าง ได้ว่า $\ln\left(\frac{1}{3}\right)^x > \ln(2)$

$$\text{ได้ว่า } x \ln\left(\frac{1}{3}\right) > \ln 2$$

$$\text{แต่เนื่องจาก } \ln(1/3) = -\ln 3 \text{ ดังนั้น } x < -\frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$\text{เซตคำตอบของสมการคือ } \left(-\infty, -\frac{\ln 2}{\ln 3}\right)$$

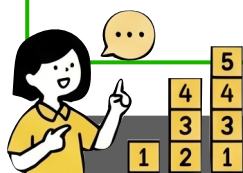
$$(\text{อาจตอบในรูปลอการิทึมฐานอื่น คือ } x < -\log_3 2)$$

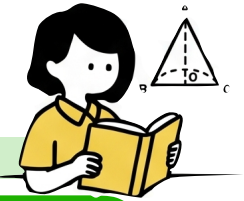
ทบทวนความเข้าใจ 1 จงหาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

สมการ	คำตอบของสมการ
$2 \log_5(x) = \log_5(25)$	
$\log_2(x^2) = 4$	
$2^x = 7$	
$3^{2x-1} = 5$	
$4^x = 3^{2x}$	
$\log_5(x) = \log_2(8)$	
$\ln(x+1) = 2$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงแก้สมการหรือสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

❶ $\log_3(x-1) - \log_3(2) = 2$	❷ $\log_3 x - \log_3(x-2) = 1$
❸ $\log_2(x) = \ln x$	❹ $2^x + 2^{x-1} = 12$ (คำใบ้ : เปลี่ยนตัวแปรให้ $2^x = A$)
❺ $\log_2(x-1) > 2$	❻ $\log_3(x+2) - \log_3 x \leq 1$
❼ $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 5$	❽ $2^{x-1} + 2^x > 12$





วันที่ 23 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และอัตราส่วนตรีโกณมิติ

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3

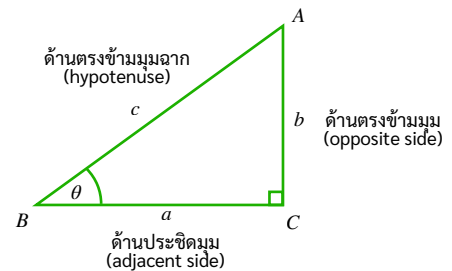
วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $\triangle ABC$ ดังภาพ ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagoras Theorem) กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านประกอบมุมฉาก และ ด้านตรงข้ามมุมฉากได้ว่า

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- ตัวอย่างเลขชุดพีทาโกรัส ที่ความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม เช่น (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25) ทั้งนี้ เมื่อขยายสเกลความสัมพันธ์นี้ยังคงเป็นจริง
- เมื่อสามเหลี่ยมมีความยาวด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $\sqrt{2}$ หน่วย



- สำหรับสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนด θ เป็นมุมประชิดกับด้านตรงข้ามมุมฉาก เรานิยามอัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{b}{c} & \csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta} \\ \cos \theta &= \frac{a}{c} & \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} & \cot \theta &= \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

- สำหรับกรณีค่ามุมพิเศษบางค่า ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติสอดคล้องดังตาราง

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan \theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่งมีความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก $\sqrt{5}$ หน่วย และมีด้านประกอบมุมฉากหนึ่งยาว 2 หน่วย อีกด้านยาวเท่าใด

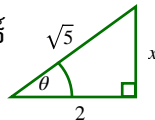
วิธีทำ สมมติอีกด้านยาว x จากความสัมพันธ์

$$(\sqrt{5})^2 = 2^2 + x^2$$

ได้ว่า $5 = 4 + x^2$ หรือได้ว่า $x^2 = 1$

เพราะฉะนั้น อีกด้านหนึ่งยาว 1 หน่วย

(ใช้เฉพาะค่าบวก)



ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนด พร้อมระบุค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ $\sin \theta, \cos \theta$

วิธีทำ ด้าน a หาได้จาก

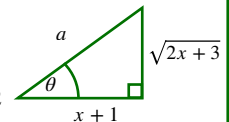
$$a^2 = (x+1)^2 + (\sqrt{2x+3})^2$$

$$a^2 = x^2 + 4x + 4 + 2x + 3$$

$$a^2 = x^2 + 6x + 7$$

$$a = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = x+2$$

$$\text{ดังนั้น } \sin \theta = \frac{\sqrt{2x+3}}{x+2} \text{ และ } \cos \theta = \frac{x+1}{x+2}$$



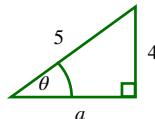
ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\sin \theta = \frac{4}{5}$ จงหา $\tan \theta$

วิธีทำ จากเงื่อนไขที่กำหนด จะพบว่า

$$5^2 = 4^2 + a^2$$

$$\text{ได้ว่า } a^2 = 9 \text{ หรือ } a = 3$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \tan \theta = \frac{4}{3}$$

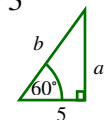


ตัวอย่างที่ 4 ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้ามุมหนึ่งมีขนาด 60° และด้านประชิดมุมยาว 5 หน่วย หาคความยาวด้านที่เหลือ

วิธีทำ จาก $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ จะได้ว่า $\frac{a}{5} = \sqrt{3}$

$$\text{นั่นคือ } a = 5\sqrt{3} \text{ และจาก } \cos 60^\circ = \frac{5}{b}$$

$$\text{จะได้ว่า } b = \frac{5}{1/2} = 10$$



ตัวอย่างที่ 5 หาค่า $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$

วิธีทำ $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

ทั้งนี้ในสามเหลี่ยมมุมฉาก $\sin(A) = \cos(90^\circ - A)$ และ $\cos(A) = \sin(90^\circ - A)$

ตัวอย่างที่ 6 หาค่า $\sin 45^\circ \cos 60^\circ - \cos 30^\circ \sin 30^\circ$

วิธีทำ $\sin 45^\circ \cos 60^\circ - \cos 30^\circ \sin 30^\circ$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{4}$$

บททวนความเข้าใจ 1 จงหาความยาวด้านที่เหลือ และคำนวณอัตราส่วนตรีโกณมิติจากข้อมูลที่กำหนดให้

a	b	c	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
8	6		$\times$			
	$2\sqrt{2}$	8	$\times$			
x	$x+2$		$\times$			
$x+1$		x^2+2	$\times$			
3			30°			
	$\sqrt{2}$		60°			
		$\sqrt{x^2+1}$	45°			
	x		30°			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

① $\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

② $\sin 30^\circ \sin 60^\circ + \cos 30^\circ \cos 60^\circ$

$$\textcircled{3} \frac{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ}{\tan 45^\circ}$$

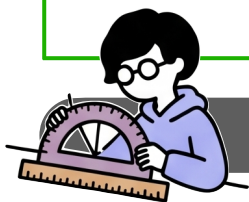
④ $\tan 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \csc 45^\circ$

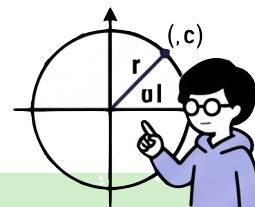
5 $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$

⑥ $(\sin 60^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 30^\circ + \cos 60^\circ)$

7 $(\csc 30^\circ + \sin 45^\circ)^2 - (\sin 45^\circ)^2$

$$\textcircled{8} \frac{(\sec 60^\circ - \cos 30^\circ)(\sec 60^\circ + \cos 30^\circ)}{\tan^2 45^\circ}$$





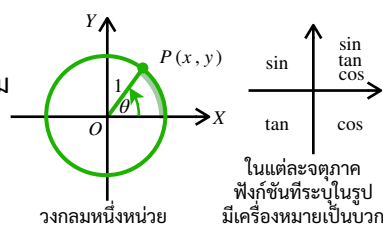
วันที่ 24 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ : วงกลมหนึ่งหน่วย

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 5

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- เพื่อขยายแนวคิดของอัตราส่วนตรีโกณมิติให้สามารถวัดมุมในรูปสามเหลี่ยมที่ไม่ใช่สามเหลี่ยมมุมฉาก เราพิจารณาตรีโกณมิติในรูปแบบวงกลมหนึ่งหน่วย
- กำหนดวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$ เมื่อพิจารณาจุด $P(x, y)$ ซึ่งอยู่บนวงกลมในจุดภาคที่หนึ่ง โดยที่ OP ทำมุม θ กับแกน X จะได้พิกัดของจุด (x, y) ในรูป $x = \cos \theta$ $y = \sin \theta$ ได้เอกลักษณ์ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- นอกจากนี้ เราพิจารณาค่ามุมในรูปความยาวส่วนโค้ง เป็นค่าจำนวนจริง หน่วยการวัดมุมนี้เรียกว่าเรเดียน (radian) โดยมุม 360° คิดเป็น 2π เรเดียน
- เรานิยามฟังก์ชันไซน์ $f(x) = \sin x$ และ ฟังก์ชันโคไซน์ $f(x) = \cos x$ โดยที่ x ในที่นี้คือจำนวนจริง (การแทนค่าฟังก์ชันแทนค่ามุมในหน่วยเรเดียน)
- สำหรับฟังก์ชันอื่น ๆ นิยามทำนองคล้ายกันกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ คือ นิยาม $f(x) = \tan x$ $f(x) = \csc x$ $f(x) = \sec x$ $f(x) = \cot x$



กำหนด $f(x) = \sin x$
 $D_f = \mathbb{R}, R_f = [-1, 1]$

กำหนด $f(x) = \cos x$
 $D_f = \mathbb{R}, R_f = [-1, 1]$

- เมื่อขยายการคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในการคำนวณค่ามุมจากมุมแหลมสู่มุมป้าน เราจะใช้การคำนวณบนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยอาศัยรูปสามเหลี่ยมที่สะท้อนจากสามเหลี่ยมในจุดภาคที่หนึ่ง ไปยังจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยในจุดภาคที่ต้องการ และพิจารณาเครื่องหมายตามจุดภาค
- กำหนดการวัดมุม θ จากแกน X ไปยัง OP ในทิศทวนเข็มนาฬิกาหาค่าวกัดเกิน 2π ให้ตัดรอบทีละ 2π และเมื่อวัดมุมในทิศตามเข็มนาฬิกา ค่ามุมจะติดลบ ทั้งนี้ $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 เปลี่ยนมุม 45° ให้เป็นหน่วยเรเดียน และเปลี่ยน $\frac{5\pi}{6}$ ให้เป็นองศา

วิธีทำ เราใช้การเทียบบัญญัติไตรยางค์ช่วยได้ กล่าวคือ

มุม 360° ความยาวส่วนโค้ง 2π เรเดียน

มุม 45° ความยาวส่วนโค้ง $\frac{2\pi}{360^\circ} \times 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ เรเดียน

ความยาวส่วนโค้ง 2π เรเดียน คือมุม 360°

ความยาวส่วนโค้ง $\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน คือมุม

$$360^\circ \times \frac{5\pi/6}{2\pi} = 150^\circ$$

ตัวอย่างที่ 3 หาค่า $\sin(\frac{7\pi}{3}), \cos(\frac{7\pi}{3}), \tan(\frac{7\pi}{3})$

วิธีทำ $\sin(\frac{7\pi}{3}) = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3})$ ตัดรอบ 2π แขนของมุมตกใน Q1 จึงได้ว่า

$$\sin(\frac{7\pi}{3}) = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\frac{7\pi}{3}) = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$\tan(\frac{7\pi}{3}) = \frac{\sin(\frac{7\pi}{3})}{\cos(\frac{7\pi}{3})} = \sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x) = \sin x$ หา $f(\frac{\pi}{3}), f(\frac{2\pi}{3})$

วิธีทำ พิจารณา $f(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3})$

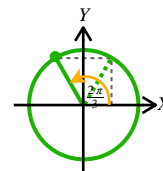
มีความหมายเดียวกันกับค่าไซน์ของ

มุม 60° นั่นคือ $f(\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

กรณี $f(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3})$

แขนของมุมอยู่ใน Q2 มีค่าไซน์เป็นบวก และสัมพันธ์กับมุม $\pi/3$ ได้ว่า

$$f(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



ตัวอย่างที่ 4 หาค่า $\sin(300^\circ), \tan(300^\circ)$

วิธีทำ แขนของมุม 300° ตกใน Q4

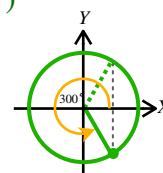
สัมพันธ์กับสามเหลี่ยมที่มีมุม 60° ใน Q1

โดยที่ใน Q4 ค่าไซน์เป็นลบ จึงได้ว่า

$$\sin(300^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

และพบว่าใน Q4 ค่าแทนเจนต์เป็นลบ ได้ว่า

$$\tan(300^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$$



ตัวอย่างที่ 5 หาค่า $\sin(-\frac{7\pi}{4}), \cos(-\frac{7\pi}{4})$

วิธีทำ $\sin(-\frac{7\pi}{4}) = -\sin(\frac{7\pi}{4})$ แขนของมุมตกใน Q4 และ

$\sin(\frac{7\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4})$ ได้ว่า $\sin(-\frac{7\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

และ $\cos(-\frac{7\pi}{4}) = \cos(\frac{7\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

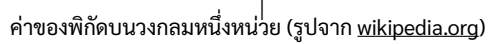
ตัวอย่างที่ 6 หาค่า $\sin(\frac{10\pi}{3}), \sec(\frac{10\pi}{3})$

วิธีทำ $\sin(\frac{10\pi}{3}) = \sin(2\pi + \frac{4\pi}{3})$ ตัดรอบ 2π แขนของมุมตกใน Q3 จึงได้ว่า

$$\sin(\frac{10\pi}{3}) = \sin(2\pi + \frac{4\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec(\frac{10\pi}{3}) = \sec(2\pi + \frac{4\pi}{3}) = -\sec(\frac{\pi}{3}) = -2$$

บททวนความเข้าใจ 1 ใช้ข้อมูลจากวงกลมหนึ่งหน่วยที่กำหนด คำนวณค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้



θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
$\frac{\pi}{4}$			
$-\frac{\pi}{6}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
$\frac{14\pi}{3}$			
$-\frac{11\pi}{6}$			
$\frac{4\pi}{3}$			

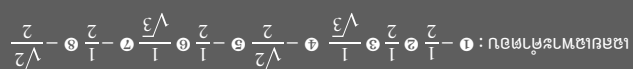
บททวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ใช้สามเหลี่ยมมุมฉากช่วยหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

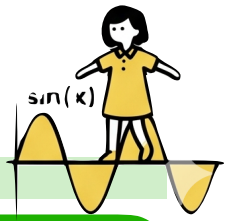
② $\sin(\frac{5\pi}{6})$

④ $\sin(-\frac{\pi}{4})$

⑥ $\tan(-\frac{5\pi}{6})$

8 $\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)$





วันที่ 25 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 5

วัน / เวลาที่ทำ :

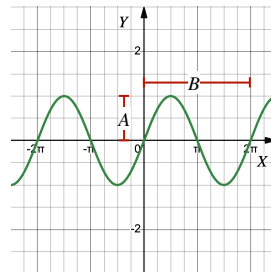
Main Concept : สำคัญ

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะเป็นคาบ (Period) สังเกตได้จากลักษณะการเกิดซ้ำตามรอบที่กำหนด

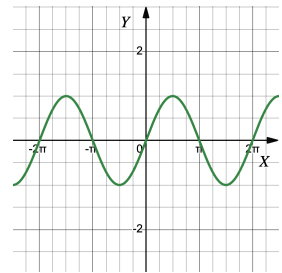
- กราฟของฟังก์ชันไซน์รูปมาตรฐาน อยู่ในรูป

$$f(x) = A \sin(Bx + C) + D$$

- A แสดงถึงความสูง (amplitude) บ่งบอกขนาดการแกว่ง
- B แสดงถึงคาบ (Period) บ่งบอกความยาวหนึ่งรอบที่ซ้ำกัน หาได้จาก $\frac{2\pi}{|B|}$
- C แสดงถึงการเลื่อนซ้าย-ขวา (phase shift)
- D แสดงถึงการเลื่อนขึ้น-ลง (vertical shift)
- สำหรับกราฟของฟังก์ชันโคไซน์ มีลักษณะคล้ายกันกับฟังก์ชันไซน์ ทั้งนี้ อาจกล่าวได้ว่า $f(x) = \cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$



กราฟ $f(x) = \sin x$
Amplitude = 1
คาบ = 2π

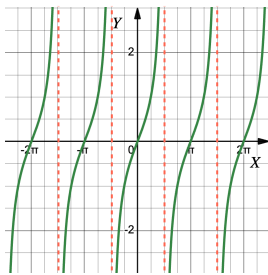


กราฟ $f(x) = \cos x$
Amplitude = 1
คาบ = 2π

- ลักษณะของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ มักมีเงื่อนไขที่สอดคล้องกับการหาค่าไม่ได้ของตัวส่วน เช่น

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ ซึ่ง } \cos x \text{ มีค่าเป็นศูนย์เมื่อ } x = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \text{ สำหรับจำนวนเต็ม } k \text{ ใด ๆ}$$

ทั้งนี้ ณ ตำแหน่ง x ที่หาค่าไม่ได้ จะมีเส้นกำกับแนวตั้ง (vertical asymptote) คอยกำกับกราฟอยู่ ดังภาพ (เส้นประ)

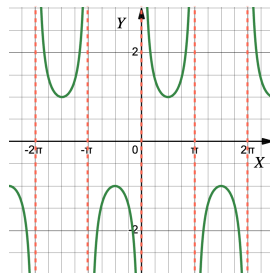


$f(x) = \tan x$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

คาบ = π

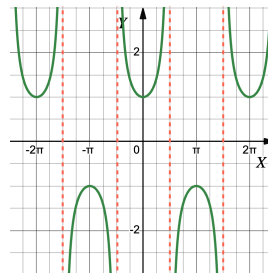


$f(x) = \csc x$

$$D_f = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

คาบ = 2π

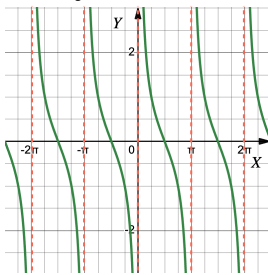


$f(x) = \sec x$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$R_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

คาบ = 2π



$f(x) = \cot x$

$$D_f = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

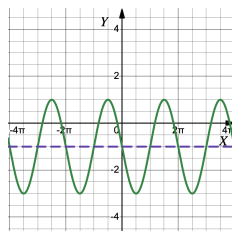
คาบ = π

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 วิเคราะห์ $f(x) = 2 \sin(x + \pi) - 1$

วิธีทำ กราฟของฟังก์ชันนี้

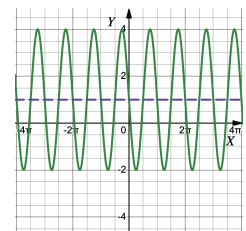
- Amplitude = 2
- คาบ = $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$
- Phase shift = $-\pi$
- Domain $D_f = \mathbb{R}$
- Range $R_f = [-3, 1]$
- เส้น midline คือ $y = -1$



ตัวอย่างที่ 2 วิเคราะห์ $f(x) = -3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

วิธีทำ กราฟฟังก์ชัน $f(x) = \cos x$

- Amplitude = 3
- คาบ = $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- Phase shift = $\pi/2$
- Domain $D_f = \mathbb{R}$
- Range $R_f = [-2, 4]$
- เส้น midline คือ $y = 1$



ตัวอย่างที่ 3 หาโดเมนของ $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

วิธีทำ $f(x) = \tan x$ คำนวณค่าไม่ได้เมื่อ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม k ดังนั้น จากฟังก์ชัน ได้เงื่อนไขว่า

$$2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ จึงได้ว่า } x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } k$$

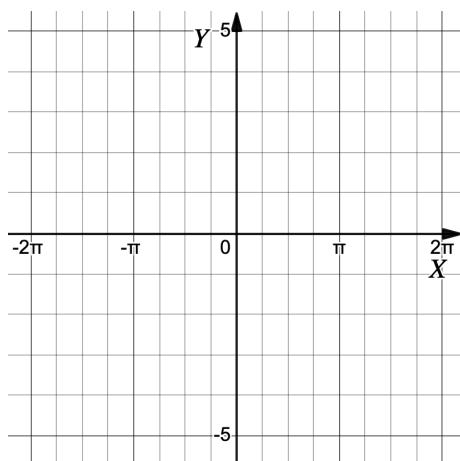
$$\text{เพราะฉะนั้น Domain} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 วิเคราะห์กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์และโคไซน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

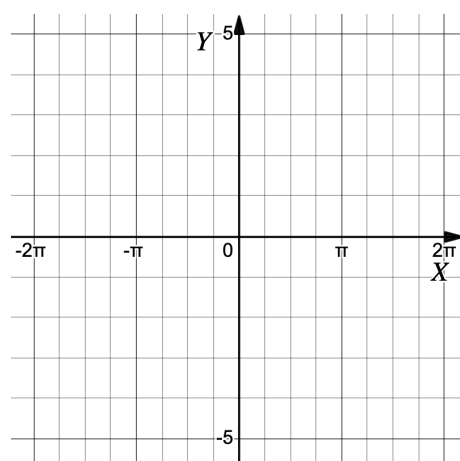
ฟังก์ชัน	Amplitude	คาบ	Phase shift	Midline
$f(x) = 2 \sin x$				
$f(x) = \cos x - 3$				
$f(x) = 3 \sin(2x)$				
$f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$				
$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$				
$f(x) = -3 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$				
$f(x) = \cos(3x - \pi) - 1$				

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ร่างกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

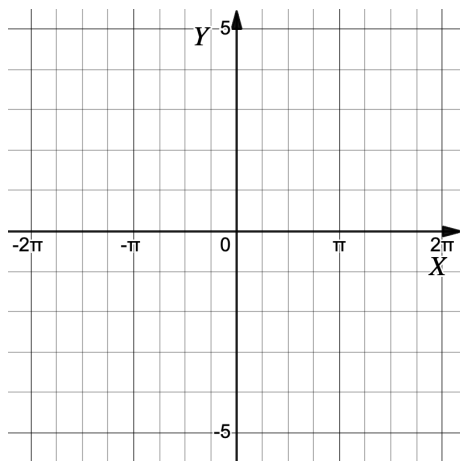
1 $f(x) = 2 \cos x$



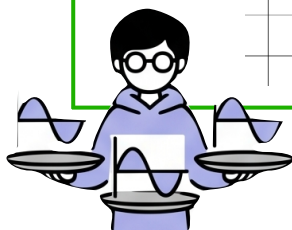
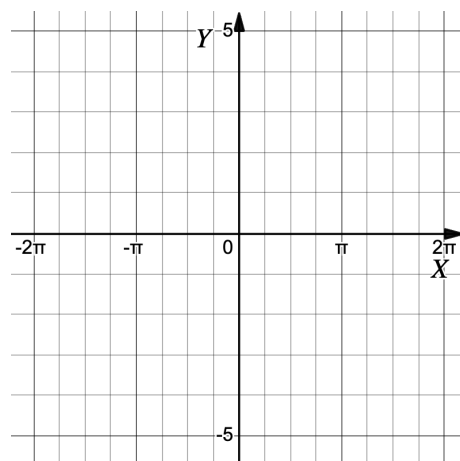
2 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



3 $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + 1$



4 $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$





วันที่ 26 เวกลักษณะตรีโกณมิติที่สำคัญ

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 5

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สารสำคัญ

- เวกลักษณะตรีโกณมิติพื้นฐาน $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ นอกจากนี้ยังได้เอกลักษณ์เพิ่มเติม
นำ $\sin^2 \theta$ หาทิ้งสมการ ได้ $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ นำ $\cos^2 \theta$ หาทิ้งสมการ ได้ $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$
- เวกลักษณะเกี่ยวกับผลบวก

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$
- เวกลักษณะเกี่ยวกับมุมสองเท่า $\sin(2A) = 2 \sin A \cos A$

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$$

$$\tan(2A) = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}, \quad 1 - \tan^2 A \neq 0$$
 หรือเราใช้เอกลักษณ์ $\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$ และ $\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$
- เวกลักษณะเกี่ยวกับผลคูณกับผลบวก

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 จักรูป $\sin^4 x$ ให้อยู่ในรูปที่ไม่มีเลขชี้กำลังมากกว่า 1

วิธีทำ ใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\begin{aligned} \text{ได้ว่า } \sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 \\ &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}}{4} \\ &= \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 เขียน $\sin^2 x \cos^2 x$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

วิธีทำ ในที่นี้จะจัดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^2 x &= (\sin x \cos x)^2 \\ &= \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 \\ &= \frac{\sin^2 2x}{4} \\ &= \frac{1 - \cos 4x}{8} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 เขียน $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ
$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

ตัวอย่างที่ 4 เขียน $\sin 3x \sin 5x$ ให้อยู่ในรูปผลบวก

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \sin 3x \sin 5x &= \frac{1}{2} [\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(-2x) - \cos 8x] \\ &= \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 8x] \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 เขียน $\sin^4 x + \cos^4 x$ ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1^2 - 2 \left(\frac{1 - \cos 4x}{8} \right) \\ &= 1 - \frac{1 - \cos 4x}{4} \\ &= \frac{3 + \cos 4x}{4} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่า $\sin(75^\circ)$

วิธีทำ เนื่องจาก $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

บททวนความเข้าใจ 1 จักรูปตรีโกณมิติให้อยู่ในรูปตรีโกณมิติที่มีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง หรือ ผลบวกของกำลังหนึ่ง

1 $\cos^4 x$

② $\sin^6 x$

③ $\cos^3 x \sin x$

④ $\sin^3 x \cos x$

5 $\cos^2 x \sin^4 x$

⑥ $\sin^6 x - \cos^6 x$

⑦ $\cos(x) \sin(3x)$

⑧ $\cos(2x) \sin(4x)$

ทบทวนความเข้าใจ 2 ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\textcircled{1} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

② $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x$

$$\textcircled{3} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos 2x}$$

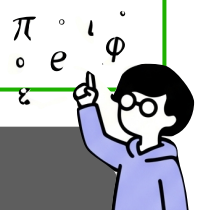
$$\textcircled{4} \quad \frac{\tan x}{1 + \sec x} + \frac{1 + \sec x}{\tan x}$$

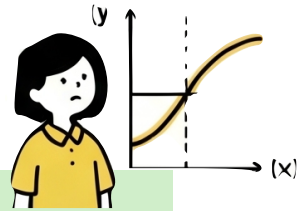
$$\textcircled{5} \frac{1}{1 - \sin x} - \frac{1}{1 + \sin x}$$

⑥ $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x$

⑦ $\sin(150^\circ)$

8 $\cos(135^\circ)$





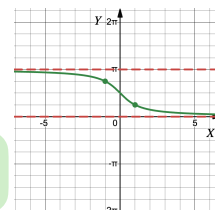
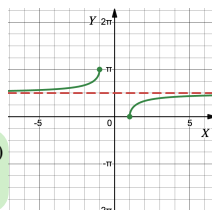
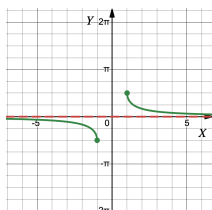
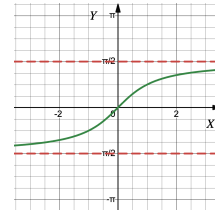
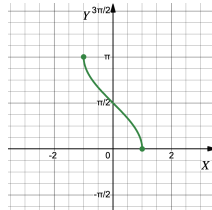
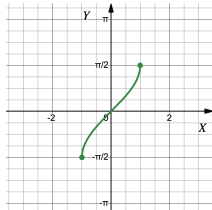
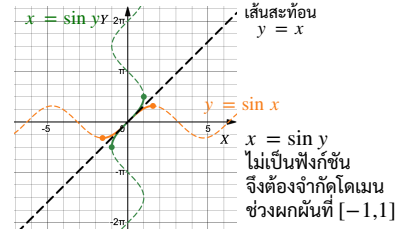
วันที่ 27 ฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 5

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน
- เราเขียนตัวผกผันตรีโกณมิติได้ เช่น $y = \sin x$ มีตัวผกผันคือ $y = \sin^{-1} x$ (ไม่ได้หมายถึง $\frac{1}{\sin x}$) กล่าวคือ $y = \sin^{-1} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sin y$ และฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นพิจารณาได้ในการทำงานเดียวกัน
- เมื่อมีการกำหนดโดเมนที่เหมาะสม จะพิจารณาฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ ดังนี้



- การคำนวณค่าฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ จะต้องพิจารณาโดเมนของฟังก์ชันประกอบด้วย โดยค่าของฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติต้องเป็นจำนวนจริง (ไม่ใช่ค่ามุมเป็นองศา)

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 คำนวณค่า $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ ได้ว่า $\cos \theta = \frac{1}{2}$
หา θ ในช่วงเรนจ์ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ที่ทำให้ $\cos \theta = \frac{1}{2}$
พบว่า ในช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ มี $\theta = \frac{\pi}{3}$ ที่ทำให้ $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
เพราะฉะนั้น $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

ตัวอย่างที่ 2 คำนวณค่า $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\theta = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ได้ว่า $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
ในช่วงเรนจ์ มี $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ที่ทำให้ $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
เพราะฉะนั้น $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

ตัวอย่างที่ 3 คำนวณค่า $\arctan(-1)$

วิธีทำ ให้ $\theta = \arctan(-1)$ ได้ว่า $\tan \theta = -1$
หา θ ในช่วงเรนจ์ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ที่ทำให้ $\tan \theta = -1$
พบว่า ในช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ มี $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ที่ทำให้ $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$ เพราะฉะนั้น $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

ตัวอย่างที่ 4 คำนวณค่า $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$

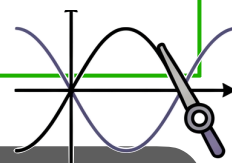
วิธีทำ ให้ $\theta = \arccos\frac{3}{5}$ จะได้ว่า $\cos \theta = \frac{3}{5}$
กรณีนี้สร้างรูปสามเหลี่ยมฉาก ซึ่งได้ว่า $\sin \theta = \frac{4}{5}$

ตัวอย่างที่ 5 คำนวณค่า $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$

วิธีทำ ให้ $\theta = \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)$ จะได้ว่า $\sin \theta = -\frac{5}{13}$
เนื่องจาก $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ และ $\sin \theta < 0$
มุม θ จึงตกในจุดภาคที่สี่ นั่นคือ $\tan \theta = -\frac{5}{12}$
ฉะนั้น $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right) = -\frac{5}{12}$

ตัวอย่างที่ 6 คำนวณค่า $\arccos(\sin(0))$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin 0 = 0$ ดังนั้นพิจารณา $\arccos 0$
หา θ ในช่วงเรนจ์ $[0, \pi]$ ที่ทำให้ $\cos \theta = 0$
พบว่า $\theta = \frac{\pi}{2}$
(ถึงแม้ว่า $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ แต่เนื่องจากเรนจ์คือ $[0, \pi]$
 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ จึงไม่เป็นคำตอบ)



ช่วงที่ 6

เนื้อหาเบ็ดเตล็ดอื่น ๆ ที่จำเป็นในแคลคูลัส



วันที่ 28 สังยุคของราก

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3-4

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- **สังยุค** (conjugate) ของราก เป็นการจับคู่ที่เปลี่ยนเครื่องหมายกลางของพจน์ที่มีการบวกกันมากกว่าสองพจน์ เช่น สังยุคของ $a + \sqrt{b}$ คือ $a - \sqrt{b}$ สังยุคของ $\sqrt{x} - y$ คือ $\sqrt{x} + y$
- โดยทั่วไป เรามักใช้สังยุคช่วยในการจัดรูปพจน์ให้อยู่ในรูปที่คำนวณค่าง่ายขึ้น เช่น ทำให้ตัวส่วนไม่อยู่ในรูปติดราก (rationalization) โดยมีเอกลักษณ์พีชคณิตช่วย เช่น ผลต่างกำลังสอง กล่าวคือ สังยุคของ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ คือ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ซึ่งพบว่า $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$ ดังนั้น รูปที่สมมูลกับพจน์ $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ หาได้จาก $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$
- บางครั้งเราอาจใช้เอกลักษณ์อื่น เช่น ผลบวกกำลังสาม หรือ ผลต่างกำลังสามช่วยได้ เช่น สำหรับพจน์ $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ เราคูณพจน์นี้ด้วย $(\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}b + (\sqrt[3]{b})^2$ เพื่อให้ได้ว่า $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}b + (\sqrt[3]{b})^2 = a + b$
- กรณีของจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a + bi$ สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน คือ $a - bi$ เมื่อ i คือส่วนจินตภาพ ($i^2 = -1$) เช่น สังยุคของ $3 + 4i$ คือ $3 - 4i$ ทั้งนี้ $(3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 - (4i)^2 = 9 - 16(-1) = 25$ สังยุคของ $-2i$ คือ $2i$ ทั้งนี้ $(-2i)(2i) = -4i^2 = 4$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 ทำ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดราก

วิธีทำ คูณ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ทั้งเศษและส่วนด้วย $\sqrt{2}$ ได้ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2 ทำ $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดราก

วิธีทำ สังยุคของ $2 + \sqrt{3}$ คือ $2 - \sqrt{3}$

คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $2 - \sqrt{3}$ ได้ว่า

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 3 ทำ $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$ ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดราก

วิธีทำ สังยุคของ $\sqrt{3} - 1$ คือ $\sqrt{3} + 1$

คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $\sqrt{3} + 1$ ได้ว่า

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 4 ทำ $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดราก

วิธีทำ สังยุคของ $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ คือ $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ ได้ว่า

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{\sqrt{10} + 2 + \sqrt{15} + \sqrt{6}}{3}$$

ตัวอย่างที่ 5 ทำ $\frac{1}{\sqrt[3]{3} + 2}$ ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดราก

วิธีทำ ใช้พจน์ $(\sqrt[3]{3})^2 - 2\sqrt[3]{3} + 2^2$ คูณทั้งเศษและส่วน ทำให้ $(\sqrt[3]{3} + 2)((\sqrt[3]{3})^2 - 2\sqrt[3]{3} + 2^2) = (\sqrt[3]{3})^3 + 2^3$

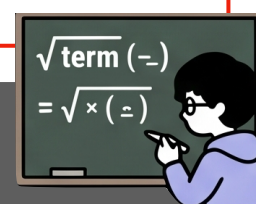
ได้ว่า
$$\frac{1}{\sqrt[3]{3} + 2} \times \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - 2\sqrt[3]{3} + 2^2}{(\sqrt[3]{3})^2 - 2\sqrt[3]{3} + 2^2} = \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - 2\sqrt[3]{3} + 2^2}{(\sqrt[3]{3} + 2)((\sqrt[3]{3})^2 - 2\sqrt[3]{3} + 2^2)} = \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - 2\sqrt[3]{3} + 2^2}{(\sqrt[3]{3})^3 + 2^3} = \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - 2\sqrt[3]{3} + 2^2}{3 + 8} = \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - 2\sqrt[3]{3} + 2^2}{11}$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 หาสังยุคของพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

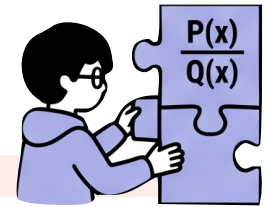
พจน์ที่กำหนด	สังยุค
$3 + \sqrt{5}$	
$\sqrt{7} - 2$	
$5 - 2\sqrt{3}$	
$\sqrt{2} + \sqrt{3}$	
$\sqrt{6} - \sqrt{5}$	
$4 + 3i$	
$-2 - 5i$	
$i - 2$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้ตัวส่วนไม่ติดราก

❶ $\frac{3}{\sqrt{5}}$	❷ $-\frac{7}{2\sqrt{3}}$
❸ $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$	❹ $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$
❺ $\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$	❻ $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$
❼ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$	❽ $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
❾ $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$	❿ $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+2}$



$$\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-1} \cdot \frac{2\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}+1} = \frac{3\sqrt{5}(2\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{5}^2-1^2} = \frac{3\sqrt{5}(2\sqrt{5}+1)}{20-1} = \frac{3\sqrt{5}(2\sqrt{5}+1)}{19}$$



วันที่ 29 เศษส่วนของพหุนาม

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4

วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- สำหรับจำนวนนับ **ขั้นตอนวิธีการหาร** (division algorithm) กล่าวว่า ตัวตั้ง = ตัวหาร $\times$ ผลหาร + เศษ
เช่น เมื่อนำ 18 หารด้วย 7 ได้ผลหารคือ 2 มีเศษคือ 4 เราจะเขียนได้ในรูป $18 = 7 \times 2 + 4$
- สำหรับพหุนาม หากนำพหุนามมาหารด้วยพหุนาม เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ในทำนองเดียวกัน
- การหารพหุนามด้วยพหุนาม จะใช้วิธีการตั้งหารยาวพหุนาม ดังขั้นตอนต่อไปนี้
 - เรียงพหุนามตามกำลังจากมากไปน้อย (พจน์ใดไม่มีตัวแปร ให้เขียนเว้นพจน์นั้นไว้)
 - นำพจน์หน้าสุดของตัวตั้งไปหารพจน์หน้าสุดของตัวหาร
 - คูณผลลัพธ์ที่ได้กลับไปทั้งตัวหาร
 - ลบแล้วดึงพจน์ถัดลงมา
 - ทำซ้ำจนกว่าดีกรีจะน้อยกว่าตัวหาร

- เศษส่วนของพหุนาม** คือพจน์ที่เขียนได้ในรูป $\frac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่ $Q(x) \neq 0$ (เขียนในรูปฟังก์ชันตรรกยะ) ทั้งนี้ เรามักเขียน

เศษส่วนของพหุนามให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

$$\text{เช่น ผลสำเร็จของ } \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} \times \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x} = \frac{(x-1)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \times \frac{x(x+3)}{x(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

- เพื่อบวก - ลบ เศษส่วนของพหุนาม จะใช้ ค.ร.น. ของพหุนาม โดยพิจารณาจากรูปตัวประกอบของพหุนาม
- เมื่อทำเศษส่วนของพหุนามให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ โดเมนของฟังก์ชันเศษส่วนพหุนามเดิมกับพหุนามในรูปผลสำเร็จ อาจไม่เท่ากัน เมื่อถามถึงโดเมนของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะต้องพิจารณาโดเมนของฟังก์ชันก่อนจัดรูปเสมอ

$$\text{เช่น ถ้ากำหนด } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} \times \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x} \text{ และ } g(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

$$\text{จะได้ว่า } D_f = \mathbb{R} - \{-3, -2, 1\} \text{ ในขณะที่ } D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 หาร $x^3 - 2x^2 + 4$ ด้วย $x - 1$

วิธีทำ ตั้งหารยาวได้ว่า

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 1 \\ x-1 \overline{) x^3 - 2x^2 + 0x + 4} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -x^2 + 4 \\ \underline{-x^2 + x} \\ -x + 4 \\ \underline{-x + 1} \\ 3 \end{array}$$

ได้ผลหารคือ $x^2 - x - 1$ มีเศษคือ 3 กล่าวคือ

$$x^3 - 2x^2 + 4 = (x-1)(x^2 - x - 1) + 3$$

อธิบายขั้นตอน

- เขียนพหุนามเรียงพจน์ (ไม่มีพจน์ x ให้เว้นไว้)
- นำ x ไปหาร x^3 ได้ x^2 จากนั้นนำ x^2 กลับไปคูณ $x - 1$ ได้พจน์ $x^3 - x^2$
- นำพหุนามตัวตั้งไปลบออกจาก $x^3 - x^2$ ได้ $-x^2 + 4$
- ดึงพจน์ที่เหลือลงมา (ในที่นี้คือ $+4$)
- นำ x ไปหาร $-x^2$ ได้ $-x$ แล้วนำ $-x$ กลับไปคูณ $x - 1$ ได้พจน์ $x^2 + x$ นำไปลบจาก $-x^2 + 4$ ได้ $-x + 4$
- นำ x ไปหาร $-x$ ได้ -1 แล้วนำ -1 กลับไปคูณ $x - 1$ ได้พจน์ $-x + 1$ นำไปลบจาก $-x + 4$ ได้ 3
- เนื่องจากดีกรีที่ได้ต่ำกว่าดีกรีตัวหาร จึงหยุดหารพหุนาม

ตัวอย่างที่ 2 ทำ $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ แยกตัวประกอบได้ว่า

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+3}{x-2}$$

ทั้งนี้ ถ้าให้ $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$ และ $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$

จะพบว่า $D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

ในขณะที่ $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

ตัวอย่างที่ 3 ทำ $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{2x}{x^2 - 4}$ ในรูปผลสำเร็จ

วิธีทำ แยกตัวประกอบได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{2x}{x^2 - 4} &= \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} + \frac{2x}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x+1}{x-2} + \frac{2x}{(x-2)(x+2)} \\ (\text{หา ค.ร.น. ของตัวส่วน}) &= \frac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{2x}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{(x+1)(x+2) + 2x}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x^2 + 5x + 2}{(x-2)(x+2)} \end{aligned}$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ทำเศษส่วนพหุนามต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปร่างง่าย

เศษส่วนพหุนาม	รูปร่างง่าย
$\frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$	
$\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 4x - 5}$	
$\frac{2x^2 - 8x}{x^2 - 4}$	
$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$	
$\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2}$	
$\frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1}$	
$\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$	
$\frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x-1}$	
$\frac{x^2-9}{x^2-x-6} \div \frac{x-3}{x+2}$	
$\frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x}$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ตั้งหารยาวพหุนามที่กำหนดให้ ด้วยพหุนาม

❶ หารพหุนาม $x^2 + 4x + 2$ ด้วย $x + 1$	❷ หารพหุนาม $2x^2 - 5x + 3$ ด้วย $x - 2$
❸ หารพหุนาม $x^3 - 4x^2 + x + 6$ ด้วย $x - 1$	❹ หารพหุนาม $2x^3 + x^2 - 7x - 3$ ด้วย $x + 1$
❺ หารพหุนาม $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$ ด้วย $x - 1$	❻ หารพหุนาม $2x^4 + x^3 + 3x - 2$ ด้วย $x^2 + 2$





วันที่ 30 กราฟของอสมการสองตัวแปร

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 - 5

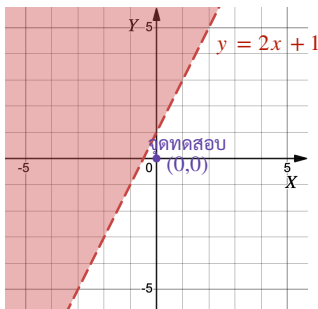
วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สำคัญ

- ความสัมพันธ์บางความสัมพันธ์มีกราฟเป็นบริเวณในระนาบยูคลิด (ระนาบ $\mathbb{R}^2$) โดยทั่วไปมักเป็นความสัมพันธ์ที่มีเงื่อนไขเป็นอสมการสองตัวแปร
- ขั้นตอนในการพิจารณาบริเวณที่แสดงกราฟของอสมการ มีดังนี้
 1. หาเส้นขอบของบริเวณ จากเงื่อนไขที่ระบุในสมการ
 2. เส้นขอบอาจเป็นเส้นประ เมื่ออสมการมีเครื่องหมาย < หรือ >
หรือ เส้นขอบอาจเป็นเส้นทึบ เมื่ออสมการมีเครื่องหมาย $\leq$ หรือ $\geq$
 3. เส้นขอบจะแบ่งบริเวณเป็นส่วน ๆ เราเลือกจุดตัวแทนในบริเวณดังกล่าว หากจุดตัวแทนทำให้อสมการนั้นเป็นจริง แสดงว่า บริเวณที่เลือกตัวแทนมา เป็นบริเวณของอสมการที่กำหนด
- โดยทั่วไป มักเลือกจุดที่ง่ายต่อการพิจารณา เช่น $(0,0)$ กรณีที่เส้นขอบแบ่งบริเวณออกเป็นสองบริเวณ เราอาจใช้จุดเดียวทดสอบได้ หากสอดคล้องกับอสมการ แสดงว่าเลือกบริเวณนั้น หากไม่สอดคล้อง จะเลือกบริเวณตรงข้าม
- การเลือกบริเวณ มีเงื่อนไขกำกับ เช่น เงื่อนไขหรือ นำบริเวณมายูเนียนกัน ($\cup$) เงื่อนไขและ นำบริเวณมาตัดกัน ($\cap$)

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

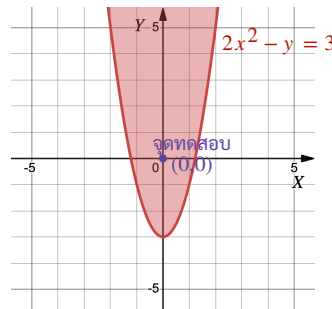
ตัวอย่างที่ 1 วาดกราฟความสัมพันธ์
 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2x + 1\}$



อธิบายขั้นตอน

1. $y = 2x + 1$ เป็นเส้นขอบ
2. เครื่องหมาย > ขอบเป็นเส้นประ
3. เลือกจุดทดสอบ $(0,0)$ พบว่า $0 \ngtr 2(0) + 1$ แสดงว่าต้องเลือกบริเวณที่ไม่รวมจุด $(0,0)$

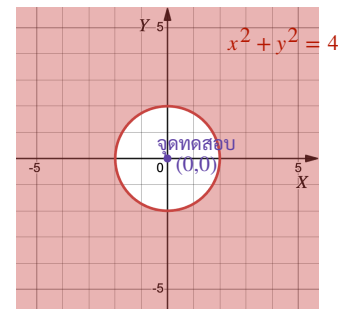
ตัวอย่างที่ 2 วาดกราฟความสัมพันธ์
 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - y \leq 3\}$



อธิบายขั้นตอน

1. $2x^2 - y = 3$ เป็นเส้นขอบ
2. เครื่องหมาย $\leq$ ขอบเป็นเส้นทึบ
3. เลือกจุดทดสอบ $(0,0)$ พบว่า $2(0) - 0 = 0 \leq 3$ แสดงว่าต้องเลือกบริเวณที่รวมจุด $(0,0)$

ตัวอย่างที่ 3 วาดกราฟความสัมพันธ์
 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$



อธิบายขั้นตอน

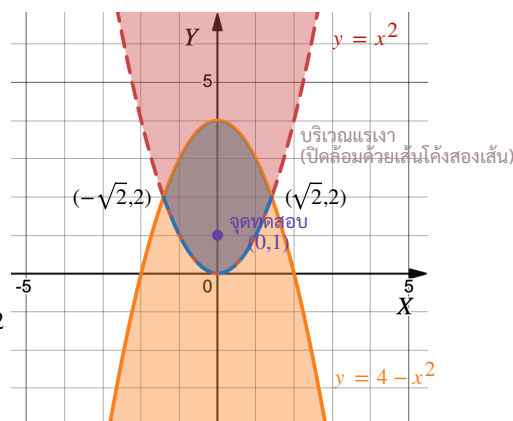
1. $x^2 + y^2 = 4$ เป็นเส้นขอบ
2. เครื่องหมาย $\geq$ ขอบเป็นเส้นทึบ
3. เลือกจุดทดสอบ $(0,0)$ พบว่า $0^2 + 0^2 = 0 \ngtr 4$ แสดงว่าต้องเลือกบริเวณที่ไม่รวมจุด $(0,0)$

ตัวอย่างที่ 5 วาดกราฟความสัมพันธ์

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 \text{ และ } y \leq 4 - x^2\}$$

จุดตัดของกราฟสองเส้น
หาได้จากระบบสมการ
 $y = x^2$ และ $y = 4 - x^2$
นั่นคือ $x^2 = 4 - x^2$
หรือได้ว่า $2x^2 = 4$
กล่าวคือ $x = \pm \sqrt{2}$

เมื่อ $x = \sqrt{2}$ ได้ว่า $y = 2$
และ เมื่อ $x = -\sqrt{2}$ ได้ว่า $y = 2$
ได้จุดตัดคือ $(-\sqrt{2}, 2), (\sqrt{2}, 2)$

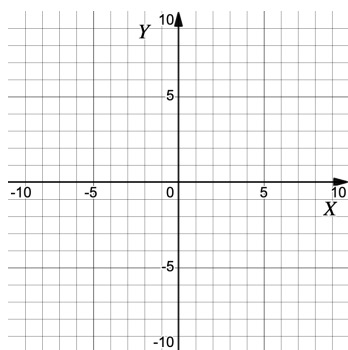


อธิบายขั้นตอน

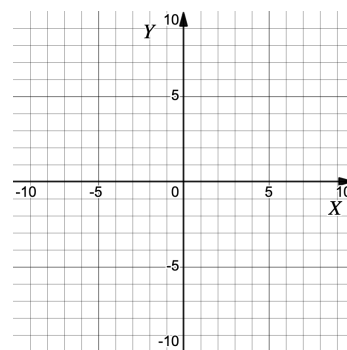
1. $y = x^2$ และ $y = 4 - x^2$ เป็นเส้นขอบ แบ่งบริเวณเป็นสามส่วน
2. อสมการ $y > x^2$ เป็นเส้นประ เลือกจุด $(0,1)$ สอดคล้องกับอสมการ (ปิดล้อมด้วยพาราโบลา)
3. อสมการ $y \leq 4 - x^2$ เป็นเส้นทึบ เลือกจุด $(0,1)$ สอดคล้องกับอสมการ (ปิดล้อมด้วยพาราโบลา)
4. จึงเลือกบริเวณที่รวมจุด $(0,1)$

ทบทวนความเข้าใจ วาดกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

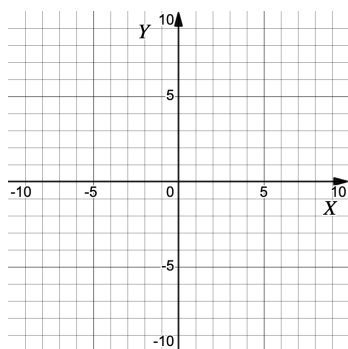
❶ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 2x + 3y > 1\}$



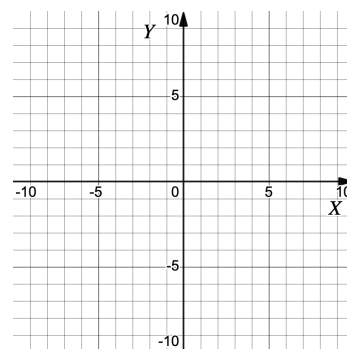
❷ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \leq 2x^2 + 4\}$



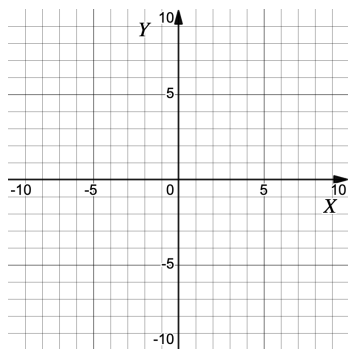
❸ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y + x^2 \geq 3\}$



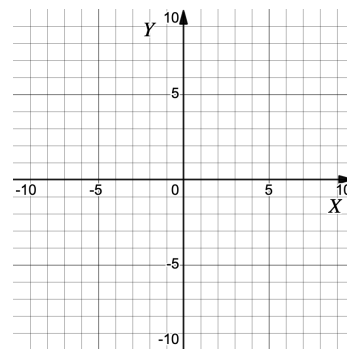
❹ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y > e^x - 1\}$



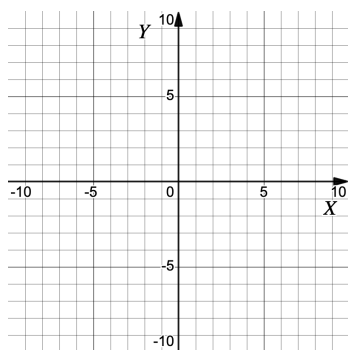
❺ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \leq \ln(x + 2)\}$



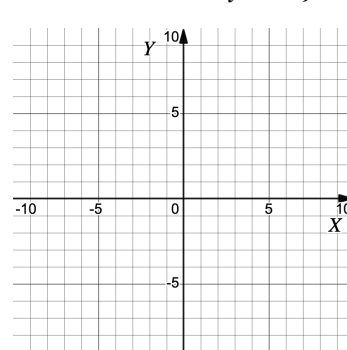
❻ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 4x^2 + 9y^2 > 36\}$



❼ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 9 \text{ และ } y \geq 1\}$

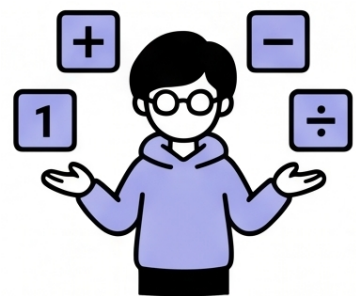


❽ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y < -1 \text{ และ } 2x - y \geq 2\}$



แบบทดสอบหลังเรียน

ตรวจสอบความเข้าใจด้วยแบบฝึกหัดรวม



กติกา

1. แบบทดสอบหลังเรียน มีจำนวน 30 ข้อ ใช้เวลาทำ 60 นาที
2. ขอให้ใช้ความพยายามให้เต็มที่ในการทำแบบทดสอบชุดนี้ เพื่อสะท้อนผลการเรียนรู้
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องมือช่วย อาทิ เครื่องคำนวณ โทรศัพท์มือถือ ปัญญาประดิษฐ์ ระหว่างทำแบบทดสอบหรือเปิดหนังสืออื่นใด เพื่อให้แบบทดสอบฉบับนี้สะท้อนความสามารถที่แท้จริงของผู้อ่าน

ถ้าพร้อมแล้ว ลงมือทำได้เลย !

แบบทดสอบหลังเรียน (ใช้เวลาทำ 1 ชั่วโมง)

คำชี้แจง เติมคำตอบลงในช่องว่าง

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	$3 \times 4 - 9 \div 3 - 2(3 + 1)^2 =$	
2	$\frac{7}{8} \div \frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) =$	
3	$\frac{(20^{-1} \times 2^3)^2 \times 5^2}{2^{-3} \times 10^{-2}}$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวกได้เป็น	
4	$\frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{20}}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{30}}$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
5	กำหนด $3(x - 4) - 4(x - 2) = 4x - 19$ แก้สมการจะได้ $x =$	
6	$(3x - 2)(x + 5) - (x^2 - 3x + 4)$ ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะได้	
7	$(2x - 1)^2 - (3x + 2)^2$ ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะได้	
8	$(4x^2 - 23x - 6)$ แยกตัวประกอบได้เป็น	
9	กำหนด $8x^2 + 2x - 3 = 0$ แก้สมการจะได้ $x =$	
10	กำหนด $ 3x - 2 \geq 11$ แก้สมการจะได้ช่วงของคำตอบคือ	
11	กำหนด $f(x) = x^2 - 3x + 4$ จะได้ $f(-2) =$	
12	กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 2x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$ จะได้ $f(-2) + f(2) - f(3) =$	
13	กำหนด $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 2x$ จะได้ $f(g(-2)) =$	
14	กำหนด $f(x) = 2x + 5$ เมื่อ $x \geq 0$ จะได้ว่าฟังก์ชันผกผันของ f คือ	
15	สมการของเส้นตรงที่มีความชัน -2 และผ่านจุด $(-1, 2)$ คือ	
16	วาดกราฟของ $f(x) = (x + 1)^2 - 2$	

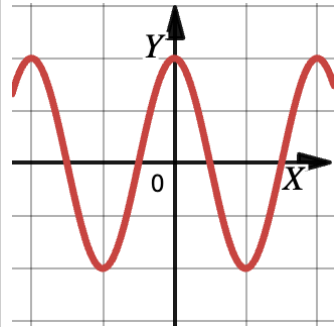
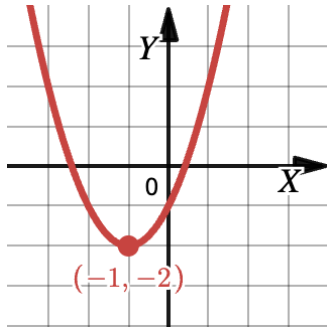
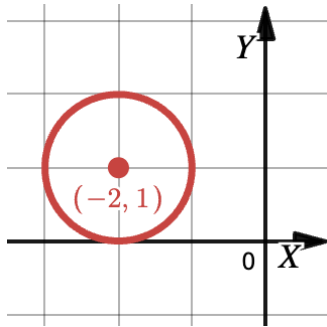
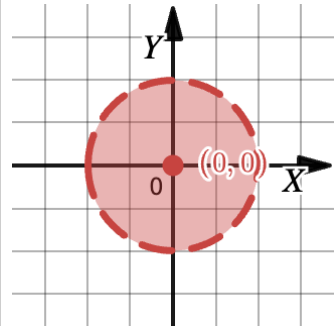
ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
17	สมการ $x + y^2 = 1$ มีกราฟเป็น	
18	กำหนด $x + 2y = 7$ $3x - y = 7$ แก้ระบบสมการ จะได้ $x = \dots, y = \dots$	
19	วาดกราฟของ $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$	
20	กำหนด $5^{2x+1} = 125$ จะได้ $x =$	
21	$3 \log_3(9) - 6 \log_3(\sqrt{3})$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
22	กำหนด $\log_3(x - 1) = 9$ จะได้ $x =$	
23	$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
24	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
25	วาดกราฟของ $f(x) = 2 \cos x$	
26	$\sin^4 x$ จัดให้อยู่ในรูปตรีโกณมิติที่มีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่งได้เป็น	
27	$\arccos(-1) =$	
28	พจน์ $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ เมื่อทำให้ตัวส่วนไม่มีรากจะได้	
29	เมื่อหาร $2x^2 - 3x + 7$ ด้วย $x - 2$ จะได้ผลหารคือ และเศษคือ	
30	วาดกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 < 4\}$	

ตรวจคำตอบได้ที่หน้า 80

คะแนน Pre-test ที่ได้

คะแนน Post-test ที่ได้

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน (เฉพาะคำตอบ)

1	-29	11	14	21	3
2	$\frac{8}{3}$	12	2	22	$x = 3^9 + 1 = 19684$
3	$3200 = 2^7 \times 5^2$	13	17	23	$\frac{5}{4}$
4	$\frac{6}{5}$	14	$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}, x \geq 5$	24	$-\frac{3}{4}$
5	$x = 3$	15	$y = -2x$	25	
6	$2x^2 + 16x - 14$	16		26	$\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$
7	$-5x^2 - 16x - 3$	17	พาราโบลา	27	π
8	$(4x + 1)(x - 6)$	18	$x = 3, y = 2$	28	$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$
9	$x = \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$	19		29	ผลหาร = $2x + 1$, เศษ = 9
10	$(-\infty, -3] \cup [\frac{13}{3}, \infty)$	20	$x = 1$	30	

ประวัติผู้เขียน



ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี
Asst. Prof. Supanut Chaidee, Sc.D.

ประวัติการศึกษา

ระดับมัธยมศึกษา	พ.ศ.2550	โรงเรียนมงฟอร์ตวิทยาลัย จ.เชียงใหม่
ระดับมัธยมศึกษา	พ.ศ.2554	วท.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยมอันดับ 1 มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ระดับปริญญาตรี	พ.ศ.2556	วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ระดับปริญญาโท	พ.ศ.2560	Doctor of Mathematical Sciences, Meiji University, Japan
นักศึกษาโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) พ.ศ. 2551 - 2560		

ประวัติการทำงาน

พ.ศ.2560 - 2563	อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ.2563 - ปัจจุบัน	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ.2564 - ปัจจุบัน	ผู้ช่วยคณบดี คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ความสนใจด้านงานวิจัย

การจำลองเชิงเรขาคณิต (Geometric Modeling) เรขาคณิตวิฤตและเรขาคณิตเชิงคำนวณ (Discrete and Computational Geometry) คณิตศาสตร์การคำนวณ (Computational Mathematics)

เว็บไซต์ส่วนตัว <https://www.schaidee.com> และ <https://geomlab.wordpress.com>



รองศาสตราจารย์ ดร.สมลักษณ์ อุดูดี
Assoc. Prof. Somlak Utudee, Ph.D.

ประวัติการศึกษา

ระดับมัธยมศึกษา	พ.ศ.2536	โรงเรียนลำปางกัลยาณี จ.ลำปาง
ระดับปริญญาตรี	พ.ศ.2540	วท.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยมอันดับ 1 มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ระดับปริญญาโท	พ.ศ.2543	วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ระดับปริญญาเอก	พ.ศ.2548	วท.ด. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
นักศึกษาโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) พ.ศ. 2536 - 2548		

ประวัติการทำงาน

พ.ศ.2548 - 2558	อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ.2558 - 2563	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ.2563 - ปัจจุบัน	รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ.2555 - 2563	ประธานหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ความสนใจด้านงานวิจัย

คณิตวิเคราะห์ (Mathematical Analysis)

30 DAYS DAILY STEPS TO CALCULUS



ภาพปก

อ่างแก้ว มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
เป็นภาพจำที่ทุกคนคุ้นเคยในฐานะจุดหมายสำคัญหนึ่งของเชียงใหม่
นักศึกษาใหม่ปีหนึ่งคงต้องแวะมาเยือนเมื่อมาถึงมหาวิทยาลัยเชียงใหม่
จึงเปรียบเสมือนภาพแห่งความสวยงามของการเรียนระดับอุดมศึกษาเมื่อมาถึง

ถึงแม้จะเห็นภาพความสวยงามเมื่อแรกมาถึง
แต่ความสวยงามนี้ เป็นเพียงการเริ่มต้นการเดินทางในการศึกษา
การเริ่มต้นที่ดี ย่อมจะนำมาซึ่งความสดในและราบรื่นในอนาคต

หนังสือ 30 Days: Daily Step to Calculus

30 วัน วันละนิด ปรับทัศนคติสู่แคลคูลัส

เป็นหนังสือที่สรุปประเด็นสำคัญของคณิตศาสตร์พื้นฐาน
ที่จำเป็นสำหรับการเรียนแคลคูลัส ตั้งแต่เลขคณิต พีชคณิต
ฟังก์ชัน ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ และหัวข้อสำคัญต่าง ๆ แยกย่อย 30 หัวข้อ
เพื่อให้เหมาะสมกับการทบทวนวันละ 1 คู่หน้า

ไม่ว่าผู้อ่านจะเป็นนักเรียนที่กำลังก้าวสู่รั้วมหาวิทยาลัย
หรือนักศึกษาที่ต้องการทบทวนพื้นฐาน
หนังสือเล่มนี้จะช่วยให้ผู้อ่านสร้างความมั่นใจ
เติมเต็มช่องว่างทางความรู้ และเตรียมความพร้อมสำหรับการเรียนแคลคูลัสได้อย่างมั่นคง

เพราะทุกการเดินทางที่ยิ่งใหญ่ ล้วนเริ่มต้นจากก้าวเล็ก ๆ ในแต่ละวัน



หนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
จัดทำและเผยแพร่เพื่อประโยชน์ทางการศึกษาในวงกว้าง
ไม่อนุญาตให้นำไปใช้เชิงพาณิชย์ก่อนได้รับอนุญาตจากผู้เขียน