30 DAYS DAILY STEPS TO CALCULUS

30 วัน วันละนิด ปรับพื้นคณิตสู่แคลคูลัส

ศุภณัฐ ชัยดี
สมลักษณ์ อุตุดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

CMU CHIANG MAI UNIVERSITY
MATH diversity@CMU
FACULTY OF SCIENCE CHIANG MAI UNIVERSITY

30 วัน วันละนิด

ปรับพื้นคณิตสู่แคลคูลัส

30 Days : Daily Steps to Calculus

โดย
ผศ.ดร.ศุภณัฐ ชัยดี
รศ.ดร.สมลักษณ์ อุตุดี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

หนังสือ “30 วัน วันละนิด ปรับพื้นคณิตสู่แคลคูลัส -- 30 Days : Daily Steps to Calculus”

จัดทำโดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ศุภณัฐ ชัยดี และ รองศาสตราจารย์ ดร.สมลักษณ์ อุตุดี
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
239 ถนนห้วยแก้ว ตำบลสุเทพ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ 50200

เผยแพร่ออนไลน์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
https://math.science.cmu.ac.th
เดือนพฤษภาคม พ.ศ.2569

ข้อคิดเห็นหรือข้อเสนอแนะ โปรดส่งมาได้ที่อีเมล supanut.c@cmu.ac.th

คำนำ

หนังสือ *"30 วัน วันละนิด ปรับพื้นคณิตสู่แคลคูลัส -- 30 Days : Daily Steps to Calculus"* เกิดจากประสบการณ์ของผู้เขียนในการสอนวิชาแคลคูลัสให้แก่นักศึกษาชั้นปีที่ 1 จากทั้งคณะวิทยาศาสตร์และคณะวิศวกรรมศาสตร์มาเป็นระยะเวลาหนึ่ง ผู้เขียนพบว่า ปัญหาหลักของผู้เรียนที่ไม่สามารถทำความเข้าใจแคลคูลัสได้นั้น ไม่ได้เกิดจากความยากของเนื้อหาแคลคูลัสโดยตรง หากแต่เกิดจากความไม่แข็งแรงของพื้นฐานคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต่อการเรียนในระดับดังกล่าว

ปัญหานี้น่าจะเป็นสิ่งที่พบได้ทั่วไปในหมู่นักเรียนนักศึกษาทั่วประเทศ สอดคล้องกับข้อสังเกตของอาจารย์ผู้สอนคณิตศาสตร์หลายท่าน และยิ่งทวีความรุนแรงขึ้นในช่วงการแพร่ระบาดของเชื้อไวรัสโคโรนา 2019 ซึ่งส่งผลให้สมรรถนะทางการเรียนของผู้เรียนถดถอยลง ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ได้พยายามแก้ไขปัญหาดังกล่าวหลากหลายแนวทาง เช่น การสอบวัดพื้นฐานคณิตศาสตร์ การจัดสอนทบทวนระยะสั้นก่อนเปิดภาคการศึกษา และการพัฒนาคอร์สออนไลน์เพื่อปรับพื้นฐาน อย่างไรก็ตาม ผลลัพธ์ยังไม่เป็นที่น่าพอใจนัก โดยสาเหตุหนึ่งอาจมาจากการเรียนรู้ที่ขาดความต่อเนื่องและสม่ำเสมอ

ด้วยเหตุนี้ ผู้เขียนจึงมีแนวคิดในการรวบรวมและสรุปสาระสำคัญของคณิตศาสตร์พื้นฐานที่จำเป็นต่อการศึกษาแคลคูลัสระดับมหาวิทยาลัย โดยมุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนอย่างต่อเนื่อง ผ่านการเขียนและการลงมือทำด้วยตนเอง ผู้เขียนเชื่อว่าการฝึกทักษะอย่างสม่ำเสมอ จะช่วยเสริมสร้างความเข้าใจในพื้นฐาน และเมื่อพื้นฐานมั่นคงแล้ว ผู้เรียนย่อมสามารถต่อยอดไปสู่แนวคิดที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นได้อย่างมีประสิทธิภาพ แนวทางการนำเสนอได้รับแรงบันดาลใจจากหนังสือเตรียมสอบคณิตศาสตร์ของประเทศญี่ปุ่น ซึ่งได้จัดลำดับเนื้อหา ตัวอย่าง และแบบฝึกหัดจากง่ายไปยากอย่างเป็นระบบ

หนังสือเล่มนี้แบ่งเนื้อหาออกเป็นระยะเวลา 30 วัน จัดเป็น 6 ช่วง ตามหัวข้อที่ผู้เรียนเคยศึกษาซึ่งเป็นพื้นฐานสำหรับการศึกษาในวิชาแคลคูลัสระดับมหาวิทยาลัย โดยอ้างอิงตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) และหนังสือเรียนของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้แก่

ช่วงที่ 1 จำนวนจริงและการดำเนินการเบื้องต้น
ช่วงที่ 2 พื้นฐานพีชคณิตเบื้องต้น
ช่วงที่ 3 ฟังก์ชันพื้นฐาน
ช่วงที่ 4 กราฟของฟังก์ชันและเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น
ช่วงที่ 5 ฟังก์ชันที่สำคัญในแคลคูลัส
ช่วงที่ 6 เนื้อหาเบ็ดเตล็ดอื่น ๆ ที่จำเป็นในแคลคูลัส

พร้อมแบบฝึกหัดระคนเพื่อทบทวนความเข้าใจ

เนื้อหาในแต่ละวันได้รับการออกแบบอย่างเหมาะสม ประกอบด้วยแนวคิดพื้นฐาน ตัวอย่างตั้งแต่ระดับพื้นฐานไปจนถึงระดับที่ท้าทายขึ้น และแบบฝึกหัดเพื่อเสริมความเข้าใจที่คัดเลือกมาจากรูปแบบโจทย์ปัญหาที่พบบ่อย ๆ ในแบบฝึกหัดแคลคูลัส รวมถึงคำถามเชิงวิพากษ์ ผู้เรียนควรอ่านทบทวนและฝึกทำแบบฝึกหัดด้วยตนเองอย่างสม่ำเสมอ อย่างน้อยวันละ 2 หน้า (อ่าน 1 หน้า เขียน 1 หน้า) โดยหลีกเลี่ยงการใช้เครื่องมือช่วย เช่น เครื่องคำนวณ โปรแกรม หรือปัญญาประดิษฐ์ เมื่อฝึกครบ 30 วัน ผู้เขียนคาดหวังว่าผู้เรียนจะมีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่เพียงพอสำหรับการศึกษาแคลคูลัสในระดับต่อไป **อนึ่ง หนังสือเล่มนี้เป็นหนังสือสรุปเพื่อเตรียมความพร้อม การเรียบเรียงเนื้อหาจึงต้องทำให้กระชับ หากผู้อ่านต้องการศึกษารายละเอียดเพิ่มเติม โปรดศึกษารายละเอียดจากหนังสือเรียนของ สสวท. หรือศึกษาจาก Project 14 ของ สสวท. เช่นกัน**

ข้อห้ามสำหรับการใช้เชิงพาณิชย์

หนังสือเล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อให้ใช้เป็นประโยชน์ต่อการศึกษาในวงกว้าง จึงเผยแพร่ในพื้นที่สาธารณะผ่านทางเว็บไซต์ ผู้เขียน**ไม่อนุญาต**ให้ใช้หนังสือเล่มนี้เพื่อการพาณิชย์ (ขอบเขตการอนุญาต อาทิ การเรียนการสอนในโรงเรียน การสอนปรับพื้นฐานระดับมหาวิทยาลัย ที่ไม่ได้เป็นไปเพื่อการทำกำไร หรือการผลิตเพื่อจำหน่ายในราคาต้นทุนของหน่วยงาน) ทั้งนี้ หากผู้สนใจนำหนังสือเล่มนี้ไปผลิตเพื่อใช้งานด้านการศึกษา ขอความกรุณาแจ้งผู้เขียนทราบด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง

การใช้ปัญญาประดิษฐ์ในการจัดทำหนังสือ

ในกระบวนการจัดทำหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนได้ใช้ปัญญาประดิษฐ์ ChatGPT เพื่อช่วยสรุปแนวคิดและสร้างแบบฝึกหัด ภายใต้การกำกับทิศทางเนื้อหาอย่างใกล้ชิดโดยผู้เขียน สำหรับการจัดเรียงพิมพ์ ใช้โปรแกรม Pages บนเครื่องคอมพิวเตอร์แบบ Mac และการสร้างกราฟใช้แอปพลิเคชัน Desmos บนเว็บไซต์ รวมถึง Gemini ในการสร้างรูปภาพตัวการ์ตูนประกอบหนังสือที่ปรับจากเว็บไซต์ https://humanation.app/avatar เพื่อเพิ่มความสวยงามน่าอ่านของหนังสือเล่มนี้

ท้ายที่สุดนี้ ผู้เขียนขอขอบคุณผู้มีส่วนสนับสนุนทุกท่าน รวมถึงบูรพาจารย์ที่ได้ถ่ายทอดความรู้และประสบการณ์ นอกจากนี้ ขอขอบคุณ พศิน พวงสมบัติ ที่ช่วยทดลองทำแบบฝึกหัดและให้ข้อเสนอแนะสำหรับการแก้ต้นร่างของหนังสือเล่มนี้

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียนในการทบทวนพื้นฐานคณิตศาสตร์ และสามารถต่อยอดสู่การเรียนรู้ในระดับที่สูงขึ้นได้อย่างมั่นใจ ทั้งนี้ หากพบข้อผิดพลาด สามารถแจ้งผู้เขียนเพื่อปรับปรุงในโอกาสต่อไปได้ผ่านทางอีเมล นอกจากนี้ ผู้เขียนมีแผนพัฒนาสื่อวิดีโอประกอบหนังสือ เพื่อเสริมประสิทธิภาพในการเรียนรู้ในอนาคต และปรับปรุงหนังสือเล่มนี้ให้ดียิ่งขึ้น ขอให้ติดตามในโอกาสต่อไป

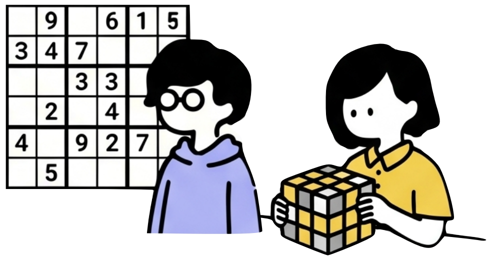
ศุภณัฐ ชัยดี
สมลักษณ์ อุตุดี

พฤษภาคม 2569

สารบัญ

วันที่	เนื้อหา	หน้าที่
แบบฝึกหัดก่อนเรียน (Pre-test)		1
ช่วงที่ 1 จำนวนจริงและการดำเนินการเบื้องต้น		5
1	จำนวนและการดำเนินการ	6
2	เศษส่วน	8
3	เลขยกกำลัง	10
4	รากของจำนวนจริง	12
5	สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร	14
ช่วงที่ 2 พื้นฐานพีชคณิตเบื้องต้น		17
6	พหุนาม	18
7	เอกลักษณ์ของพหุนามบางแบบ	20
8	การแยกตัวประกอบของพหุนาม	22
9	สมการพหุนามกำลังสอง	24
10	อสมการและค่าสัมบูรณ์	26
ช่วงที่ 3 ฟังก์ชันพื้นฐาน		29
11	ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	30
12	ฟังก์ชันบางชนิดที่น่าสนใจ	32
13	การสร้างฟังก์ชันใหม่	34
14	สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน	36
ช่วงที่ 4 กราฟของฟังก์ชันและเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น		39
15	กราฟเส้นตรง	40
16	กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง	42
17	สมการของภาคตัดกรวย	44
18	ระบบสมการสองตัวแปร	46
19	การเลื่อนแกนทางขนาน	48
ช่วงที่ 5 ฟังก์ชันที่สำคัญในแคลคูลัส		51
20	ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	52
21	ฟังก์ชันลอการิทึม	54
22	สมการและอสมการลอการิทึม	56
23	ทฤษฎีบทปีทากอรัส และอัตราส่วนตรีโกณมิติ	58
24	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ : วงกลมหนึ่งหน่วย	60
25	กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	62
26	เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่สำคัญ	64
27	ฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ	66
ช่วงที่ 6 เนื้อหาเบ็ดเตล็ดอื่น ๆ ที่จำเป็นในแคลคูลัส		69
28	สังยุคของราก	70
29	เศษส่วนของพหุนาม	72
30	กราฟของอสมการสองตัวแปร	74
แบบฝึกหัดหลังเรียน (Post-test)		77

ปฐมนิเทศก่อนเรียน



สวัสดีครับทุกคน !

ยินดีต้อนรับสู่ภารกิจ **30 วัน วันละนิด ปรับพื้นคณิตสู่แคลคูลัส**
เพื่อให้การเรียนรู้ของเรามีเป้าหมาย เรามารู้จักตัวเอง
และมาดูข้อตกลงของการเรียนด้วยกันก่อน

ตัวฉันชื่อ...

ฉันคิดว่า ความรู้คณิตศาสตร์ที่ฉันมี เพียงพอต่อการเรียนแคลคูลัสหรือยัง

○ พร้อมเต็มที่ ○ ได้อยู่ ○ ไม่ไหวแล้ว

การสอบรอบที่ผ่านมา คะแนนคณิตศาสตร์ฉันเป็นยังไงบ้าง

- คะแนน A-level คณิตศาสตร์ .... / 100
- คะแนน TPAT3 .... / 100
- คะแนน TGAT2 .... / 100

เกรดคณิตฯ ตอน ม.ปลายของฉันเป็นอย่างไรบ้าง

	เทอม 1	เทอม 2
คณิตพื้นฐาน ม.4		
คณิตเพิ่มเติม ม.4		
คณิตพื้นฐาน ม.5		
คณิตเพิ่มเติม ม.5		
คณิตเพิ่มเติม ม.6		

ฉันมีเป้าหมายในการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับมหาวิทยาลัยอย่างไรบ้าง

ฉันอยากปรับปรุงการเรียนของฉันที่ผ่านมาอย่างไรบ้าง

คำแนะนำการใช้หนังสือเล่มนี้

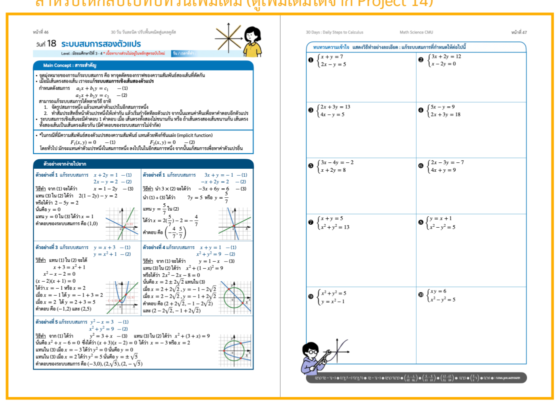
หนังสือเล่มนี้ ถูกออกแบบให้ผู้อ่านลงมือทำอย่างต่อเนื่องเป็นเวลา 30 วัน ในแต่ละวันมีจำนวน 2 หน้า ประกอบด้วยสรุปแนวคิดสำคัญ และตัวอย่าง 1 หน้า และแบบฝึกหัด 1 หน้า

ก่อนเริ่มเรียน ผู้อ่านควรทำแบบฝึกหัดก่อนเรียนเพื่อวัดความรู้ ผู้อ่านควรทำแบบฝึกหัดอย่างสม่ำเสมอทุกวัน ตามวันที่แบ่งไว้ เมื่อทำจนครบ 30 วันแล้ว ควรทำ**แบบฝึกหัดหลังเรียน** เพื่อตรวจสอบพัฒนาการในการเรียน

ในระหว่างการเรียน ผู้อ่านควรปิดเครื่องมือสื่อสาร เพื่อให้เกิดสมาธิในการเรียน รวมถึงละเว้นการใช้เครื่องมือช่วย อาทิ เครื่องคิดเลข ซอฟท์แวร์ รวมถึงปัญญาประดิษฐ์ เพื่อฝึกการคิดด้วยตนเอง

ขอแนะนำให้ผู้อ่านจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้ออกมาเป็นฉบับกระดาษ จะช่วยให้ผู้อ่านได้โฟกัสกับการฝึกหัดมากขึ้น

แต่ละวันจะระบุ Level (ระดับชั้นของเนื้อหา)
สำหรับให้กลับไปทบทวนเพิ่มเติม (ดูเพิ่มเติมได้จาก Project 14)



หน้า Concept และตัวอย่าง

แบบฝึกหัด (มีเฉลยเฉพาะคำตอบตอนท้าย 2 ส่วนท้าย)

ผู้เรียนส่วนใหญ่ที่มีปัญหาการเรียนแคลคูลัสในระดับมหาวิทยาลัย มักมีสาเหตุมาจากความเข้าใจพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่คลาดเคลื่อน รวมถึงความไม่เข้าใจในสัญลักษณ์ นิยาม และข้อตกลงทางคณิตศาสตร์ ปัญหานี้อาจมีผลมาจากการท่องสูตรโดยขาดความเข้าใจ ดังนั้น ในหนังสือเล่มนี้ เราแนะนำให้ศึกษาแนวคิดและฝึกฝนทีละนิด จากง่ายไปยาก หากผู้อ่านต้องการศึกษาทบทวนรายละเอียดเพิ่มเติม ขอแนะนำให้ใช้หนังสือของ สสวท. หรือศึกษาจาก Project 14 เพื่อเพิ่มพูนความเข้าใจ

Project 14 โดย สสวท. (โครงการสอนออนไลน์) : https://proj14.ipst.ac.th/

แบบทดสอบก่อนเรียน

วัดความเข้าใจที่มีอยู่แล้วก่อนเริ่มเรียน

กติกา

1. แบบทดสอบก่อนเรียน มีจำนวน 30 ข้อ ใช้เวลาทำ 60 นาที
2. ข้อใดที่ไม่แน่ใจ หรือทำไม่ได้ ให้ข้ามไปทำในข้อถัดไปทันที
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องมือช่วย อาทิ เครื่องคำนวณ โทรศัพท์มือถือ ปัญญาประดิษฐ์ หรือเปิดหนังสืออื่นใดระหว่างทำแบบทดสอบ เพื่อให้แบบทดสอบฉบับนี้สะท้อนความสามารถที่แท้จริงของผู้อ่าน

ถ้าพร้อมแล้ว ลงมือทำได้เลย !

แบบทดสอบก่อนเรียน (ใช้เวลาทำ 1 ชั่วโมง)

คำชี้แจง เติมคำตอบลงในช่องว่าง

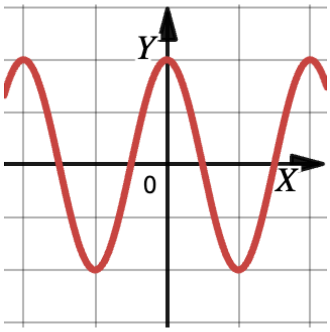
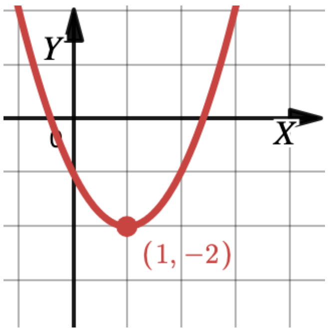
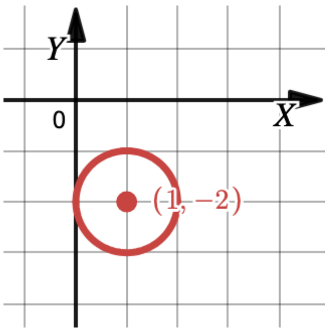
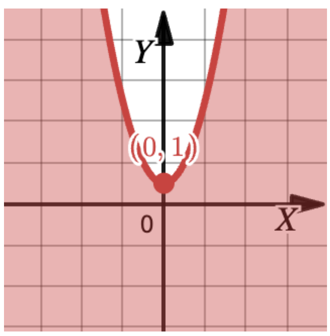
ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	$-(3+1)^2+5\times 4-8\div 2=$	
2	$\frac{7}{8}\div\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)=$	
3	$\frac{(12^{-1}\times 2^3)^2\times 3^2}{2^{-3}\times 6^{-2}}$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวกได้เป็น	
4	$\frac{\sqrt{75}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{45}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{30}}$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
5	กำหนด $2(x+3)-3(x-2)=4x-10$ แก้สมการจะได้ $x=$	
6	$(2x+1)(x-6)-(x^2-2x+2)$ ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะได้	
7	$(2x+1)^2-(3x-2)^2$ ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะได้	
8	$(4x^2-11x+6)$ แยกตัวประกอบได้เป็น	
9	กำหนด $6x^2+3x-3=0$ แก้สมการจะได้ $x=$	
10	กำหนด $\lvert 2x-3\rvert\leq 7$ แก้อสมการจะได้ช่วงของคำตอบคือ	
11	กำหนด $f(x)=x^2-2x+5$ จะได้ $f(-2)=$	
12	กำหนด $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leq 2\\ x+1, & x>2\end{cases}$ จะได้ $f(-1)+f(2)-f(3)=$	
13	กำหนด $f(x)=x^2$ และ $g(x)=x+2$ จะได้ $f(g(2))=$	
14	กำหนด $f(x)=3x+2$ เมื่อ $x\geq 0$ จะได้ว่าฟังก์ชันผกผันของ f คือ	
15	สมการของเส้นตรงที่มีความชัน 2 และผ่านจุด (1,2) คือ	
16	วาดกราฟของ $f(x)=(x-1)^2-2$	

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
17	สมการ $x^2 + 2y^2 = 1$ มีกราฟเป็น	
18	กำหนด $\begin{array}{l} 2x + y = 7 \\ x - 2y = 5 \end{array}$ แก้ระบบสมการ จะได้ $x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots$	
19	วาดกราฟของ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$	
20	กำหนด $3^{2x-1} = 27$ จะได้ $x =$	
21	$3\log_2(4) - 4\log_2(\sqrt{2})$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
22	กำหนด $\log_2(x-1) = 3$ จะได้ $x =$	
23	$\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \tan 45^\circ$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
24	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
25	วาดกราฟของ $f(x) = 3\sin x$	
26	$\cos^4 x$ จัดให้อยู่ในรูปตรีโกณมิติที่มีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่งได้เป็น	
27	$\arcsin(-1) =$	
28	พจน์ $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$ เมื่อทำให้ตัวส่วนไม่มีรากจะได้	
29	เมื่อหาร $2x^2 + 3x + 5$ ด้วย $x + 2$ จะได้ผลหารคือ .... และเศษคือ	
30	วาดกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y - x^2 \leq 1\}$	

ตรวจคำตอบได้ที่หน้าที่ 4

คะแนน Pre-test ที่ได้

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน (เฉพาะคำตอบ)

1	0	11	13	21	4
2	$\frac{8}{3}$	12	-2	22	$x=9$
3	$1152=2^7\times 3^2$	13	16	23	$\frac{7}{4}$
4	$\frac{5\sqrt{10}}{2}$	14	$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3},\ x\geq 2$	24	$\frac{1}{4}$
5	$x=\frac{22}{5}$	15	$y=2x$	25	
6	x^2-9x-8	16		26	$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$
7	$-5x^2+16x-3$	17	วงรี	27	$-\frac{\pi}{2}$
8	$(4x-3)(x-2)$	18	$x=\frac{19}{5},\ y=-\frac{3}{5}$	28	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
9	$x=\frac{1}{2},\ -1$	19		29	ผลหาร $=2x-1$, เศษ $=7$
10	$[-2,5]$	20	$x=2$	30	

ช่วงที่ 1

จำนวนจริงและการดำเนินการเบื้องต้น

วันที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

Level : ประถมศึกษา - มัธยมศึกษาปีที่ 1 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- ในการดำเนินการของจำนวนในทางคณิตศาสตร์ เราใช้หลักการ BODMAS เพื่อเรียงลำดับการดำเนินการโดย
  1) เรียงตามลำดับความสำคัญ 2) ในระดับความสำคัญเดียวกัน ให้ทำจากซ้ายไปขวา
  B : Bracket (วงเล็บ) O : Order (อันดับ - ยกกำลัง / ราก)
  D : Division - M : Multiplication (การหาร - การคูณ มีความสำคัญเท่ากัน ทำจากซ้ายไปขวา)
  A : Addition - S : Subtraction (การบวก - การลบ มีความสำคัญเท่ากัน ทำจากซ้ายไปขวา)
- สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ในการกระจายวงเล็บ เราทราบว่า $-(-a) = a$
  สมบัติการกระจาย (distribution property) $a(b+c) = ab+bc$
- เมื่อมีวงเล็บ ต้องกระจายเครื่องหมายหน้าวงเล็บเข้าไปในวงเล็บ ภายใต้การดำเนินการด้วย
  เช่น $2-(3+4) = 2-3-4$ $2-(-3-4) = 2+3+4$
- **ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a** เขียนแทนด้วย $|a|$ คือระยะทางที่วัดจากศูนย์ไปยังจำนวนจริง a มีค่าเป็นบวกหรือศูนย์
  เช่น $|2| = 2$ $|-4| = 4$ $|-1.5| = 1.5$ $|0| = 0$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 $8+2\times 3 = 8+6 = 14$
(ไม่มีวงเล็บ ทำเครื่องหมายคูณก่อนเครื่องหมายบวก)

ตัวอย่างที่ 2 $(8+2)\times 3 = 10\times 3 = 30$
(ทำในวงเล็บก่อน แล้วทำจากซ้ายไปขวา)

ตัวอย่างที่ 3 $18\div 3\times 2 = 6\times 2 = 12$
(เครื่องหมายหารและลบมีระดับความสำคัญเท่ากัน ทำจากซ้ายไปขวา)

ตัวอย่างที่ 4 $20-4\times 3+6\div 2 = 20-12+3 = 11$
(ทำเครื่องหมายคูณและหารก่อน จากนั้นทำเรียงจากซ้ายไปขวา)

ตัวอย่างที่ 5 $-(6+4)\times 2+3^2 = (-10)\times 2+9$
$= -20+9 = -11$
(ทำในวงเล็บก่อน จากนั้นทำเครื่องหมายคูณให้เรียบร้อย แล้วจึงค่อยบวก)

ทบทวนความเข้าใจ 1 ข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้แก้ไขให้ถูกต้อง

ข้อความ	จริง	เท็จ	แก้ไข
$2+3\times 4 = 20$			
$(2+3)\times 4 = 20$			
$12\div 3\times 2 = 8$			
$12\div (3\times 2) = 8$			
$-(3+2) = -3+2$			
$2+3^2 = 11$			
$18-3^2\times 2 = 12$			
$8+12\div 3\times 2 = 16$			
$50-6\times 4+8\div 2+\times 3 = 38$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงหาค่าของนิพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

❶ $36 \div (3 \times 2) + 5 \times 4$	❷ $48 \div 4 \times (3+1)^2$
❸ $60 - 2^3 \times (5+1) + 12 \div 3$	❹ $-(10 + 2^2 \times 3) + 4 \times 5$
❺ $100 \div 5 \times 2 + 3^2 \times (4-1)$	❻ $72 \div (6 + 3 \times 2) \times 4 + 5$
❼ $72 \div [3 + 3 \times (2+4)] \times 5$	❽ $150 - [10 \times (3 + 2^2) + 4 \times (6-1)]$
❾ สำหรับตัวแปร x จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย $3x + 2[x + 4(2x-1)]$	❿ สำหรับตัวแปร a จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย $5a - [2a + 3\{a - 2(1-a)\}]$

เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❷ 192 ❸ 16 ❹ -2 ❺ 67 ❻ 29 ❼ $\frac{120}{7}$ ❽ 60 ❾ $2x - 8$ ❿ $-6a + 6$

วันที่ 2 เศษส่วน

Level : ประถมศึกษา - มัธยมศึกษาปีที่ 1 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **การบวก - ลบ เศษส่วน** ต้องทำตัวส่วนให้เท่ากันก่อน โดยหา ค.ร.น. ของตัวส่วน จากนั้นทำตัวส่วนให้เท่ากัน (โดยการคูณจำนวนนับทั้งเศษและส่วน ให้มีตัวส่วนเท่ากับ ค.ร.น.) แล้วบวก - ลบ เฉพาะตัวเศษ เช่น
  - $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}=\frac{1\times 2}{3\times 2}+\frac{5}{6}=\frac{2}{6}+\frac{5}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$ (กรณีนี้ ค.ร.น. ของ 3 และ 6 คือ 6)
  - $\frac{1}{5}-\frac{3}{6}=\frac{1\times 6}{5\times 6}-\frac{3\times 5}{6\times 5}=\frac{6}{30}-\frac{15}{30}=-\frac{9}{30}=-\frac{3}{10}$ (กรณีนี้ ค.ร.น. ของ 5 และ 6 คือ 30)
- ในกรณีทั่วไป $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ เช่น $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times 2+1\times 3}{3\times 2}=\frac{5}{6}$

ข้อควรระวัง ห้ามบวกตัวเศษและตัวส่วนตรง ๆ เช่น $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\neq\frac{2}{5}$

- **การคูณเศษส่วน** คูณเศษกับเศษ คูณส่วนกับส่วน กล่าวคือ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

เช่น $\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{2\times 6}{3\times 5}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$ (อาจตัดทอนก่อนคูณ คือทอนเลข 3 กับ 6 ก่อน เพื่อให้คำนวณง่ายขึ้น)

- **การหารเศษส่วน** คูณด้วยเศษส่วนกลับ กล่าวคือ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

เช่น $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$

- **เศษส่วนซ้อน** มองเป็นเศษส่วนหารกัน $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$ (ค.ร.น. ของ 2, 4, 3 คือ 12)

วิธีทำ
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{6}{12}+\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{15}{12}-\frac{8}{12}=\frac{7}{12}$$

ตัวอย่างที่ 2 $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ (ค.ร.น. ของ 6, 4, 3 คือ 12)

วิธีทำ
$$\frac{5}{6}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{10}{12}-\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{7}{12}+\frac{8}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

ตัวอย่างที่ 3 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$

วิธีทำ
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{9}{8}$$ (ทำคูณก่อนบวก)
$$=\frac{4}{8}+\frac{9}{8}=\frac{13}{8}$$

ตัวอย่างที่ 4 $\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)$

วิธีทำ
$$\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{5}+\frac{2}{12}=\frac{18}{30}+\frac{5}{30}=\frac{23}{30}$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้แก้ไขให้ถูกต้อง

ข้อความ	จริง	เท็จ	แก้ไข
$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}$			
$\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{2}=\left(\frac{5}{6}-\frac{2}{6}\right)\times\frac{3}{2}$			
$\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{5}+\frac{2}{12}$			
$\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}\right)=\frac{7-3}{8-4}$			
$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงหาค่าของนิพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

❶ $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$

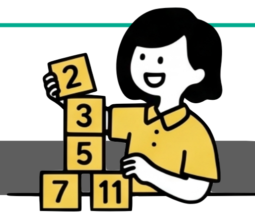
❷ $\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{2}+\frac{1}{4}$

❸ $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)$

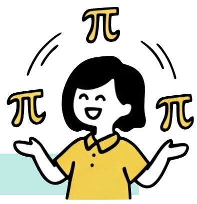
❹ $\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)$

❺ $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}\times\frac{3}{5}$

❻ $1-\left(\frac{3}{4}\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\right)+\frac{5}{8}$



เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ $\frac{5}{6}$ ❷ 1 ❸ $\frac{23}{30}$ ❹ $\frac{7}{28}$ ❺ $\frac{2}{3}$ ❻ 1



วันที่ 3 เลขยกกำลัง

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 1 - 2 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม** ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก เลขยกกำลังเป็นการเขียนจำนวนที่คูณซ้ำ ๆ

$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}}$ โดยเรียก a ว่าฐาน และเรียก n ว่า เลขชี้กำลัง

- **สมบัติของเลขยกกำลัง**
  1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ เช่น $2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$
  2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a \neq 0)$ เช่น $\dfrac{5^6}{5^2} = 5^4 = 625$
  3. $(a^m)^n = a^{mn}$ เช่น $(2^3)^2 = 2^6 = 64$
  4. $(ab)^n = a^n b^n$ เช่น $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 36$
  5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \quad (b \neq 0)$ เช่น $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$
  6. $a^0 = 1, \quad (a \neq 0)$ เช่น $7^0 = 1$
  7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \quad (a \neq 0)$ เช่น $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$
- **ข้อควรระวัง** สมบัติของเลขยกกำลังมักใช้กับการคูณและการหาร ไม่ครอบคลุมการบวก - ลบ
  - ห้ามบวกเลขชี้กำลัง กล่าวคือ $a^m + a^n \neq a^{m+n}$ เช่น $2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12 \neq 2^5$
  - ห้ามกระจายเลขชี้กำลังกับการบวก กล่าวคือ $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$ เช่น $(2+3)^2 = 25 \neq 4 + 9$
  - ระมัดระวังการใช้กฎการคูณหรือหาร กล่าวคือ $a^m \times b^n \neq (ab)^{m+n}$ เช่น $2^2 \times 3^2 = 36 \neq 6^4$
  - $a^0 = 1$ ใช้เมื่อ $a \neq 0$ เนื่องจากไม่นิยาม 0^0
  - ระวังเครื่องหมายลบ กล่าวคือ $(-a)^2 = a^2$ แต่ $-a^2 = -(a^2)$ เช่น $(-2)^2 = 4$ แต่ $-2^2 = -4$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

ตัวอย่างที่ 1 $\dfrac{3^5 \times 3^2}{3^3}$

วิธีทำ
$$\frac{3^5 \times 3^2}{3^3} = 3^{5+2-3} = 3^4 = 81$$

ตัวอย่างที่ 2 $(2^2 \times 3^3)^2$

วิธีทำ
$$(2^2 \times 3^3)^2 = 2^{2\times2} \times 3^{3\times2} = 2^4 \times 3^6 = 16 \times 729 = 11664$$

ตัวอย่างที่ 3 $\dfrac{(4^2 \times 2^3)^2}{2^4}$

วิธีทำ
$$\frac{(4^2 \times 2^3)^2}{2^4} = \frac{((2^2)^2 \times 2^3)^2}{2^4} = \frac{(2^4 \times 2^3)^2}{2^4} = \frac{(2^7)^2}{2^4} = \frac{2^{14}}{2^4} = 2^{14-4} = 2^{10}$$

ตัวอย่างที่ 4 $\dfrac{(2^{-3} \times 4^2)^2}{2^{-1} \times 8}$

วิธีทำ
$$\frac{(2^{-3} \times 4^2)^2}{2^{-1} \times 8} = \frac{(2^{-3} \times (2^2)^2)^2}{2^{-1} \times 2^3} = \frac{(2^{-3} \times 2^4)^2}{2^2} = \frac{(2^1)^2}{2^2} = \frac{2^2}{2^2} = 2^0 = 1$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้แก้ไขให้ถูกต้อง

ข้อความ	จริง	เท็จ	แก้ไข
$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$			
$2^{-1} + 2^{-1} = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$			
$\dfrac{a^{-4}}{a^{-2}} = a^{-4-(-2)} = a^{-2}$			
$(2a)^{-2} = \dfrac{1}{(2a)^2} = \dfrac{1}{2^2a^2} = \dfrac{1}{4a^2}$			
$\dfrac{2^{-3} \times 2^5}{2^2} = \dfrac{2^2}{2^2} = 2^0 = 1$			
$\dfrac{(2^2 \times 2^{-3})^2}{2^{-1}} = 2^2$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

❶ $\dfrac{(5^{-2} \times 25^3)^2}{5^{-3} \times 125}$

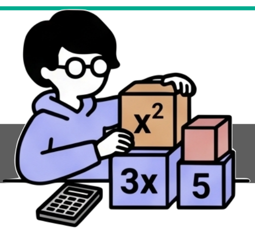
❷ $\dfrac{(6^{-1})^2 \times 2^4 \times 3^3}{2^{-2} \times 3^{-1}}$

❸ $\dfrac{(2^2 \times 3^{-1})^3 \times (3^2 \times 2^{-1})^2}{2^{-2} \times 3^{-3}}$

❹ $\dfrac{(18^{-1} \times 6^3)^2 \times 3^2}{2^{-3} \times 3^{-2}}$

❺ $\left(\dfrac{(x^{-2}y^3)^2 \cdot (x^4y^{-1})}{(xy^{-2})^3}\right)^2, (x, y \neq 0)$

❻ $\dfrac{\left(\dfrac{x^3y^{-2}}{(xy)^{-1}}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{(x^2y)^{-1} \cdot (xy^2)^3}{x^{-1}y}\right)}{x^{-3}y^{-4}}, (x, y \neq 0)$



เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ 5^8 ❷ $2^4 \times 3^2$ ❸ $2^6 \times 3^4$ ❹ $2^7 \times 3^6$ ❺ $\dfrac{y^{22}}{x^6}$ ❻ $x^{13}y^6$

วันที่ 4 รากของจำนวนจริง

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 1 - 2 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **รากที่สองของจำนวนจริง a** คือจำนวน x ที่เมื่อยกกำลังสองแล้ว ได้เท่ากับจำนวนนั้น กล่าวคือ $x^2 = a$
  - สัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ (กรณ์ที่สอง - square root) ใช้เขียนแทนรากที่สองที่เป็นบวกของ a ได้ว่า $x = \sqrt{a}$ และ $x = -\sqrt{a}$ เป็นรากที่สองของ a

    เช่น รากที่สองของ 25 คือ 5 และ -5 เนื่องจาก $5^2 = 25$ และ $(-5)^2 = 25$

    $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ และ $-\sqrt{25} = -\sqrt{5^2} = -5$

    รากที่สองของ 2 คือ $\sqrt{2}$ และ $-\sqrt{2}$
  - **ข้อควรระวัง** ภายใต้ระบบจำนวนจริง ไม่พิจารณารากที่สองของจำนวนจริงลบ และ $\sqrt{a^2} = |a| \neq \pm a$
- **รากที่ n ของจำนวนจริง a** คือจำนวน x ที่ $x^n = a$
  - สัญลักษณ์ $\sqrt[n]{a}$ (กรณ์ที่ n - $n-th$ root) ใช้เขียนแทนรากที่ n ของ a

    เช่น รากที่สามของ 1 เขียนแทนได้ด้วย $\sqrt[3]{1} = 1$ และรากที่สามของ -1 คือ -1 ทั้งนี้เนื่องจาก $(-1)^3 = -1$ ซึ่งเขียนได้ในรูป $\sqrt[3]{-1} = -1$
  - เราสามารถพิจารณารากที่ n ของจำนวนลบได้ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่
- **รากที่ n ในรูปแบบเลขยกกำลัง** เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1 เราทราบว่า $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ โดยที่ $\frac{m}{n}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ เรียกว่า **เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ** โดยสมบัติของเลขยกกำลัง เราสามารถพิจารณาสมบัติของรากที่ n ได้ กล่าวคือ
  - $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ เช่น $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$
  - $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ เช่น $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
  - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$ เช่น $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4}{3}$
  - $\sqrt[n]{a^n} = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ และ $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ เช่น $\sqrt{16} = \sqrt{4^2} = |4| = 4$
  - $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ a เป็นจำนวนจริง และเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ a เป็นจำนวนจริงบวก

    เช่น $\left(\sqrt[3]{-8}\right)^3 = -8$ $\quad \left(\sqrt[4]{16}\right)^4 = 16$

ค่าคงตัวใช้บ่อย

$\sqrt{2} \approx 1.414$

$\sqrt{3} \approx 1.732$

$\sqrt{5} \approx 2.236$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

ตัวอย่างที่ 1 $\sqrt{1080}$

วิธีทำ
$$\sqrt{1080} = \sqrt{36 \cdot 30} = 6\sqrt{30}$$

ตัวอย่างที่ 2 $\sqrt{16x^4} \cdot \sqrt{4x^2}$

วิธีทำ
$$\sqrt{16x^4} \cdot \sqrt{4x^2} = \sqrt{64x^6} = \sqrt{(8x^3)^2} = 8|x^3|$$

ตัวอย่างที่ 3 $\dfrac{\sqrt[3]{54x^5} \cdot \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{3x^2}}$

วิธีทำ
$$\frac{\sqrt[3]{54x^5} \cdot \sqrt[3]{2x}}{\sqrt[3]{3x^2}} = \sqrt[3]{\frac{108x^6}{3x^2}} = \sqrt[3]{36x^4} = x\sqrt[3]{36x}$$

ตัวอย่างที่ 4 $\dfrac{(32x^5)^{\frac{2}{5}} \cdot (4x)^{\frac{1}{2}}}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}}$ เมื่อ $x > 0$

วิธีทำ
$$\frac{(32x^5)^{\frac{2}{5}} \cdot (4x)^{\frac{1}{2}}}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2^5)^{\frac{2}{5}}x^2(2^2)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{(2^{\frac{3}{2}})x^3} = 2^{2+1-\frac{3}{2}}x^{2+\frac{1}{2}-3} = 2^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ข้อความต่อไปนี้จริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้แก้ไขให้ถูกต้อง

ข้อความ	จริง	เท็จ	แก้ไข
$\sqrt[4]{16x^4y^8} = 2xy^2$			
$\sqrt{50x^2} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot x^2} = 5x\sqrt{2}$			
$\dfrac{\sqrt{18x^3}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\dfrac{18x^3}{2x}} = \sqrt{9x^2} = 3\lvert x \rvert$			
$\sqrt{8+18} = \sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$			
$\sqrt{(-3)^2 \cdot 12} = \sqrt{9 \cdot 12} = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3}$			
$\sqrt[3]{a^3b^6} = ab^2$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายในรูปรากที่ n

❶ $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{14}$

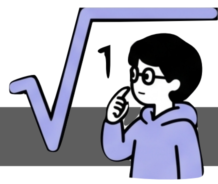
❷ $\dfrac{\sqrt{96} \cdot \sqrt{150} \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{5}}$

❸ $\sqrt[3]{\dfrac{128x^7 \cdot 54x^2}{16x^3}}$

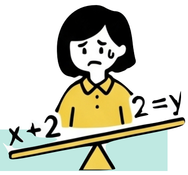
❹ $\left(\dfrac{\sqrt{48x^5}\sqrt{3x^3}}{\sqrt{2x}}\right)^2$

❺ $(16x^{-2}y^3)^{\frac{3}{4}} \cdot (8x^5y^{-2})^{\frac{1}{3}}$

❻ $\dfrac{(27x^6y^9)^{\frac{2}{3}}}{(3x^2y^3)^{\frac{3}{2}}}$



เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ $180\sqrt{7}$ ❷ $20\sqrt{3}$ ❸ $6x^2\sqrt[3]{2}$ ❹ $72x^7$ ❺ $16y\sqrt[12]{x^2y^7}$ ❻ $xy\sqrt{3y}$



วันที่ 5 สมการเชิงเส้นหนึ่งตัวแปร

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 1 - 2 วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **สมการ** คือประโยคทางคณิตศาสตร์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ ($=$) เพื่อบ่งบอกปริมาณที่เท่ากันทั้งสองข้าง
- **ตัวแปร (variable)** คือสัญลักษณ์ เช่น x, y, a ที่ใช้แทน**ตัวไม่ทราบค่า**
- **คำตอบของสมการ** คือ จำนวนซึ่งเมื่อแทนในตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่าแล้วทำให้สมการเป็นจริง (สองข้างเท่ากัน)

  เช่น $x + 3 = 7$ เป็นสมการที่มี x เป็นตัวแปร

  และมี $x = 4$ เป็นคำตอบของสมการนี้ เพราะว่า เมื่อแทน $x = 4$ ในสมการดังกล่าว จะพบว่า ด้านซ้ายมือ (L.H.S) คือ $4 + 3 = 7$ ซึ่งมีค่าเท่ากับด้านขวามือของสมการ (R.H.S) ทำให้สมการเป็นจริง
- **การแก้สมการ** สำหรับสมการเชิงเส้น (ตัวแปรมีเลขชี้กำลังเท่ากับหนึ่ง) ใช้สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง กล่าวคือ
  - สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
  - สมบัติการลบด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a - c = b - c$
  - สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $a \times c = b \times c$
  - สมบัติการหารด้วยจำนวนที่เท่ากัน ถ้า $a = b$ แล้ว $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ โดยที่ $c \neq 0$
  - สมบัติการกระจาย $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
- **ข้อควรระวัง** การแก้สมการจำเป็นต้องเขียนเครื่องหมายกำกับไว้เสมอ และควรเขียนเครื่องหมายเท่ากับให้ตรงกัน

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงแก้สมการเพื่อหาค่า x ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $x + 4 = 9$

วิธีทำ $x + 4 - 4 = 9 - 4$ (ลบด้วย 4 ทั้งสองข้าง)

$x = 5$

ตัวอย่างที่ 2 $3x = 12$

วิธีทำ $\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ (หารด้วย 3 ทั้งสองข้าง)

$x = 4$

ตัวอย่างที่ 3 $2x - 5 = 9$

วิธีทำ $2x - 5 + 5 = 9 + 5$ (บวกด้วย 5 ทั้งสองข้าง)

$2x = 14$

$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$ (หารด้วย 2 ทั้งสองข้าง)

$x = 7$

ตัวอย่างที่ 4 $4x + 3 = 2x + 11$

วิธีทำ $4x - 2x + 3 = 11$ (ลบด้วย $2x$ ทั้งสองข้าง)

$2x + 3 = 11$

$2x = 8$ (ลบด้วย 3 ทั้งสองข้าง)

$x = 4$ (หารด้วย 2 ทั้งสองข้าง)

ตัวอย่างที่ 5 $\frac{2x - 1}{3} = \frac{x + 5}{2}$

วิธีทำ $2(2x - 1) = 3(x + 5)$

(คูณด้วย ค.ร.น. ของ 3 และ 2 คือ 6 ทั้งสองข้าง)

$4x - 2 = 3x + 15$ (ใช้สมบัติการแจกแจง)

$x = 17$

(ใช้สมบัติการบวกลบด้วยจำนวนที่เท่ากัน)

ตัวอย่างที่ 6 $\frac{2x + 1}{3} - \frac{x - 2}{4} = \frac{x + 5}{6}$

วิธีทำ $4(2x + 1) - 3(x - 2) = 2(x + 5)$

(คูณด้วย ค.ร.น. ของ 3, 4 และ 6 คือ 12 ทั้งสองข้าง)

$8x + 4 - 3x + 6 = 2x + 10$

(ใช้สมบัติการแจกแจง)

$5x + 10 = 2x + 10$

$3x = 0$

$x = 0$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ตรวจสอบว่า ค่า x ที่กำหนดเป็นคำตอบของสมการที่กำหนดหรือไม่ ถ้าไม่เป็น จงหาค่า x

สมการ	x	เป็น	ไม่เป็น	คำตอบที่ถูก
$2x - 1 = 6$	4			
$\dfrac{2x-1}{3} + 1 = 2$	2			
$3(2x-1) - 2(x+4) = 2x + 2$	2			
$\dfrac{3(x-1)}{2} - \dfrac{x+2}{4} = 4$	4			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : แก้สมการหาค่า x

❶ $2x - 5 = 11$

❷ $3(x-2) = 2x + 4$

❸ $5x - 3 = 2(2x+1)$

❹ $4(x+3) - 2(x-1) = 3x + 10$

❺ $\dfrac{x}{3} + 2 = \dfrac{5x}{6}$

❻ $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{x+2}{2} = 1$

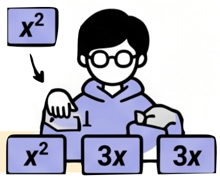
❼ $\dfrac{3(x-2)}{4} + \dfrac{2x+1}{3} = \dfrac{5x}{6}$

❽ $\dfrac{2(x-1)}{3} - \dfrac{3(x+2)}{4} = \dfrac{x}{6} + 1$

เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ 8 ❷ 10 ❸ 5 ❹ 4 ❺ 4 ❻ 14 ❼ 2 ❽ $-\dfrac{38}{3}$

ช่วงที่ 2

พื้นฐานพีชคณิตเบื้องต้น



วันที่ 6 พหุนาม

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 2 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **เอกนาม** คือนิพจน์ที่เขียนอยู่ในรูปของผลคูณของจำนวนจริง ตัวแปร โดยตัวแปรมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ
  เช่น $2x^2,\ 3x^2y,\ \frac{2}{3}xy^2z^3,\ -6xyzw$
  - เอกนามคู่หนึ่งจะมีพจน์คล้ายกัน เมื่อเอกนามทั้งคู่มีตัวแปรเหมือนกัน และตัวแปรแต่ละตัวมีเลขชี้กำลังเท่ากัน
  - การบวก ลบ เอกนาม หากมีพจน์ที่คล้ายกัน ให้ใช้สมบัติการแจกแจง เช่น $3x^2 + 5x^2 = (3+5)x^2 = 8x^2$
  - การคูณ หาร เอกนาม ใช้สมบัติของเลขยกกำลังในการเขียนให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ
- **พหุนาม** คือ ผลบวกและลบของเอกนามหลายเอกนาม (ที่ไม่คล้าย) โดยเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ
  - **ดีกรีของพหุนาม** คือ ผลรวมของเลขชี้กำลังที่สูงที่สุดของบรรดาเอกนามที่บวกลบกันอยู่
    เช่น พหุนาม $2x^3 + 4x + 2$ เป็นพหุนามดีกรีสาม พหุนาม $-2x^3y^2 + 4xy^3 + 2x$ เป็นพหุนามดีกรีห้า
  - **การบวก - ลบพหุนาม** จะทำการบวก - ลบ พหุนามที่มีเอกนามคล้ายกัน เช่น
    $$(3x^2+2x-5)+(x^2-x+4) = (3x^2+x^2)+(2x-x)+(-5+4) = 4x^2+x-1$$
  - **การคูณพหุนาม** ใช้สมบัติการกระจายกับพหุนาม
    - การคูณพหุนามด้วยเอกนาม เช่น
      $$3x(2x^2+x-5) = 3x\cdot 2x^2 + 3x\cdot x + 3x\cdot(-5) = 6x^3+3x^2-15x$$
    - การคูณพหุนามด้วยพหุนาม ให้กระจายพจน์ทีละพจน์จากวงเล็บหน้า เช่น
      $$(x+2)(x+3) = x(x+3)+2(x+3) = x^2+3x+2x+6 = x^2+5x+6$$
      $$\begin{aligned}(2x-1)(x^2+3x+4) &= 2x(x^2+3x+4) - 1(x^2+3x+4)\\ &= (2x^3+6x^2+8x)-(x^2+3x+4)\\ &= 2x^3+6x^2+8x-x^2-3x-4\end{aligned}$$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

ตัวอย่างที่ 1 $3x^2+5x-2x^2-4x$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}&3x^2+5x-2x^2-4x\\ &= (3x^2-2x^2)+(5x-4x)\\ &= x^2+x\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 $(3x^2)(-2x^3)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}(3x^2)(-2x^3) &= -6x^{2+3}\\ &= -6x^5\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 $(3x^2+2x-5)-(x^2-4x+1)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}&(3x^2+2x-5)-(x^2-4x+1)\\ &= 3x^2+2x-5-x^2+4x-1\\ &= (3x^2-x^2)+(2x+4x)+(-5-1)\\ &= 2x^2+6x-6\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 $2x(3x^2-x+4)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}&2x(3x^2-x+4)\\ &= 2x\cdot 3x^2 + 2x\cdot(-x) + 2x\cdot 4\\ &= 6x^3-2x^2+8x\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 $(3x-2)(x+5)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}&(3x-2)(x+5)\\ &= 3x(x+5)-2(x+5)\\ &= 3x^2+15x-2x-10\\ &= 3x^2+13x-10\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 $(2x^2-x+3)(x^2+2x-1)$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}&(2x^2-x+3)(x^2+2x-1)\\ &= 2x^2(x^2+2x-1)-x(x^2+2x-1)\\ &\quad +3(x^2+2x-1)\\ &= (2x^4+4x^3-2x^2)+(-x^3-2x^2+x)\\ &\quad +(3x^2+6x-3)\\ &= 2x^4+3x^3-x^2+7x-3\end{aligned}$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 เขียนนิพจน์ที่กำหนดให้ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

นิพจน์	ผลสำเร็จ
$3x^2 + 5x^2$	
$7x^3 - 2x^3$	
$(3x^2)(-2x)$	
$\frac{8x^5}{2x^2}$	
$(3x^2 + 2x) + (x^2 - x)$	
$(4x^2 + 3x - 1) - (2x^2 - x + 5)$	
$2x(x + 3)$	
$(x + 2)(x + 5)$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

❶ $(3x^2 - 2x + 5) + (2x^2 + x - 3)$

❷ $(4x^2 + 3x - 1) - (2x^2 - 5x + 6)$

❸ $(5x^3 - 2x^2 + 2) + (-3x^3 + x^2 - 4x)$

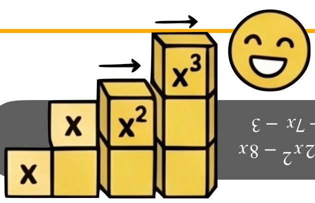
❹ $-2x(3x^2 - x + 4)$

❺ $3x^2(2x^2 - 3x + 1)$

❻ $(x + 3)(2x + 5)$

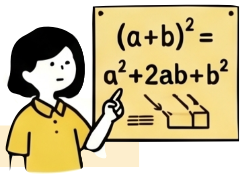
❼ $(2x - 1)(x^2 + 4x + 3)$

❽ $(2x^2 - x + 3)(x^2 + 2x - 1)$



เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ $5x^2 - x + 2$ ❷ $2x^2 + 8x - 7$ ❸ $2x^3 - x^2 - 4x + 2$ ❹ $-6x^3 + 2x^2 - 8x$
❺ $6x^4 - 9x^3 + 3x^2$ ❻ $2x^2 + 11x + 15$ ❼ $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ ❽ $2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x - 3$

วันที่ 7 เอกลักษณ์ของพหุนามบางแบบ



Level : มัธยมศึกษาปีที่ 2 - 3 วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- ในการคูณพหุนามบางรูปแบบ อยู่ในรูปแบบที่มีแบบแผน หากพหุนามอยู่ในรูปผลคูณที่มีแบบแผน จะสามารถใช้เอกลักษณ์ของพหุนามมาช่วยคูณกระจายได้อย่างรวดเร็ว
- ในทำนองกลับกัน หากมีพหุนามมาให้ ต้องการเขียนพหุนามให้อยู่ในรูปการคูณกัน (เรียกว่า ตัวประกอบของพหุนาม) หากสามารถจำแบบแผนได้ จะสามารถเขียนพหุนามในรูปผลคูณของตัวประกอบได้เช่นกัน
- **เอกลักษณ์ของพหุนามที่มักใช้บ่อย**
  - กำลังสองสมบูรณ์ : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ เช่น $(a+2b)^2 = a^2 + 2(a)(2b) + (2b)^2$
    $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ เช่น $(3x-y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(y) + y^2$
  - ผลต่างกำลังสอง : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ เช่น $(2a-b)(2a+b) = (2a)^2 - b^2$
  - กำลังสามสมบูรณ์ : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
    เช่น $(x+2)^3 = x^3 + 3(x)^2(2) + 3(x)(2^2) + 2^3$
    $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
    เช่น $(2x-1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1^2) - 1^3$
  - ผลบวกกำลังสาม : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
    เช่น $a^3 + 8 = a^3 + 2^3 = (a+2)(a^2 - 2a + 4)$
  - ผลต่างกำลังสาม : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
    เช่น $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

ตัวอย่างที่ 1 กระจายพจน์ $(2x+1)^2 - (x-1)^2$

วิธีทำ $(2x+1)^2 - (x-1)^2$
$$= [(2x)^2 + 4x + 1] - [x^2 - 2x + 1]$$
$$= 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1$$
$$= 3x^2 + 6x$$

ตัวอย่างที่ 2 กระจายพจน์ $(3x-2)^2 + (x+4)^2$

วิธีทำ $(3x-2)^2 + (x+4)^2$
$$= [(3x)^2 - 12x + 4] + [x^2 + 8x + 16]$$
$$= 9x^2 - 12x + 4 + x^2 + 8x + 16$$
$$= 10x^2 - 4x + 20$$

ตัวอย่างที่ 3 กระจายพจน์ $(2a+b)^3 - (a-2b)^3$

วิธีทำ $(2a+b)^3 - (a-2b)^3$
$$= \left[(2a)^3 + 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b^2) + b^3\right] - \left[a^3 - 3a^2(2b) + 3a(2b)^2 - (2b)^3\right]$$
$$= (8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3) - (a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3)$$
$$= 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 - a^3 + 6a^2b - 12ab^2 + 8b^3$$
$$= 7a^3 + 18a^2b - 6ab^2 + 9b^3$$

ตัวอย่างที่ 4 แยกตัวประกอบของพหุนาม $8x^3 + 27y^3$

วิธีทำ $8x^3 + 27y^3$
$$= (2x)^3 + (3y)^3$$
$$= (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$
$$= 3x^2 + 13x - 10$$

ตัวอย่างที่ 5 แยกตัวประกอบของพหุนาม $4x^2 - (x-3)^2$

วิธีทำ $4x^2 - (x-3)^2$
$$= (2x)^2 - (x-3)^2$$
$$= \big(2x - (x-3)\big)\big(2x + (x-3)\big)$$
$$= (x+3)(3x-3) = 3(x+3)(x-1)$$

ตัวอย่างที่ 6 แยกตัวประกอบของพหุนาม $(2a+b)^2 - (a-2b)^2$

วิธีทำ $(2a+b)^2 - (a-2b)^2 = \big((2a+b) - (a-2b)\big)\big((2a+b) + (a-2b)\big)$
$$= (2a + b - a + 2b)(2a + b + a - 2b)$$
$$= (a+3b)(3a-b)$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 คูณกระจายพหุนามโดยใช้เอกลักษณ์ของพหุนาม หรือ แยกตัวประกอบของพหุนาม

พหุนามในรูปการกระจาย	พหุนามที่จัดรูปผลสำเร็จหรือตัวประกอบแล้ว
	$(x+3)^2$
x^2-9	
	$(2x-5)^2$
$4x^2-25$	
	$(x+2)^3$
x^3+8	
	$(3x-2)^3$
$8x^3-1$	
	$(2x+3y)^2$
$9x^2-4y^2$	
	$(x-4y)^2$
x^2+6x+9	
	$(2a+b)^3$
$27a^3+b^3$	
	$(3x+1)^2-(x-2)^2$
$(3x+1)^2-(x-2)^2$	
	$(2x+1)^2-(x-3)^2$
$(2x-1)^3+(x+2)^3$	
	$4a^2-(a-2b)^2$
$(3a-2b)^2-(a+4b)^2$	

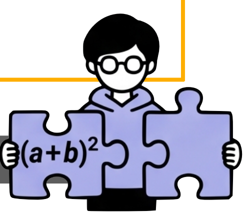
ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

❶ $(2x+3)^3-(x-2)^3$

❷ $(3x-1)^2+(2x+5)^2-(x-4)^2$

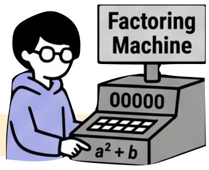
❸ แยกตัวประกอบ $x^3+27y^3-3xy(x+3y)$

❹ แยกตัวประกอบ $(2a+b)^2-(a-2b)^2$



เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ $7x^3+42x^2+78x+35$ ❷ $12x^2+2x+10$ ❸ $(x+3y)(x-3y)^2$ ❹ $(a+3b)(3a-b)$

วันที่ 8 การแยกตัวประกอบของพหุนาม



Level : มัธยมศึกษาปีที่ 2 - 3 วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- ในกรณีของจำนวนนับ **ตัวประกอบของจำนวนนับ** n คือบรรดาจำนวนนับที่สามารถนำไปหารจำนวนนับ n ได้ลงตัว เช่น ตัวประกอบของ 14 คือ1,2,7,14 ทั้งนี้ เราสามารถเขียนจำนวนในรูปผลคูณของตัวประกอบเฉพาะ (ตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะ) เช่น $14 = 2 \times 7$ การเขียนรูปลักษณะนี้เรียกว่า การแยกตัวประกอบของจำนวนนับ
- ในกรณีของพหุนาม **การแยกตัวประกอบของพหุนาม** คือการเขียนพหุนามที่กำหนดให้ในรูปผลคูณของพหุนามย่อย ๆ รูปแบบการเขียนที่ถูกต้อง จะต้องแยกตัวประกอบให้สุด
- สมบัติการกระจาย มักถูกใช้เป็นขั้นตอนแรก ๆ ในการแยกตัวประกอบของพหุนาม และมักครอบคลุมทุกกรณี

เช่น $ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (a+b)(x+y)$

$3a^2 - 6ab + 2a - 4b = (3a^2 - 6ab) + (2a - 4b)$

$= 3a(a-2b) + 2(a-2b) = (3a+2)(a-2b)$

- **ตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปแบบ $x^2 + bx + c$** เราจะหาคู่ของจำนวนที่คูณกันได้ c และบวกกันได้ b กล่าวคือ หา A, B ซึ่ง $x^2 + bx + c = (x+A)(x+B) = x^2 + (A+B)x + AB$

ข้อสังเกต เรามักแยกตัวประกอบของจำนวนนับ c แล้วดูกรณีที่เป็นไปได้

เช่น $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$: เลือก $A = -3, B = -4$ ซึ่ง $A + B = -7, AB = +12$

$x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$: เลือก $A = 5, B = 2$ ซึ่ง $A + B = +7, AB = +10$

$x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1)$: เลือก $A = -6, B = 1$ ซึ่ง $A + B = -5, AB = -6$

$x^2 + 5x - 6 = (x+6)(x-1)$: เลือก $A = 6, B = -1$ ซึ่ง $A + B = +5, AB = -6$

- **ตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูปแบบ $ax^2 + bx + c$** หาคู่ของจำนวนที่คูณกันได้ $a \times c$ และบวกกันได้ b กล่าวคือ $ax^2 + bx + c = (Ax+B)(Cx+D) = ACx^2 + ADx + BCx + BD$

เช่น $6x^2 - 7x - 3$ มีความเป็นไปได้ที่เกิดวงเล็บ $(2x \quad)(3x \quad)$ หรือ $(6x \quad)(x \quad)$

ต่อไป เติมตัวประกอบของ -3 ที่อาจเป็นไปได้ (8 กรณี) พิจารณาพจน์กลางว่า เมื่อใดที่ได้พจน์กลางเป็น $-7x$

พบว่า $6x^2 - 7x - 3 = (2x-3)(3x+1)$ เนื่องจาก $(2x)(1) + (-3)(3x) = -7x$

- ตัวประกอบของพหุนามบางกรณี ต้องใช้วิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ (ยังไม่กล่าวถึงในขณะนี้)

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $12y^2z - 20yz$

วิธีทำ ตัวร่วมที่ปรากฏทั้งสองพจน์คือ $4yz$

$12y^2z - 20yz = 4yz(3y) - 4yz(5)$

$= 4yz(3y-5)$

ตัวอย่างที่ 2 $4x^2 - 8xy + 3x - 6y$

วิธีทำ $4x^2 - 8xy + 3x - 6y$

$= (4x^2 - 8xy) + (3x - 6y)$

$= 4x(x-2y) + 3(x-2y)$

$= (4x+3)(x-2y)$

ตัวอย่างที่ 3 $x^2 - x - 6$

วิธีทำ $A = -3, B = 2$ ซึ่ง $AB = -6, A + B = -1$

ได้ว่า $x^2 - x - 6 = (x + (-3))(x+2)$

$= (x-3)(x+2)$

ตัวอย่างที่ 4 $x^2 + 4x - 5$

วิธีทำ $A = 5, B = -1$ ซึ่ง $AB = -5, A + B = 4$

ได้ว่า $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x+(-1))$

$= (x+5)(x-1)$

ตัวอย่างที่ 5 $4x^2 + 4x - 3$

วิธีทำ ลองแยกวงเล็บ เช่น $(4x \quad)(x \quad)$ หรือ $(2x \quad)(2x \quad)$

และแยกตัวประกอบของ -3 พบว่า

$4x^2 + 4x - 3 = (2x-1)(2x+3)$

ตัวอย่างที่ 6 $3x^2 - 5x - 2$

วิธีทำ ลองแยกวงเล็บ ได้กรณีเดียว $(3x \quad)(x \quad)$

และแยกตัวประกอบของ -2 พบว่า

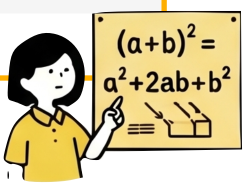
$3x^2 - 5x - 2 = (3x+1)(x-2)$

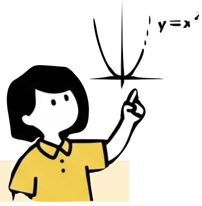
ตัวอย่างที่ 7 $x^2 + x + 1$

วิธีทำ กรณีนี้ไม่สามารถหาจำนวนเต็ม A, B ที่ทำให้ $A + B = 1$ และ $AB = 1$ ได้ จึงไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ (พหุนาม $ax^2 + bx + c$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบได้ ถ้า $b^2 - 4ac < 0$)

ทบทวนความเข้าใจ แยกตัวประกอบของพหุนามที่กำหนดให้ต่อไปนี้

พหุนาม	ตัวประกอบของพหุนาม
$6x + 12$	
$9a^2b + 3ab$	
$4x^3 - 8x^2$	
$2x^2 + 6x + x + 3$	
$4a^2 + 8ab + a + 2b$	
$5x^2 - 10xy + 3x - 6y$	
$x^2 - 4x - 5$	
$x^2 - 4x + 4$	
$x^2 + 9x + 20$	
$x^2 - 6x + 8$	
$x^2 + 3x - 10$	
$x^2 - 8x + 15$	
$x^2 + 11x + 24$	
$x^2 - 2x - 15$	
$2x^2 + 7x + 3$	
$6x^2 - 7x - 3$	
$5x^2 + 13x + 6$	
$-5x^2 - x + 6$	
$3x^2 + 10x + 8$	
$4x^2 - 4x - 15$	
$2x^2 - x - 6$	
$6x^2 + 5x - 6$	
$4x^2 + 11x + 6$	
$-4x^2 + 4x + 3$	
$2x^2 + 9x + 4$	
$3x^2 + x - 4$	
$-2x^2 + x + 3$	
$-3x^2 - 5x + 2$	





วันที่ 9 สมการพหุนามกำลังสอง

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 2 - 3 วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **สมการพหุนามกำลังสอง** คือสมการที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ $a \neq 0$
- การแก้สมการพหุนามกำลังสอง จะใช้การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองเข้าช่วย เพื่อจัดรูปให้อยู่ในรูปตัวประกอบของพหุนาม ถ้า $ax^2 + bx + c = (Ax + B)(Cx + D)$ จะได้ว่า
$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } (Ax + B)(Cx + D) = 0$$
ซึ่งใช้หลักการว่า สำหรับจำนวนจริง m, n ได้ว่า $m \cdot n = 0$ ก็ต่อเมื่อ $m = 0$ หรือ $n = 0$
- **คำตอบของสมการกำลังสอง** สามารถหาได้จากสูตร
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- จากสูตรคำตอบของสมการกำลังสอง สามารถวิเคราะห์จำนวนคำตอบของสมการได้ดังนี้
  - เมื่อ $b^2 - 4ac > 0$ สมการกำลังสองมีคำตอบเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน 2 คำตอบ (คำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ ถ้า $b^2 - 4ac$ เป็นจำนวนกำลังสอง)
  - เมื่อ $b^2 - 4ac = 0$ สมการกำลังสองมีคำตอบซ้ำกัน (มีคำตอบ 1 คำตอบ)
  - เมื่อ $b^2 - 4ac < 0$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง (มีคำตอบเป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยนิยามให้ $i^2 = -1$)

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงแก้สมการพหุนามกำลังสองต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $x^2 - 4 = 0$

วิธีทำ
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x - 2)(x + 2) = 0$$
ได้ว่า $x - 2 = 0$ หรือ $x + 2 = 0$

นั่นคือ $x = 2$ หรือ $x = -2$

ตัวอย่างที่ 2 $x^2 + 5x + 6 = 0$

วิธีทำ
$$x^2 + 5x + 6 = 0$$
$$(x + 2)(x + 3) = 0$$
ได้ว่า $x + 2 = 0$ หรือ $x + 3 = 0$

นั่นคือ $x = -2$ หรือ $x = -3$

ตัวอย่างที่ 3 $x^2 - x - 6 = 0$

วิธีทำ
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x - 3)(x + 2) = 0$$
ได้ว่า $x - 3 = 0$ หรือ $x + 2 = 0$

นั่นคือ $x = 3$ หรือ $x = -2$

ตัวอย่างที่ 4 $x^2 + 4x + 4 = 0$

วิธีทำ
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$(x + 2)^2 = 0$$
ได้ว่า $x + 2 = 0$

นั่นคือ $x = -2$

ตัวอย่างที่ 5 $2x^2 + 7x + 3 = 0$

วิธีทำ
$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$
$$(2x + 1)(x + 3) = 0$$
ได้ว่า $2x + 1 = 0$ หรือ $x + 3 = 0$

นั่นคือ $x = -\frac{1}{2}$ หรือ $x = -3$

ตัวอย่างที่ 6 $6x^2 - x - 2 = 0$

วิธีทำ
$$6x^2 - x - 2 = 0$$
$$(3x - 2)(2x + 1) = 0$$
ได้ว่า $3x - 2 = 0$ หรือ $2x + 1 = 0$

นั่นคือ $x = \frac{2}{3}$ หรือ $x = -\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 7 $x^2 - 2x - 1 = 0$

วิธีทำ ใช้สูตรสมการกำลังสอง
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
นั่นคือ $x = 1 + \sqrt{2}$ หรือ $x = 1 - \sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 8 $2x^2 + x + 1 = 0$

วิธีทำ ใช้สูตรสมการกำลังสอง เนื่องจาก
$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$$
สมการดังกล่าวจึงไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง แต่เราได้ว่า
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{4} \quad (\text{เมื่อ } i^2 = -1)$$
นั่นคือ $x = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{4}$ หรือ $x = \frac{-1 - \sqrt{7}i}{4}$

ทบทวนความเข้าใจ 1 แก้สมการพหุนามกำลังสองต่อไปนี้

สมการพหุนามกำลังสอง	คำตอบของสมการ
$x^2 - 9 = 0$	
$4x^2 - 1 = 0$	
$2x^2 - 4 = 0$	
$x^2 + 7x + 12 = 0$	
$x^2 - 3x - 10 = 0$	
$x^2 + 4x + 3 = 0$	
$x^2 - x - 12 = 0$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : แก้สมการพหุนามกำลังสองต่อไปนี้

❶ $2x^2 + 5x + 2 = 0$

❷ $3x^2 - x - 2 = 0$

❸ $4x^2 + 4x - 3 = 0$

❹ $6x^2 - 7x - 3 = 0$

❺ $5x^2 + 13x + 6 = 0$

❻ $2x^2 - x - 6 = 0$

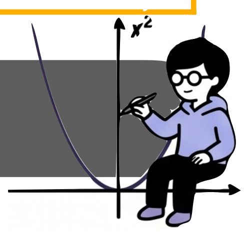
❼ $x^2 - 6x - 5 = 0$

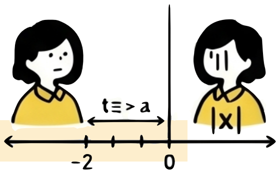
❽ $2x^2 - 3x - 1 = 0$

❾ $x^2 + 2x + 5 = 0$

❿ $x^2 + x + 1 = 0$

เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ $x = -\frac{1}{2}, -2$ ❷ $x = -\frac{2}{3}, 1$ ❸ $x = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ ❹ $x = -\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ ❺ $x = -\frac{3}{5}, -2$ ❻ $x = -\frac{3}{2}, 2$ ❼ $x = 3 \pm \sqrt{14}$ ❽ $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$ ❾ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง ❿ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง





วันที่ 10 อสมการและค่าสัมบูรณ์

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3 - 4 วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **อสมการ** คือประโยคทางคณิตศาสตร์ที่มีเครื่องหมายบอกถึงการไม่เท่ากับกำกับอยู่ ประกอบด้วย มากกว่า ($>$) น้อยกว่า ($<$) มากกว่าหรือเท่ากับ ($\geq$) น้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$) และไม่เท่ากับ ($\neq$)
- หลักการแก้อสมการเชิงเส้น ทำในทำนองคล้ายกันกับการแก้สมการเชิงเส้น แต่ต้องระมัดระวังการคูณหรือหารด้วยเครื่องหมายลบ ที่จะทำให้เครื่องหมายของอสมการเปลี่ยนข้าง

  เช่น $2x+1 \leq x-2$ ได้ว่า $x \leq -3$

  $-5x+4 \geq -1$ ได้ว่า $-5x \geq -5$ นั่นคือ $x \leq 1$
- **อสมการกำลังสอง** ต้องใช้การแยกตัวประกอบของพหุนามในการพิจารณาเครื่องหมายของอสมการ โดยต้องพิจารณาว่าพจน์ผลคูณเป็นบวกเมื่อใด เป็นลบเมื่อใด โดยการพิจารณาบนเส้นจำนวน
- เราสามารถเขียนเซตของจำนวนในรูปของช่วง (interval) ได้ ดังนี้

แก้อสมการ $(x-1)(x+1) > 0$

เครื่องหมายอาจเปลี่ยนที่ $x = -1, 1$

เครื่องหมาย		-1		1	
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$
$(x+1)$	$-$		$+$		$+$
$(x-1)(x+1)$	$+$		$-$		$+$

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$
- $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$
- $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\}$
- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$
- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$

- การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ ใช้หลักการว่า $|x| = a$ ก็ต่อเมื่อ $x = a$ หรือ $x = -a$

  เช่น $|x-2| = 3$ ได้ว่า $x-2 = 3$ หรือ $x-2 = -3$ นั่นคือ $x = 5$ หรือ $x = -1$
- อสมการค่าสัมบูรณ์ ใช้หลักการว่า $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$

  และ $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

  เช่น $|x-2| \geq 3$ ได้ว่า $x-2 \geq 3$ หรือ $x-2 \leq -3$ ได้เซตคำตอบของอสมการคือ $(-\infty,-1) \cup (5,\infty)$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : จงแก้อสมการ - สมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 $3x+5 > 11$

วิธีทำ

$$3x+5 > 11$$
$$3x > 6$$
$$x > 2$$

เซตคำตอบของอสมการ คือ $(2,\infty)$

ตัวอย่างที่ 2 $-2x+3 \leq 7+4x$

วิธีทำ

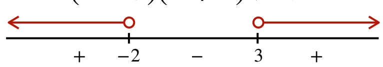
$$-2x+3 \leq 7+4x$$
$$-6x \leq 4$$
$$x \geq -\frac{2}{3}$$

เซตคำตอบของอสมการ คือ $\left[-\frac{2}{3},\infty\right)$

ตัวอย่างที่ 3 $x^2-x-6 > 0$

วิธีทำ

$$x^2-x-6 > 0$$
$$(x-3)(x+2) > 0$$

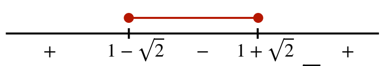


เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty,-2) \cup (3,\infty)$

ตัวอย่างที่ 4 $x^2-2x-1 \leq 0$

วิธีทำ ใช้สูตรสมการกำลังสองช่วยแยกตัวประกอบได้ คือ

$$(x-(1-\sqrt{2}))(x-(1+\sqrt{2})) \leq 0$$



เซตคำตอบของอสมการ คือ $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

ตัวอย่างที่ 5 $|2x-3| = 5$

วิธีทำ จากสมการค่าสัมบูรณ์ได้ว่า

$2x-3 = 5$ หรือ $2x-3 = -5$

$2x = 8$ หรือ $2x = -2$

ได้ว่า $x = 4$ หรือ $x = -1$

ตัวอย่างที่ 6 $|6-2x| \leq 4$

วิธีทำ จากอสมการค่าสัมบูรณ์ได้ว่า $-4 \leq 6-2x \leq 4$

หรือ $-10 \leq -2x \leq -2$

หารด้วย -2 ทั้งอสมการ $5 \geq x \geq 1$

คืออสมการ $1 \leq x \leq 5$

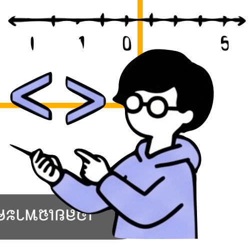
ได้เซตคำตอบของอสมการ คือ $[1,5]$

ทบทวนความเข้าใจ 1 เขียนเงื่อนไขที่กำหนดให้อยู่ในรูปช่วง หรือ เขียนเงื่อนไขจากช่วง พร้อมเขียนเส้นจำนวน

เงื่อนไขที่กำหนด	ช่วง	เส้นจำนวน
$x > 3$		
$-2 \leq x < 5$		
$x \leq -1$		
$x \neq 4$		
	$(1,\infty)$	
	$(-3,2]$	
	$(-\infty,-2)$	
	$(-1,3] \cup (7,\infty)$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : แก้สมการ - อสมการต่อไปนี้ สำหรับอสมการ ตอบในรูปช่วง

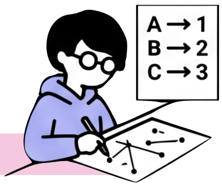
❶ $3x - 5 > 2x + 1$	❷ $-2x + 4 \leq x - 5$
❸ $-3 < 2x + 1 \leq 5$	❹ $x^2 - 5x + 6 > 0$
❺ $x^2 + x - 6 \leq 0$	❻ $2x^2 - 3x - 2 > 0$
❼ $\lvert x - 2 \rvert = 4$	❽ $\lvert 2x + 1 \rvert = 3$
❾ $\lvert x - 3 \rvert \geq 2$	❿ $\lvert 2x + 1 \rvert \leq 5$



เฉลยแบบฝึกหัด : ❶ $(6,\infty)$ ❷ $[3,\infty)$ ❸ $(-2,2]$ ❹ $(-\infty,2) \cup (3,\infty)$ ❺ $[-3,2]$ ❻ $(-\infty,-\frac{1}{2}) \cup (2,\infty)$ ❼ $x = -2,6$ ❽ $x = -2,1$ ❾ $(-\infty,1] \cup [5,\infty)$ ❿ $[-3,2]$

ช่วงที่ 3

ฟังก์ชันพื้นฐาน



วันที่ 11 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

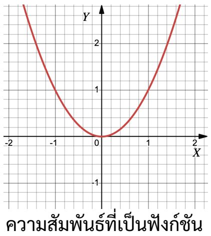
Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 | วัน / เวลาที่ทำ :

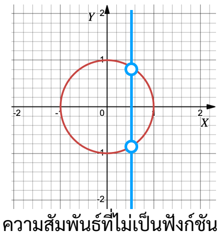
Main Concept : สาระสำคัญ

- กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง
- หากกำหนด**ตัวแปรต้น** x **ตัวแปรตาม** y (สิ่งที่เปลี่ยนไปตามตัวแปรต้น) ตัวแปร x กับ y มักมีความสัมพันธ์กัน ในทางคณิตศาสตร์ ความสัมพันธ์ r คือเซตของคู่อันดับที่สอดคล้องกับเงื่อนไข เขียนได้ในรูปเซตได้ดังนี้

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \text{เงื่อนไขบางประการ}\}$$

- ความสัมพันธ์ชนิดพิเศษบนเซตของจำนวนจริงที่มีคุณสมบัติว่า สำหรับ x ใน $\mathbb{R}$ หนึ่งตัว สัมพันธ์กับ y ใน $\mathbb{R}$ เพียงหนึ่งตัวเท่านั้น เรียกว่า **ฟังก์ชัน (function)**
- เราอาจแทนความสัมพันธ์ได้ในรูปแบบกราฟในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน ที่มีแกนนอนคือแกน X และแกนตั้งคือแกน Y ได้ เซตของจุด (x, y) ที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ คือกราฟของความสัมพันธ์
- เราสามารถตรวจสอบกราฟของความสัมพันธ์ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ ได้จากการลากเส้นตรงขนานกับแกน Y หากพบว่าเส้นตรงนั้นตัดกราฟมากกว่า 1 จุด แสดงว่า ความสัมพันธ์ดังกล่าวไม่เป็นฟังก์ชัน


ความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน


ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน

- ฟังก์ชันค่าจริง มักเขียนฟังก์ชันได้ในรูปแบบสูตร เช่น เมื่อให้ y เป็นฟังก์ชันของ x จะเขียนฟังก์ชันในรูป $y = f(x)$ ได้ และการคำนวณค่าของฟังก์ชัน จะแทนค่าที่ต้องการลงในตัวแปร x ในสูตรที่กำหนดให้
  เช่น $f(x) = 2x + 1$ พบว่า $f(0) = 2(0) + 1 = 1,\ f(2) = 2(2) + 1 = 5,\ f(a) = 2(a) + 1 = 2a + 1$
  $g(x) = 3x^2 - 1$ พบว่า $g(0) = 3(0)^2 - 1 = -1,\ g(2) = 3(2)^2 - 1 = 11$
- **ฟังก์ชันเชิงเส้น** (linear function) คือฟังก์ชันที่เขียนได้ในรูป $f(x) = ax + b$ มีกราฟเป็นเส้นตรง
- **ฟังก์ชันกำลังสอง** (quadratic function) คือฟังก์ชันที่เขียนได้ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a \neq 0$ มีกราฟเป็นพาราโบลา เราจะกล่าวถึงกราฟดังกล่าวในภายหลัง

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $f(x) = 3x + 4$
จงหา $f(2), f(-1)$
วิธีทำ $f(2) = 3(2) + 4 = 6 + 4 = 10$
$f(-1) = 3(-1) + 4 = -3 + 4 = 1$

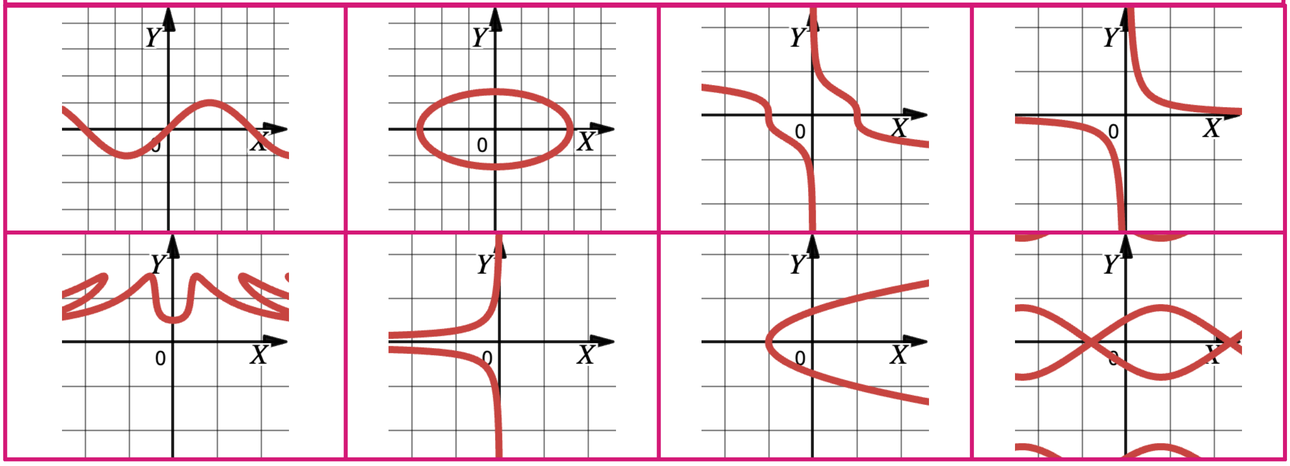
ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x) = -5x + 2$
จงหา $f(1), f(-2)$
วิธีทำ $f(1) = -5(1) + 2 = -5 + 2 = -3$
$f(-2) = -5(-2) + 2 = 10 + 2 = 12$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $f(x) = x^2 - 3x + 2$
จงหา $f(1), f(-1), f(0), f(a)$
วิธีทำ $f(1) = (1)^2 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$
$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) + 2 = 1 + 3 + 2 = 6$
$f(0) = (0)^2 - 3(0) + 2 = 2$
$f(a) = a^2 - 3a + 2$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $f(x) = x^2 + 1$
จงหา $f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), f\left(\frac{1}{2}\right)$
วิธีทำ $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$
$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $f(x) = x^2 + 2x - 1$
จงหา $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ เมื่อ $h \neq 0$
วิธีทำ $f(a+h) = (a+h)^2 + 2(a+h) - 1 = a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2h - 1$
$f(a) = a^2 + 2a - 1$
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2h - 1) - (a^2 + 2a - 1)}{h}$$
$$= 2a + h + 2$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 กราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ข้อใดไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะเหตุใด



ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงหาค่าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

❶ กำหนด $f(x) = 5$
จงหา $f(2), f(-3), f\left(\frac{1}{2}\right)$

❷ กำหนด $f(x) = 2x + 1$
จงหา $f(-1), f(3), f\left(\sqrt{2}\right)$

❸ กำหนด $f(x) = -3x + 4$
จงหา $f(2), f(-2), f\left(\frac{1}{3}\right)$

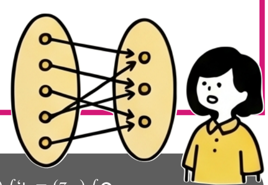
❹ กำหนด $f(x) = x^2$
จงหา $f(-2), f(3), f\left(\frac{1}{2}\right)$

❺ กำหนด $f(x) = x^2 - 2x$
จงหา $f(1), f(-1), f\left(\sqrt{3}\right)$

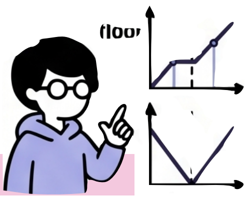
❻ กำหนด $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
จงหา $f(0), f(2), f\left(-\frac{1}{2}\right)$

❼ กำหนด $f(x) = -x + 4$
จงหา $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ เมื่อ $h \neq 0$

❽ กำหนด $f(x) = 3x^2 - 2x$
จงหา $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ เมื่อ $h \neq 0$



เฉลยทบทวนความเข้าใจ : ❶ $f(2) = 5, f(-3) = 5, f\left(\frac{1}{2}\right) = 5$ ❷ $f(-1) = -1, f(3) = 7, f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 1$ ❸ $f(2) = -2, f(-2) = 10, f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$
❹ $f(-2) = 4, f(3) = 9, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ ❺ $f(1) = -1, f(-1) = 3, f(\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3}$ ❻ $f(0) = 1, f(2) = 3, f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$ ❼ -1 ❽ $6a + 3h - 2$



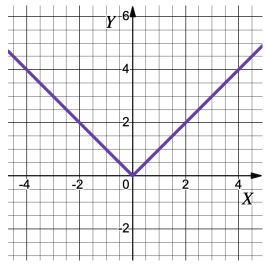
วันที่ 12 ฟังก์ชันบางชนิดที่น่าสนใจ

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **โดเมนของฟังก์ชัน** f (แทนด้วย D_f) คือเซตของจำนวนซึ่งสามารถคำนวณค่าของฟังก์ชันได้
  เช่น กำหนด $f(x) = 2x + 1$ ได้ว่า $D_f = \mathbb{R}$ (คำนวณค่าของฟังก์ชันได้ทุกค่าในจำนวนจริง)
  กำหนด $g(x) = \sqrt{x}$ ได้ว่า $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0,\infty)$ (ภายใต้เครื่องหมาย $\sqrt{\ }$ เป็นบวกเสมอ)
  กำหนด $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ได้ว่า $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ (ตัวส่วนห้ามเป็นศูนย์)

- **ฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง** (piecewise-defined function) เป็นฟังก์ชันที่นิยามตามที่เงื่อนไขกำกับ การคำนวณค่าขึ้นอยู่กับเงื่อนไขที่กำกับอยู่
  เช่น $f(x) = \begin{cases} -x+1 & ; x \leq 0 \\ 2x+2 & ; x > 0 \end{cases}$ จะได้ว่า $f(-2) = -2+1 = -1$
  $f(0) = 0+1 = 1,\ f(1) = 2(1)+2 = 4$



กราฟของ $f(x) = |x|$

- **ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์** (absolute functin) เป็นฟังก์ชันที่เขียนได้ในรูปฟังก์ชันที่นิยามตามช่วง กล่าวคือ
  $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ x & ; x \geq 0 \end{cases}$ เช่น $f(-1) = -(-1) = 1,\ f(\pi) = \pi$

- **ฟังก์ชันตรรกยะ** (rational function) เป็นฟังก์ชันในรูป $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ โดยที่ $q(x) \neq 0$ โดเมนคือเซตของจำนวนจริงที่ยกเว้นค่า x ที่ทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

วิธีทำ จากเงื่อนไข ได้ว่า $1 - x^2 \geq 0$
หรือ $x^2 - 1 \leq 0$ ได้อสมการ $(x-1)(x+1) \leq 0$
เซตคำตอบของอสมการคือ $[-1,1]$
นั่นคือ $D_f = [-1,1]$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

วิธีทำ พิจารณาเงื่อนไข 1) $x+2 \geq 0$ และ 2) $x + 2 \neq 0$
ได้ว่า โดเมนคือ $[-2,\infty) \cap (\mathbb{R} - \{-2\})$
ดังนั้น โดเมนคือ $(-2,\infty)$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0 \\ 2x+3, & x \geq 0 \end{cases}$

จงหา $f(-2), f(0), f(3)$

วิธีทำ $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$
$f(0) = 2(0) + 3 = 3$
$f(3) = 2(3) + 3 = 9$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

จงหา $f(2), f(-1)$

วิธีทำ $f(2) = \dfrac{4-1}{2-1} = 3$
$f(-1) = \dfrac{1-1}{-1-1} = 0$

หมายเหตุ ถ้ากำหนด $g(x) = x + 1$
จะกล่าวว่า $f(x) \neq g(x)$ เนื่องจาก $D_f \neq D_g$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$ จงหา $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ เมื่อ $h > 0$ และเมื่อ $h < 0$

วิธีทำ เมื่อ $h > 0$ ได้ว่า $1 + h > 0$ จึงได้ว่า $f(1+h) = (1+h)+1 = 2+h$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{2+h-1}{h} = \dfrac{1+h}{h} = \dfrac{1}{h} + 1$

เมื่อ $h < 0$ ได้ว่า $1 + h < 0$ จึงได้ว่า $f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{1+2h+h^2-1}{h} = \dfrac{2h+h^2}{h} = 2 + h$

ทบทวนความเข้าใจ 1 คำนวณค่าของฟังก์ชัน ณ จุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	โจทย์ให้คำนวณ	ค่าของฟังก์ชัน
$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<1 \\ x+4, & x\ge 1 \end{cases}$	$f(0)$	
	$f(1)$	
	$f(\pi)$	
$g(x)=\begin{cases} 3x-2, & x\le -1 \\ x^2+1, & x>-1 \end{cases}$	$g(-\sqrt{2})$	
	$g(-1)$	
	$g(0)$	
$h(x)=\begin{cases} x+4, & x<0 \\ x^2, & 0\le x<2 \\ 2x-1, & x\ge 2 \end{cases}$	$h(-1)$	
	$h(1)$	
	$h(2)$	
$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$	$f(3)$	
	$f(-2)$	
	$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$	
$g(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$	$g(1)$	
	$g(2)$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด

❶ จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{2x^2-5x-3}$

❷ จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $k(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

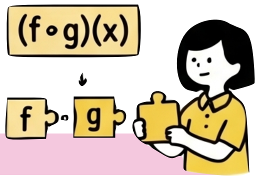
❸ กำหนด $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ x+2, & x>1 \end{cases}$

จงหา $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ เมื่อ $h>0$ และ $h<0$

❹ กำหนด $g(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<2 \\ x^2-3, & x\ge 2 \end{cases}$

จงหา $\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}$ เมื่อ $h>0$ และ $h<0$

เฉลยแบบฝึกหัดทบทวน : ❶ $D_f=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[3,\infty)$ ❷ $D_k=(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$ ❸ $\frac{2+h}{h}\ (h>0);\ 2+h\ (h<0)$ ❹ $4+h\ (h>0);\ \frac{2h+2}{h}\ (h<0)$



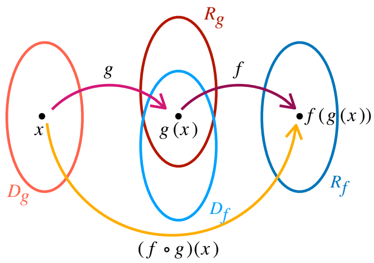
วันที่ 13 การสร้างฟังก์ชันใหม่

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **พีชคณิตของฟังก์ชัน** หากมีฟังก์ชัน f และ g เดิม เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่จากฟังก์ชันเดิมได้โดยการบวก ลบ คูณ หาร ฟังก์ชันเดิมได้ โดยที่โดเมนของฟังก์ชันใหม่ที่สร้างขึ้น จะเป็นผลตัด (intersection) ของฟังก์ชันที่นำมาสร้างใหม่ เช่น กำหนด $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ ได้ว่า $h(x) := (f + g)(x) = 2x + 1 + \sqrt{x}$
  โดยที่โดเมนของ $h(x)$ คือ $D_h = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [0,\infty) = [0,\infty)$

- **ฟังก์ชันประกอบ** (composite function) เป็นฟังก์ชันเกิดจากการนำฟังก์ชันหนึ่งไปคำนวณค่าในฟังก์ชันอีกฟังก์ชันหนึ่ง หากกำหนด $y = f(u)$ และ $u = g(x)$
  จะได้ว่า $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ ดังแผนภาพ
  ภายใต้เงื่อนไขว่า $D_f \cap R_g \neq \varnothing$ (R_g คือ เรนจ์ของฟังก์ชัน g)
  เช่น ให้ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = 2x + 1$
  ได้ว่า $h(x) := f(g(x)) = (g(x))^2 = (2x + 1)^2$
  ทำนองกลับกัน $j(x) := g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2x^2 + 1$
  โดยทั่วไป $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$



ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = x^2 - 3$
จงหา $(f + g)(x), (f + g)(2), (f \circ g)(x), (f \circ g)(2), (g \circ f)(x), (g \circ f)(2)$

<u>วิธีทำ</u> $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (2x + 1) + (x^2 - 3) = x^2 + 2x - 2$
ดังนั้น $(f + g)(2) = 2^2 + 2(2) - 2 = 6$ ซึ่งเท่ากับ $f(2) + g(2) = 5 + 1 = 6$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x)) + 1 = 2(x^2 - 3) + 1 = 2x^2 - 5$ ซึ่ง $(f \circ g)(2) = 2(2)^2 - 5 = 3$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 - 3 = 4x^2 + 4x - 2$ ซึ่ง $(g \circ f)(2) = 4(2)^2 - 4(2) - 2 = 6$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $h(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$
จงเขียนฟังก์ชัน $h(x)$ ในรูป $y = f(u), u = g(x)$

<u>วิธีทำ</u> เลือกฟังก์ชัน $y = f(u) = \sqrt{u}$
และ $u(x) = 2x^2 + 1$
ได้ว่า $h(x) = \sqrt{u(x)} = \sqrt{2x^2 + 1}$
และเราได้ว่า $D_h = \mathbb{R}$
เนื่องจาก $2x^2 + 1 \geq 1$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $h(x) = (2x + 5)^3$
จงเขียนฟังก์ชัน $h(x)$ ในรูป $y = f(u), u = g(x)$

<u>วิธีทำ</u> เลือกฟังก์ชัน $y = f(u) = u^3$
และ $u(x) = 2x + 5$
ได้ว่า $h(x) = (u(x))^2 = (2x + 5)^3$
และเราได้ว่า $D_h = \mathbb{R}$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 4}$
จงเขียนฟังก์ชัน $h(x)$ ในรูป $y = f(u), u = g(x)$

<u>วิธีทำ</u> เลือกฟังก์ชัน $y = f(u) = \dfrac{u}{2u - 6}$
และ $u(x) = x^2 + 1$
ได้ว่า $h(x) = \dfrac{u(x)}{2u(x) - 6} = \dfrac{x^2 + 1}{2(x^2 + 1) - 6}$
และเราได้ว่า $D_h = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}$
เนื่องจาก $2x^2 - 4 \neq 0$ หรือได้ว่า $x \neq \pm\sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}, g(x) = x^2 + 1$
และ $h(x) = 2x - 3$ จงหา $f(g(h(2)))$

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned} f(g(h(x))) &= f(g(2x - 3)) \\ &= f\left((2x - 3)^2 + 1\right) \\ &= \frac{1}{((2x - 3)^2 + 1) - 1} \\ &= \frac{1}{(2x - 3)^2} \end{aligned}$$
ดังนั้น $f(g(h(2))) = \dfrac{1}{(2(2) - 3)^2} = 1$

ทบทวนความเข้าใจ 1 เมื่อกำหนดฟังก์ชันให้ จงเขียนฟังก์ชันให้อยู่ในรูป $y = f(u)$, $u = g(x)$ พร้อมหาโดเมน

ฟังก์ชัน $h(x)$	$y = f(u)$	$u = g(x)$	โดเมนของ $h(x)$
$h(x) = (x+2)^2$			
$h(x) = \sqrt{x+3}$			
$h(x) = (2x-1)^3$			
$h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$			
$h(x) = \sqrt{3x^2+2x}$			
$h(x) = (x^2-1)^2$			
$h(x) = \sqrt{(2x+1)^2+3}$			
$h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด

❶ กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 1, \quad g(x) = \dfrac{2}{x-1}$
จงหาค่า $f(g(3))$

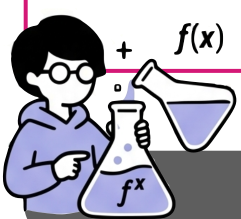
❷ กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x+4}, \quad g(x) = 3x^2 - 2$
จงหาค่า $f(g(2)), g(f(2))$

❸ กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}, \quad g(x) = x^2 - 1$
จงหาค่า $f(g(-2)), g(f(-2))$

❹ กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1,\ g(x) = x^2$ และ $h(x) = \sqrt{x+5}$ จงหาค่า $h(g(f(1)))$

❺ กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = |x-2|$ และ $h(x) = x^2 + 3$ จงหาค่า $h(g(f(-1)))$

❻ กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = |x^2 - 1|$ และ $h(x) = x - 1$ จงหาค่า $f(g(h(0)))$



เฉลยแบบฝึกหัด : ❶ $f(g(3)) = 2$ ❷ $f(g(2)) = \sqrt{14}, g(f(2)) = 16$ ❸ $f(g(-2)) = 4, g(f(-2)) = -\dfrac{15}{16}$
❹ $h(g(f(1))) = \sqrt{14}$ ❺ $h(g(f(-1))) = 12$ ❻ $f(g(h(0))) = 1$

วันที่ 14 สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน

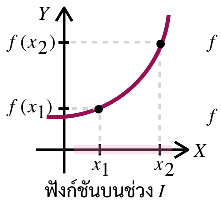
Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

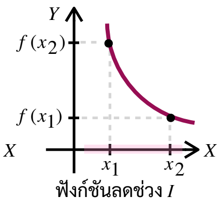
- ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing function) บนช่วง I สำหรับทุก $x_1, x_2 \in I$ ถ้า $x_1 \leq x_2$ แล้ว $f(x_1) \leq f(x_2)$
- ฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันลด** (decreasing function) บนช่วง I สำหรับทุก $x_1, x_2 \in I$ ถ้า $x_1 \leq x_2$ แล้ว $f(x_1) \geq f(x_2)$

  เช่น สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ พบว่า

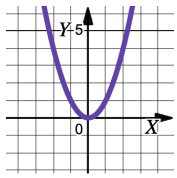
  f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,0)$



ฟังก์ชันบนช่วง I

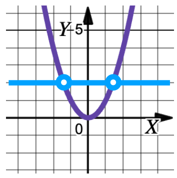


ฟังก์ชันลดช่วง I

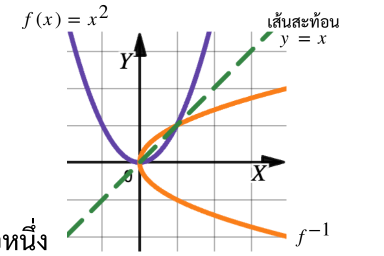


กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$

- ให้ f เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง** (one-to-one function) เมื่อสำหรับ $x_1, x_2 \in D_f$ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$
- เราอาจตรวจสอบว่าฟังก์ชันหนึ่งไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งได้ จากการลากเส้นตรงขนานแกน X หากเส้นตรงตัดกราฟมากกว่าหนึ่งจุด แสดงว่าฟังก์ชันดังกล่าวไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง
- **ตัวผกผัน** (inverse) ของฟังก์ชัน f หาได้จากการสลับ x และ y แล้วเขียน y ในรูปของ x ตัวผกผันนี้เขียนแทนด้วย f^{-1}
- กราฟของตัวผกผันของฟังก์ชันวาดได้จากการสะท้อนกราฟของ $y = f(x)$ ผ่านไปยังเส้นตรง $y = x$
- ตัวผกผันของฟังก์ชันอาจไม่เป็นฟังก์ชัน แต่เราทราบว่า ฟังก์ชัน f มี**ฟังก์ชันผกผัน** (inverser function) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง



กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง



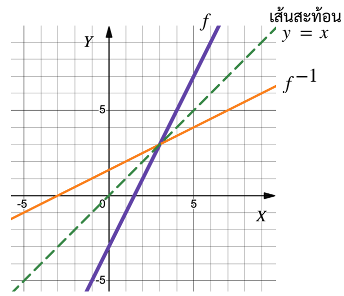
ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 3$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ดังกราฟสีม่วง

1. f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง
2. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนเซต $\mathbb{R}$
3. พิจารณาตัวผกผันของ f : สลับ x และ y พบว่า

   $x = 2y - 3$ หรือได้ว่า $y = \dfrac{x+3}{2}$

   นั่นคือ $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$ แสดงดังกราฟ ทั้งนี้ $f^{-1}(5) = \dfrac{5+3}{2} = 4$

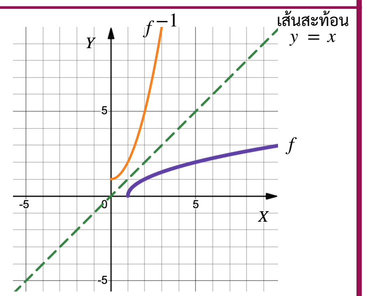


ตัวอย่างที่ 2 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x-1}$ สำหรับทุก $x \in [1,\infty)$ ดังกราฟสีม่วง

1. f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง
2. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[1,\infty)$
3. พิจารณาตัวผกผันของ f : สลับ x และ y พบว่า

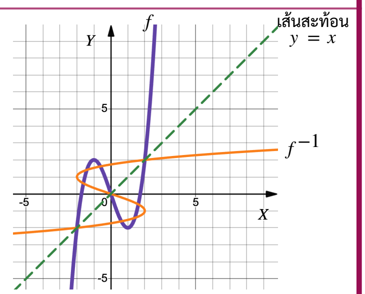
   $x = \sqrt{y-1}$ หรือได้ว่า $y = x^2 + 1$ เมื่อ $y \geq 1, x \geq 0$

   นั่นคือ $f^{-1}(x) = x^2 + 1$ แสดงดังกราฟ ทั้งนี้ $f^{-1}(4) = 4^2 + 1 = 17$

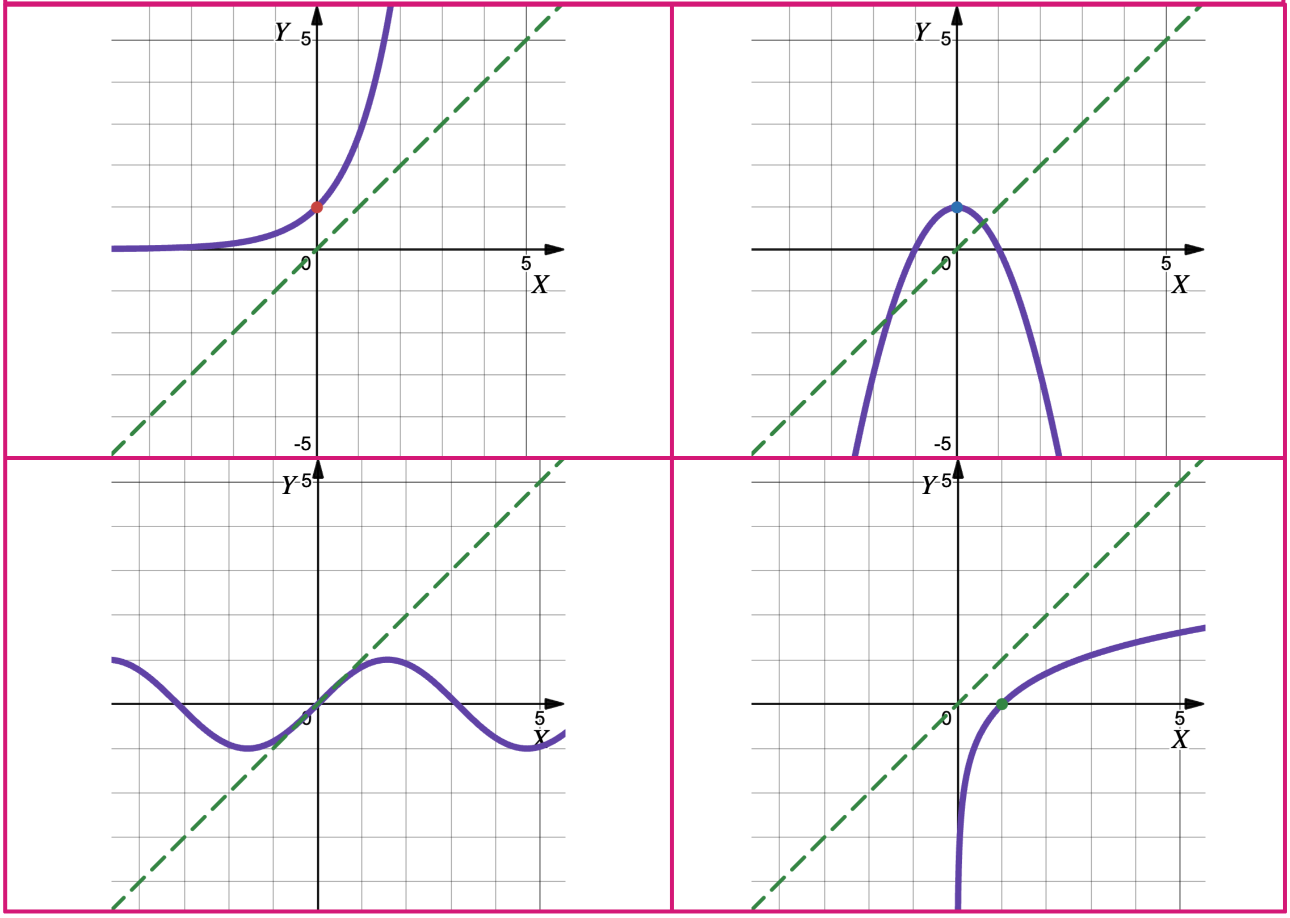


ตัวอย่างที่ 3 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x$ ดังกราฟสีม่วง

1. f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เนื่องจากมี $x_1 = -1, x_2 = 2$ ที่ $f(x_1) = 2 = f(x_2)$ แต่ $x_1 \neq x_2$
2. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,-1)$ และ $(1,\infty)$
   f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-1,1)$
3. f ไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ตัวผกผันจึงไม่เป็นฟังก์ชัน



ทบทวนความเข้าใจ 1 ร่างกราฟของตัวผกผันของความสัมพันธ์ พร้อมอธิบายว่าฟังก์ชันเพิ่ม / ลดบนช่วงใด



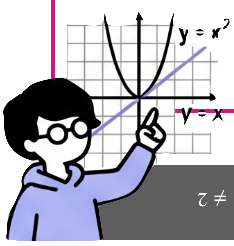
ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : กำหนดฟังก์ชันต่อไปนี้ จงหาฟังก์ชันผกผัน (ถ้ามี)

❶ $f(x) = -3x + 4$

❷ $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

❸ $f(x) = x^2 + 2$ เมื่อ $x \geq 0$

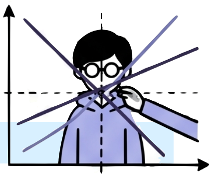
❹ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ เมื่อ $x \neq 1$



เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ $f^{-1}(x) = \frac{4-x}{3}$ ❷ $f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{3}, x \geq 0$ ❸ $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2$ ❹ $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}, x \neq 2$

ช่วงที่ 4

กราฟของฟังก์ชันและเรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น



วันที่ 15 กราฟเส้นตรง

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3 - 4 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- สมการในรูปทั่วไปของเส้นตรงในระนาบ เขียนได้ในรูป

$$Ax + By + C = 0$$

- เมื่อเขียนสมการดังกล่าวให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้สมการในรูป

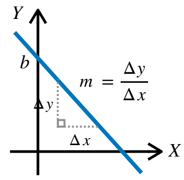
$y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ หรือเขียนได้ในรูป $y = mx + b$

โดยที่ $m = -\dfrac{A}{B}$ คือ **ความชัน** (slope) ของเส้นตรง

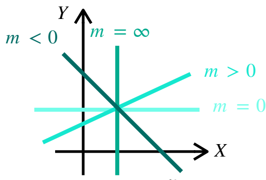
และ $b = -\dfrac{C}{B}$ คือ **จุดตัดแกน Y** (Y-intercept) ของเส้นตรงดังกล่าว

- ทั้งนี้ เส้นตรงในรูปฟังก์ชันเส้นตรง คือ $y = f(x) = mx + b$
- $m = 0$: เส้นตรงขนานแกน X $\quad m > 0$: เส้นตรงทำมุมแหลมกับแกน X

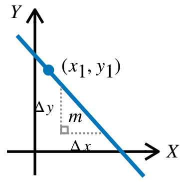
$m = \infty$: เส้นตรงตั้งฉากแกน X $\quad m < 0$: เส้นตรงทำมุมป้านกับแกน X



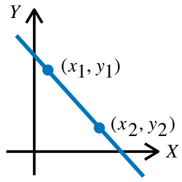
Slope-intercept form



ความชันของเส้นตรง



Point-slope form



Two-points form

- ในการสร้างสมการเส้นตรง มีวิธีการสร้างได้หลายรูปแบบ อาทิ
  - เมื่อทราบจุดผ่าน (x_1, y_1) และความชัน m สมการเส้นตรง คือ $y - y_1 = m(x - x_1)$
  - เมื่อทราบจุดผ่านสองจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ สมการเส้นตรง คือ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

(ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดนั้นคือ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$)

- ถ้า m_1, m_2 เป็นความชันของเส้นตรง ℓ_1, ℓ_2 ได้ว่า ℓ_1 ขนานกับ ℓ_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$

และ ℓ_1 ตั้งฉากกับ ℓ_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 \cdot m_2 = -1$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $3x - 2y + 6 = 0$ จงเขียนรูปมาตรฐาน หาความชัน จุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y

วิธีทำ สมการในรูปมาตรฐานคือ $y = \dfrac{3}{2}x + 3$

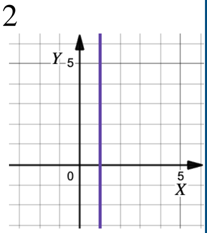
1. ความชันคือ $m = \dfrac{3}{2}$
2. จุดตัดแกน Y (ให้ $x = 0$) คือจุด $(0,3)$
3. จุดตัดแกน X (ให้ $y = 0$) คือจุด $(-2,0)$

สามารถวาดกราฟนี้ได้โดยการหาจุดตัดแกน X, Y แล้วลากเส้นตรงผ่านสองจุดนั้น

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $2x = 1$ จงเขียนรูปมาตรฐาน หาความชัน จุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y

วิธีทำ สังเกตว่า สมการนี้อยู่ในรูป $x = \dfrac{1}{2}$

1. เส้นตรงนี้ขนานกับแกน Y มีความชันเป็นอนันต์
2. เส้นตรงนี้ตัดแกน X ที่จุด $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$
3. เส้นตรงนี้ไม่ตัดแกน Y



ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานแกน X และผ่านจุด $(2, -3)$

วิธีทำ เส้นตรงที่ขนานกับแกน X จะมีค่า y คงที่เสมอ โดยมีความชันเท่ากับ 0 สมการเส้นตรงหาได้จาก

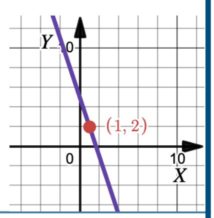
$y - (-3) = 0(x - 2)$ นั่นคือ $y = -3$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ -3 และผ่านจุด $(1,2)$

วิธีทำ สมการเส้นตรงหาได้จาก

$$y - 2 = (-3)(x - 1)$$

หรือ $y = -3x + 5$



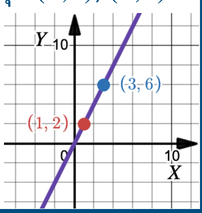
ตัวอย่างที่ 5 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,2), (3,6)$

วิธีทำ สมการเส้นตรงหาได้จาก

$$y - 2 = \left(\frac{6 - 2}{3 - 1}\right)(x - 1)$$

หรือ $y - 2 = 2(x - 1)$

ได้ว่า $y = 2x$



ตัวอย่างที่ 6 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $-x + 2y + 3 = 0$

วิธีทำ เส้นตรงที่กำหนดให้มีความชันคือ $\dfrac{1}{2}$ เส้นตรงที่จะหาจึงต้องมีความชันเท่ากับ -2 ได้สมการเส้นตรงคือ

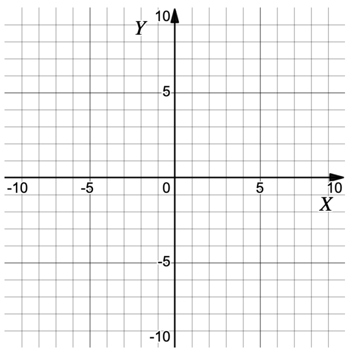
$y - 3 = (-2)(x - (-1))$ หรือ $y = -2x + 1$

ทบทวนความเข้าใจ 1 เติมช่องว่างในตารางให้สมบูรณ์

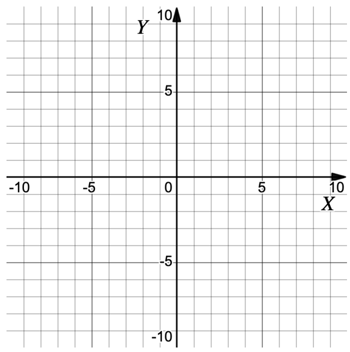
สมการรูปทั่วไป	สมการมาตรฐาน	ความชัน	จุดตัดแกน X	จุดตัดแกน Y	จุดผ่าน
$2x - y - 4 = 0$					
			$(2,0)$	$(0,3)$	
		-4		$(0,0.5)$	
	$y = x - 2$				
		1			$(2,-2)$
$3x - y + 9 = 0$					
	$y = \frac{1}{2}x - 1$				
				$(0,-1)$	$(-3,4)$
		0		$(0,3)$	
$y = -5$					
	$y = 2x + 3$				
$x + 4y - 1 = 0$					

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงหาสมการที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด พร้อมวาดกราฟ

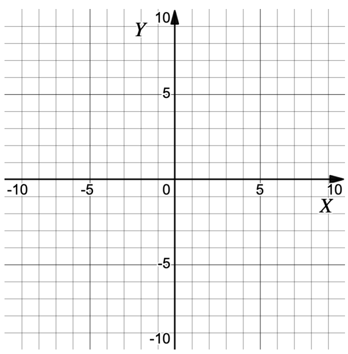
❶ สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,3), (2,1)$



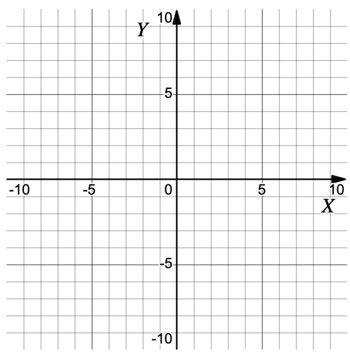
❷ สมการเส้นตรงที่มีความชัน 4 ผ่านจุด $(1,-2)$

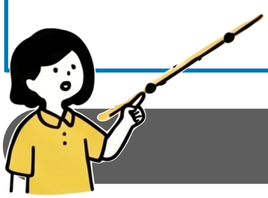


❸ สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ $-2x + 3y + 6 = 0$ และผ่านจุด $(0,4)$

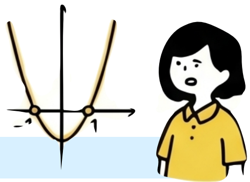


❹ สมการเส้นตรงที่ขนานกับ $y = -2x + 5$ และผ่านจุด $(-1,2)$





เฉลยทบทวนความเข้าใจ : ❶ $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ❷ $y = 4x - 6$ ❸ $y = -\frac{3}{2}x + 4$ ❹ $y = -2x$

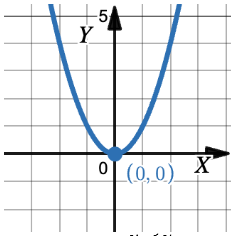


วันที่ 16 กราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

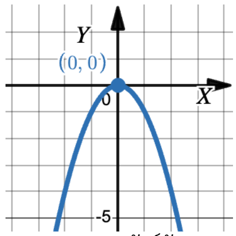
Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3 - 4 วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูปทั่วไป $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ โดยที่ $a \neq 0$
- กราฟของฟังก์ชันกำลังสองเป็นรูป**พาราโบลา** (parabola) เมื่อพิจารณากราฟเริ่มต้นในรูป $y = ax^2$
  - จุดยอด / จุดวกกลับอยู่ที่ $(0,0)$ แกนสมมาตรคือ $x = 0$
  - พาราโบลาหงาย เมื่อ $a > 0$ (ยิ่ง a เพิ่มขึ้น กราฟยิ่งหุบเข้า)
  - พาราโบลาคว่ำ เมื่อ $a < 0$

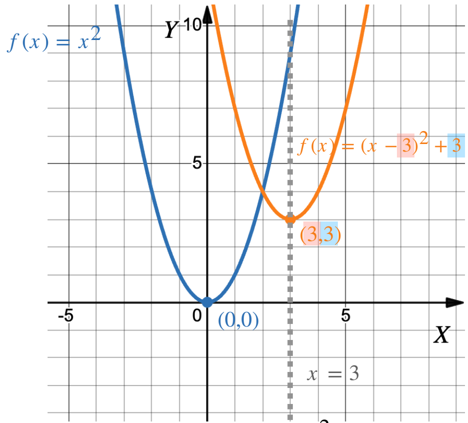


กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$



กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = -x^2$

- ในกรณีทั่วไป เราสามารถเขียนรูปทั่วไปให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ในรูป $y = a(x-h)^2 + k$ โดยที่ $a \neq 0$ พาราโบลานี้เป็นพาราโบลามาตรฐานที่ถูกเลื่อนไปที่จุด (h,k)
- จากรูปมาตรฐาน $y = ax^2 + bx + c$ จะได้ว่า จุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่ $(h,k) = \left(-\dfrac{b}{2a}, c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$
  - แกนสมมาตร คือ $x = h$
  - เมื่อ $a > 0$ พาราโบลาหงาย และที่ (h,k) เป็นจุดต่ำสุด
  - เมื่อ $a < 0$ พาราโบลาหงาย และที่ (h,k) เป็นจุดสูงสุด
- จุดตัดแกน X หาจาก $(x,0)$ โดย x คือค่าซึ่ง $f(x) = 0$ และจุดตัดแกน Y คือ $(0,c)$

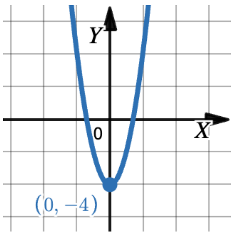


ฟังก์ชัน $f(x) = (x-3)^2 + 3$ มีรูปเดียวกันกับ $f(x) = x^2 - 6x + 12$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 จงวิเคราะห์ $f(x) = 2x^2 - 4$

วิธีทำ
1. กราฟของพาราโบลานี้หงาย
2. จุดยอด $(h,k) = (0,-4)$
3. แกนสมมาตรของพาราโบลา คือ $x = 0$
4. จุดตัดแกน X เกิดขึ้นที่ $x = \pm\sqrt{2}$

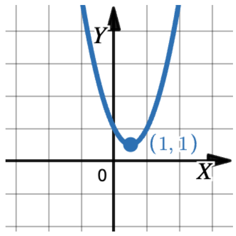


ตัวอย่างที่ 2 จงวิเคราะห์ $f(x) = x^2 - 2x + 2$

วิธีทำ เขียนสมการในรูปมาตรฐาน

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 1$$
$$= (x-1)^2 + 1$$

1. กราฟของพาราโบลานี้หงาย
2. จุดยอด $(h,k) = (1,1)$
3. แกนสมมาตรของพาราโบลา คือ $x = 1$

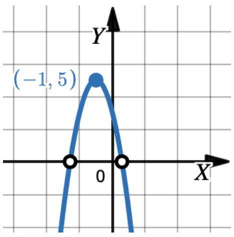


ตัวอย่างที่ 3 จงวิเคราะห์ $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$

วิธีทำ เขียนสมการในรูปมาตรฐาน

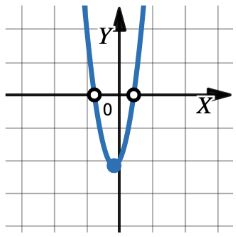
$$f(x) = -2(x^2 + 2x - \frac{3}{2})$$
$$= -2[(x^2 + 2x + 1) - 1 - \frac{3}{2}]$$
$$= -2(x+1)^2 + 5$$

1. กราฟของพาราโบลานี้คว่ำ
2. จุดยอด $(h,k) = (-1,5)$
3. แกนสมมาตรของพาราโบลา คือ $x = -1$
4. จุดตัดแกน X เกิดขึ้นที่ $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$



ตัวอย่างที่ 4 จงวิเคราะห์ $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$

วิธีทำ
1. กราฟของพาราโบลานี้หงาย
2. จุดยอดอยู่ที่ $(h,k) = \left(\dfrac{-2}{2(3)}, -4 - \dfrac{2^2}{4(3)}\right) = \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{13}{3}\right)$
3. แกนสมมาตรของพาราโบลา คือ $x = -1/3$
4. จุดตัดแกน X เกิดขึ้นที่ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{3}$

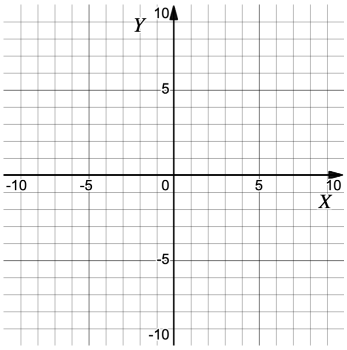


ทบทวนความเข้าใจ 1 เติมช่องว่างในตารางให้สมบูรณ์

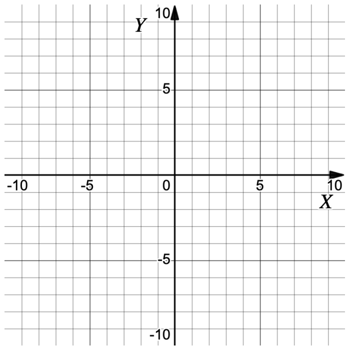
สมการรูปทั่วไป	สมการมาตรฐาน	หงาย - คว่ำ	จุดยอด	แกนสมมาตร	จุดตัดแกน X
$y = x^2 + 4x + 1$					
	$y = (x-3)^2 - 5$				
	$y = -2(x+2)^2 + 3$				
	$y = x^2 + 4$				
$y = -x^2 - 8x - 8$					

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : วิเคราะห์และวาดกราฟของฟังก์ชันกำลังสองต่อไปนี้

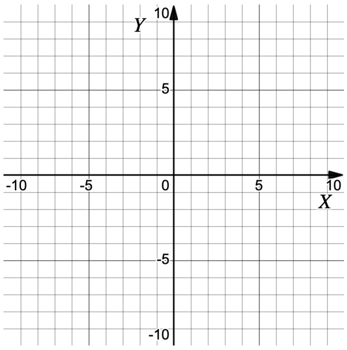
❶ $f(x) = 3(x-2)^2 - 7$



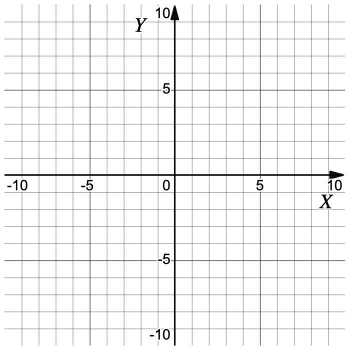
❷ $f(x) = -2(x+1)^2 + 5$



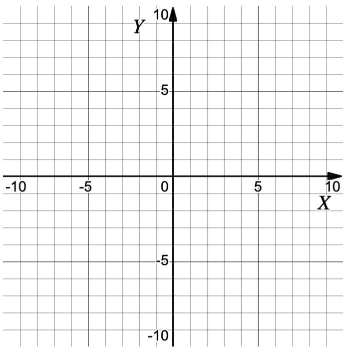
❸ $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$



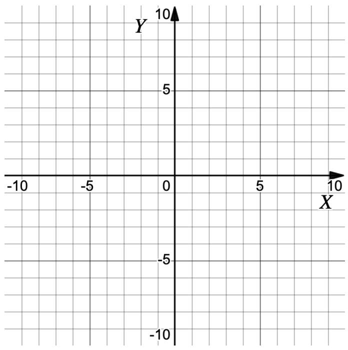
❹ $f(x) = -x^2 + 6x - 4$

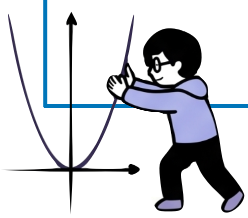


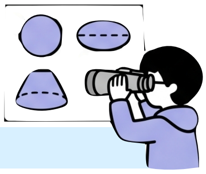
❺ $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 4$



❻ $f(x) = -3x^2 - 6x + 2$







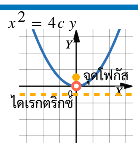
วันที่ 17 สมการของภาคตัดกรวย

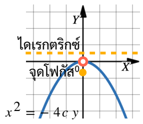
Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 วัน / เวลาที่ทำ :

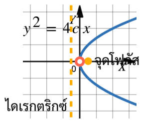
Main Concept : สาระสำคัญ

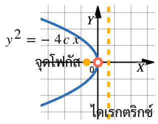
สมการของภาคตัดกรวยในรูปทั่วไป (ที่ไม่มีการหมุนแกน) อยู่ในรูป. $Ax^2 + Bx^2 + Cx + Dy + E = 0$
เราจะเริ่มจากสมการของภาคตัดกรวยรูปแบบมาตรฐานที่ยังไม่มีการเลื่อนแกนก่อน
ในที่นี้ จะกำหนดจุดอ้างอิงของแต่ละรูปด้วยจุดกลมสีแดง (โปร่ง) เพื่อจะนำไปใช้ในการเลื่อนแกนในหัวข้อถัดไป

- **พาราโบลา** (parabola) คือเซตของจุดที่อยู่ห่างจากจุดคงที่ (จุดโฟกัส) กับเส้นตรงคงที่ (เส้นไดเรกตริกซ์) เป็นระยะเท่ากัน
- กำหนด c คือระยะจากจุดยอด ในที่นี้ดูที่จุด $(0,0)$ ไปยังจุดโฟกัส
- กรณีเส้นไดเรกตริกซ์ขนานแกน X จุดโฟกัสอยู่ตามแกน Y (พาราโบลาหงาย - คว่ำ) สมการอยู่ในรูป
  $x^2 = 4cy$ หรือ $x^2 = -4cy$
- กรณีเส้นไดเรกตริกซ์ขนานแกน Y จุดโฟกัสอยู่ตามแกน X (พาราโบลาตะแคงซ้าย - ขวา) สมการอยู่ในรูป
  $y^2 = 4cx$ หรือ $y^2 = -4cx$

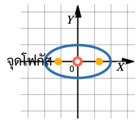


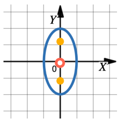




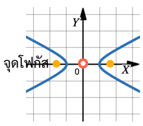


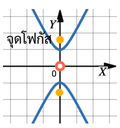
- **วงรี** (ellipse) คือเซตของจุดที่ผลรวมของระยะจากจุดคงที่สองจุด ไปยังจุดหนึ่งในเซตนั้น มีค่าคงที่เสมอ
- กำหนดให้ a คือระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังปลายแกนเอก และ b คือระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังแกนโท $(a > b)$
- สมการวงรีที่แกนเอกอยู่ตามแกน X อยู่ในรูป $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- สมการวงรีที่แกนเอกอยู่ตามแกน Y อยู่ในรูป $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$



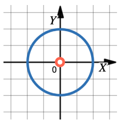


- **ไฮเพอร์โบลา** (hyperbola) คือเซตของจุดที่ผลต่างของระยะจากจุดคงที่สองจุดไปยังจุดหนึ่งในเซตนั้น มีค่าคงที่เสมอ
- กำหนดให้ a คือระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังปลายแกนเอก และ b คือระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังแกนโท $(a > b)$
- สมการไฮเพอร์โบลาที่แกนอยู่ตามแกน X อยู่ในรูป $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- สมการไฮเพอร์โบลาที่แกนอยู่ตามแกน Y อยู่ในรูป $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

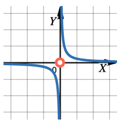




- **วงกลม** (circle) คือเซตของจุดที่อยู่ห่างจากจุดคงที่ (จุดศูนย์กลาง) เป็นระยะทางคงที่ (รัศมี)
- สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ รัศมี r คือ $x^2 + y^2 = r^2$



- **ไฮเพอร์โบลามุมฉาก** (rectangular hyperbola) เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีการหมุนแกน มีสมการในรูป $xy = 1$



ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

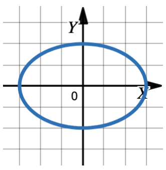
ตัวอย่างที่ 1 หารูปมาตรฐานของ $4x^2 + 9y^2 = 36$

วิธีทำ นำ 36 ไปหารทั้งสมการ

ได้ $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

เป็นสมการวงรีนอน แกนเอกคือแกน X

จุดศูนย์กลาง $(0,0)$



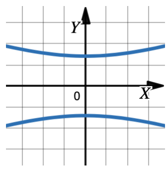
ตัวอย่างที่ 2 หารูปมาตรฐานของ $9y^2 - x^2 = 18$

วิธีทำ นำ 18 ไปหารทั้งสมการ

ได้ $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{18} = 1$

เป็นสมการไฮเพอร์โบลาตามแกน Y

จุดอ้างอิง $(0,0)$



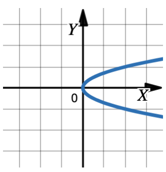
ตัวอย่างที่ 3 จงวิเคราะห์ $4y^2 - 2x = 0$

วิธีทำ จัดรูป โดยเขียนได้เป็น $y^2 = \dfrac{1}{2}x$

เป็นสมการพาราโบลา ตะแคงด้านขวา

จุดยอดคือ $(0,0)$ สมการไดเรกตริกซ์คือ

$4c = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = -c = -\dfrac{1}{8}$



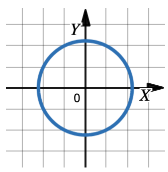
ตัวอย่างที่ 4 จงวิเคราะห์ $x^2 + y^2 = 5$

วิธีทำ สมการดังกล่าวอยู่ในรูป

$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$

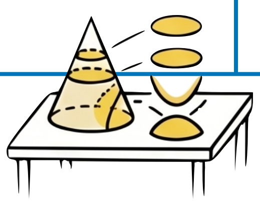
เป็นสมการวงกลม จุดศูนย์กลาง $(0,0)$

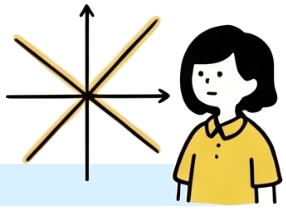
รัศมี $\sqrt{5}$ หน่วย



ทบทวนความเข้าใจ ให้วิเคราะห์สมการ เช่น จุดศูนย์กลาง จุดอ้างอิง แกนที่เกี่ยวข้อง และร่างกราฟพอสังเขป

รูปทั่วไป	ชื่อ	รูปมาตรฐาน	แกน	ข้อมูลอื่น ๆ	ร่างกราฟ
$x^2 + y^2 = 16$					
$16x^2 + 9y^2 = 144$					
$9x^2 + 4y^2 = 36$					
$x^2 - 4y^2 = 16$					
$9y^2 - 16x^2 = 144$					
$y^2 = 8x$					
$x^2 = -12y$					
$2x^2 + 3y^2 = 12$					
$x^2 - y^2 = 25$					
$y^2 + 4x = 0$					





วันที่ 18 ระบบสมการสองตัวแปร

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3 - 4 * เนื้อหาบางส่วนไม่อยู่ในหลักสูตรฉบับใหม่ วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- จุดมุ่งหมายของการแก้ระบบสมการ คือ หาจุดตัดของกราฟของความสัมพันธ์สองเส้นที่ตัดกัน
- เมื่อมีเส้นตรงสองเส้น เราจะแก้**ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร**

  กำหนดดังสมการ $a_1x + b_1y = c_1$ — (1)

  $a_2x + b_2y = c_2$ — (2)

  สามารถแก้ระบบสมการได้หลายวิธี อาทิ
  1. จัดรูปสมการหนึ่ง แล้วแทนค่าตัวแปรในอีกสมการหนึ่ง
  2. ทำสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรหนึ่งให้เท่ากัน แล้วเริ่มกำจัดทีละตัวแปร จากนั้นแทนค่าคืนเพื่อหาคำตอบอีกตัวแปร
- ระบบสมการเชิงเส้นจะมีคำตอบ 1 คำตอบ เมื่อ เส้นตรงทั้งสองไม่ขนานกัน หรือ ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน เส้นตรงทั้งสองเส้นเป็นเส้นตรงเดียวกัน (มีคำตอบของระบบสมการไม่จำกัด)

- *ในกรณีที่มีความสัมพันธ์สองตัวแปรสองความสัมพันธ์ แทนด้วยฟังก์ชันแฝง (implicit function)

  $F_1(x, y) = 0$ — (1) $F_2(x, y) = 0$ — (2)

  โดยทั่วไป มักจะแทนค่าตัวแปรหนึ่งในสมการหนึ่ง ลงไปในในอีกสมการหนึ่ง จากนั้นแก้สมการเพื่อหาค่าตัวแปรอื่น

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 แก้ระบบสมการ $x + 2y = 1$ — (1)

$2x - y = 2$ — (2)

วิธีทำ จาก (1) จะได้ว่า $x = 1 - 2y$ — (3)

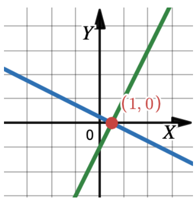
แทน (3) ใน (2) ได้ว่า $2(1 - 2y) - y = 2$

หรือได้ว่า $2 - 5y = 2$

นั่นคือ $y = 0$

แทน $y = 0$ ใน (3) ได้ว่า $x = 1$

คำตอบของระบบสมการ คือ $(1,0)$



ตัวอย่างที่ 1 แก้ระบบสมการ $3x + y = -1$ — (1)

$-x + 2y = 2$ — (2)

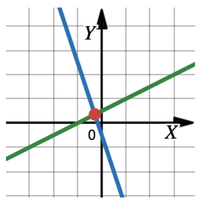
วิธีทำ นำ $3 \times (2)$ จะได้ว่า $-3x + 6y = 6$ — (3)

นำ (1) + (3) ได้ว่า $7y = 5$ หรือ $y = \dfrac{5}{7}$

แทน $y = \dfrac{5}{7}$ ใน (2)

ได้ว่า $x = 2(\dfrac{5}{7}) - 2 = -\dfrac{4}{7}$

คำตอบ คือ $\left(-\dfrac{4}{7}, \dfrac{5}{7}\right)$



ตัวอย่างที่ 3 แก้ระบบสมการ $y = x + 3$ — (1)

$y = x^2 + 1$ — (2)

วิธีทำ แทน (1) ใน (2) จะได้

$x + 3 = x^2 + 1$

$x^2 - x - 2 = 0$

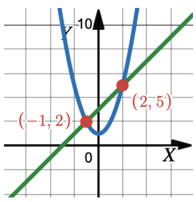
$(x - 2)(x + 1) = 0$

ได้ว่า $x = -1$ หรือ $x = 2$

เมื่อ $x = -1$ ได้ $y = -1 + 3 = 2$

เมื่อ $x = 2$ ได้ $y = 2 + 3 = 5$

คำตอบ คือ $(-1,2)$ และ $(2,5)$



ตัวอย่างที่ 4 แก้ระบบสมการ $x + y = 1$ — (1)

$x^2 + y^2 = 9$ — (2)

วิธีทำ จาก (1) จะได้ว่า $y = 1 - x$ — (3)

แทน (3) ใน (2) ได้ว่า $x^2 + (1 - x)^2 = 9$

หรือได้ว่า $2x^2 - 2x - 8 = 0$

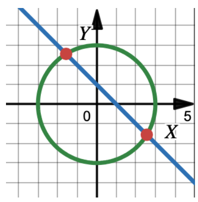
นั่นคือ $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$ แทนใน (3)

เมื่อ $x = 2 + 2\sqrt{2}$, $y = -1 - 2\sqrt{2}$

เมื่อ $x = 2 - 2\sqrt{2}$, $y = -1 + 2\sqrt{2}$

คำตอบ คือ $(2 + 2\sqrt{2}, -1 - 2\sqrt{2})$

และ $(2 - 2\sqrt{2}, -1 + 2\sqrt{2})$



ตัวอย่างที่ 5 แก้ระบบสมการ $y^2 - x = 3$ — (1)

$x^2 + y^2 = 9$ — (2)

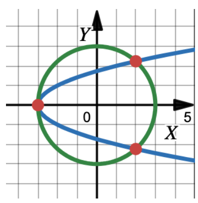
วิธีทำ จาก (1) ได้ว่า $y^2 = 3 + x$ — (3) แทน (3) ใน (2) ได้ว่า $x^2 + (3 + x) = 9$

นั่นคือ $x^2 + x - 6 = 0$ ซึ่งได้ว่า $(x + 3)(x - 2) = 0$ ได้ว่า $x = -3$ หรือ $x = 2$

แทนใน (3) เมื่อ $x = -3$ ได้ว่า $y^2 = 0$ นั่นคือ $y = 0$

แทนใน (3) เมื่อ $x = 2$ ได้ว่า $y^2 = 5$ นั่นคือ $y = \pm\sqrt{5}$

คำตอบของระบบสมการ คือ $(-3,0), (2,\sqrt{5}), (2, -\sqrt{5})$



ทบทวนความเข้าใจ แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : แก้ระบบสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

❶ $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

❷ $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

❸ $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$

❹ $\begin{cases} 5x - y = 9 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$

❺ $\begin{cases} 3x - 4y = -2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

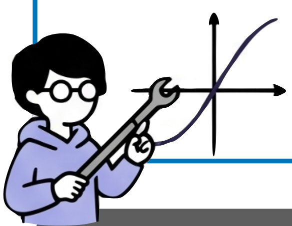
❻ $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$

❼ $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

❽ $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$

❾ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$

❿ $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$



เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ $(4,3)$ ❷ $\left(3,\frac{3}{2}\right)$ ❸ $(2,3)$ ❹ $\left(\frac{45}{17},\frac{72}{17}\right)$ ❺ $\left(\frac{15}{5},\frac{13}{5}\right)$ ❻ $\left(\frac{70}{7},\frac{23}{7}\right)$ ❼ $(2,3),(3,2)$ ❽ $(-3,-2)$ ❾ $(\sqrt{2},1),(-\sqrt{2},1)$ ❿ $(-3,-2),(3,2)$

วันที่ 19 การเลื่อนแกนทางขนาน

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

ที่ผ่านมา (โดยเฉพาะวันที่ 17) เรารู้จักกราฟที่ในรูปแบบมาตรฐานแล้ว ในที่นี้ เราต้องการเลื่อนจุดศูนย์กลาง / จุดอ้างอิง จากจุดกำเนิด (0,0) ไปยังจุดใหม่ (h, k) ตามทางขนานแกน X และแกน Y

- เราเคยทำลักษณะนี้กับฟังก์ชันกำลังสองมาแล้วในวันที่ 16 ในตัวอย่าง เราใช้วิธี**การทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์** เพื่อจัดรูปแบบกำลังสองที่เป็นรูปทั่วไป ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

- สมการในวันที่ 17 จะอยู่ในรูปที่ปรากฏ (h, k) เช่น
  - สมการวงกลม จุดศูนย์กลางที่ (h, k) รัศมี r $\quad (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
  - สมการวงรี จุดศูนย์กลาง (h, k) $\quad \dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ หรือ $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$
  - สมการพาราโบลา จุดยอดที่ (h, k) $\quad (x-h)^2=\pm 4c(y-k)$ หรือ $(y-h)^2=\pm 4c(x-k)$
  - สมการไฮเพอร์โบลา จุดอ้างอิงที่ (h, k) $\quad \dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ หรือ $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$
  - สมการไฮเพอร์โบลามุมฉาก จุดอ้างอิงที่ (h, k) $\quad (x-h)(y-k)=1$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก : หารูปมาตรฐานของสมการที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 1 $x^2+y^2-6x+8y+9=0$

วิธีทำ แยกกลุ่มตัวแปรก่อน ได้สมการเป็น

$$(x^2-6x)+(y^2+8y)+9=0$$

ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)=-9+9+16$$
$$(x-3)^2+(y+4)^2=16$$

เป็นสมการวงกลม จุดศูนย์กลาง $(3,-4)$ รัศมี 4 หน่วย

ตัวอย่างที่ 2 $4x^2+9y^2-24x+18y-63=0$

วิธีทำ แยกกลุ่มตัวแปร และดึงตัวร่วม ได้สมการเป็น

$$4(x^2-6x)+9(y^2+2y)-63=0$$

ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$4(x^2-6x+9)+9(y^2+2y+1)=63+36+9$$
$$4(x-3)^2+9(y+1)^2=108$$
$$\frac{(x-3)^2}{27}+\frac{(y+1)^2}{12}=1$$

เป็นสมการวงรี แกนเอกอยู่ที่แกน X จุดศูนย์กลาง $(3,-1)$

ตัวอย่างที่ 3 $9x^2-4y^2-54x-16y-19=0$

วิธีทำ แยกกลุ่มตัวแปร และดึงตัวร่วม ได้สมการเป็น

$$9(x^2-6x)-4(y^2+4y)-19=0$$

ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$9(x^2-6x+9)-4(y^2+4y+4)=19+81-16$$
$$9(x-3)^2-4(y+2)^2=84$$
$$\frac{(x-3)^2}{28/3}-\frac{(y+2)^2}{21}=1$$

เป็นสมการไฮเพอร์โบลาตามแกน X จุดอ้างอิง $(3,-2)$

ตัวอย่างที่ 4 $y^2+6y-4x+1=0$

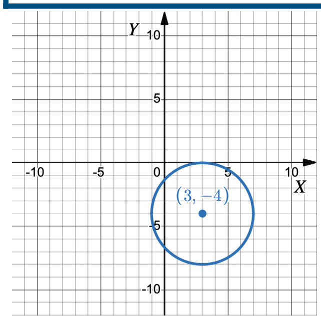
วิธีทำ จัดกลุ่มตัวแปร พบว่า

$$y^2+6y=4x-1$$

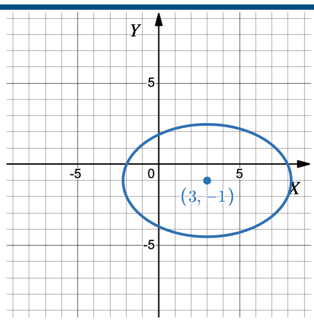
ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$y^2+6y+9=4x-1+9$$
$$(y+3)^2=4(x+2)$$

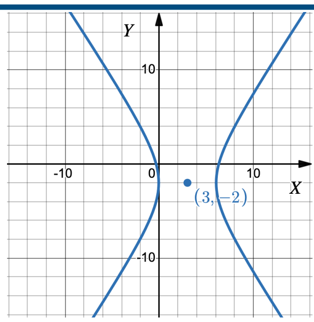
เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ตะแคงขวา จุดยอด $(-2,-3)$



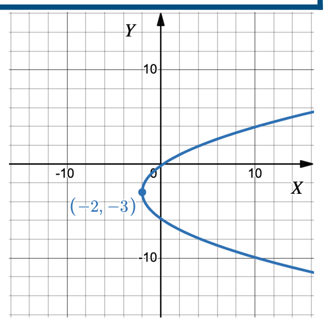
$x^2+y^2-6x+8y+9=0$



$4x^2+9y^2-24x+18y-63=0$



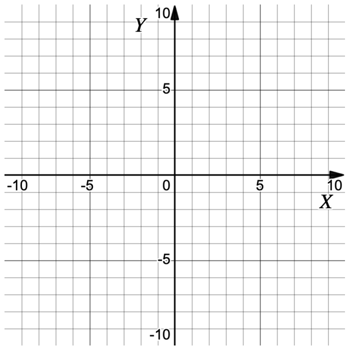
$9x^2-4y^2-54x-16y-19=0$



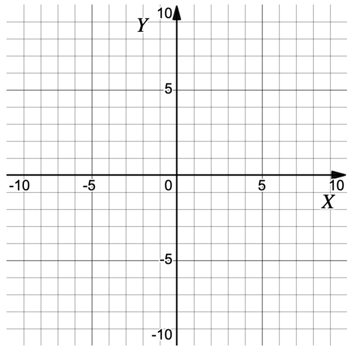
$y^2+6y-4x+1=0$

ทบทวนความเข้าใจ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน พร้อมระบุจุดอ้างอิง วิเคราะห์ข้อมูล และร่างกราฟ

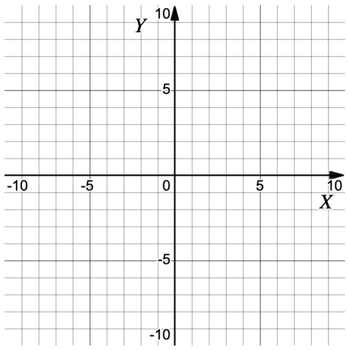
❶ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$



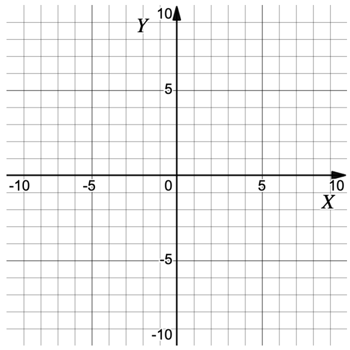
❷ $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$



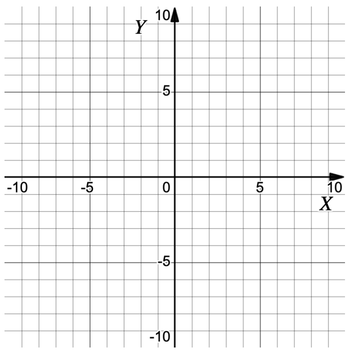
❸ $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$



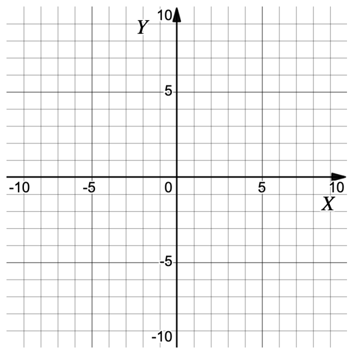
❹ $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y - 5 = 0$



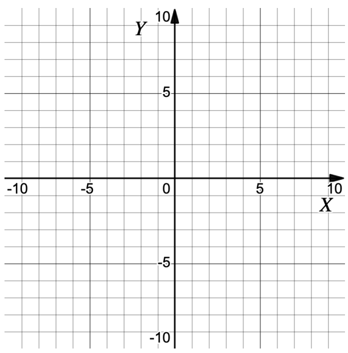
❺ $9y^2 - 16x^2 + 18y + 32x - 7 = 0$



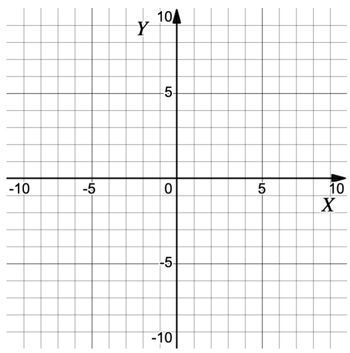
❻ $x^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

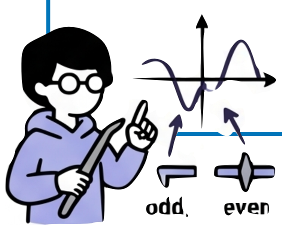


❼ $y^2 + 4y - 8x + 4 = 0$

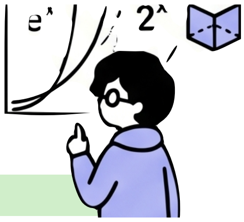


❽ $4y^2 + 8y + 16x + 9 = 0$





ช่วงที่ 5
ฟังก์ชันที่สำคัญในแคลคูลัส

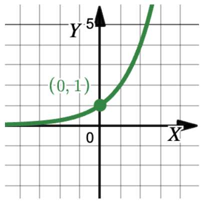


วันที่ 20 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

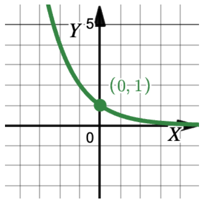
Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล** (exponential function) เป็นฟังก์ชันที่เขียนได้ในรูป $y = a^x$ โดยที่ $a \neq 1, a > 0$
- ในรูปมาตรฐาน $y = a^x$ กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจะผ่าน $(0,1)$ เสมอ
- เราสามารถแบ่งกรณีของ a ออกเป็นสองกรณีคือ
  - ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเพิ่ม (เป็นฟังก์ชันเพิ่ม) เมื่อ $a > 1$
  - ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลลด (เป็นฟังก์ชันลด) เมื่อ $0 < a < 1$
- กรณีที่ฐานเป็นจำนวน $e \approx 2.7$ (จำนวนอตรรกยะ) ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลนั้นคือ $y = e^x$ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลฐานเพิ่ม



(ฐานเพิ่ม)
กราฟของฟังก์ชัน
$f(x) = 2^x$



(ฐานลด)
กราฟของฟังก์ชัน
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

- เราประยุกต์ใช้สมบัติของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลได้ โดยใช้สมบัติเดียวกันกับเลขยกกำลัง
- สมการเอกซ์โพเนนเชียล $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ และ $a^x = b^x$ แล้ว $x = 0$
  เช่น $3^x = 9$ ได้ว่า $3^x = 3^2$ นั่นคือ $x = 2$
- สำหรับอสมการเอกซ์โพเนนเชียล ต้องพิจารณาเงื่อนไขของฐานประกอบด้วย
  - กรณีฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $a^x \geq a^y$ แล้ว $x \geq y$
  - กรณีฟังก์ชันลด ถ้า $a^x \geq a^y$ แล้ว $x \leq y$

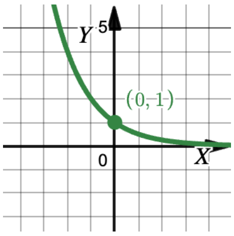
กำหนด $f(x) = a^x$
$D_f = \mathbb{R}$
$R_f = (0,\infty)$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

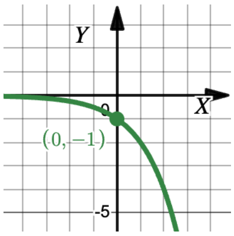
ตัวอย่างที่ 1 วาดกราฟ $f(x) = 2^{-x}$ และ $g(x) = -2^x$

<u>วิธีทำ</u> สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

และสำหรับ $g(x) = -2^x$ คือกราฟ $h(x) = 2^x$ แต่สะท้อนตามแกน X



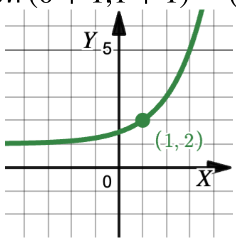
$f(x) = 2^{-x}$



$g(x) = -2^x$

ตัวอย่างที่ 2 วาดกราฟ $f(x) = 2^{x-1} + 1$

<u>วิธีทำ</u> เขียนฟังก์ชันได้ในรูป $y - 1 = 2^{x-1}$
กราฟดังกล่าวคือกราฟของ $y = 2^x$ ที่ถูกเลื่อนแกนทางขนานไปที่จุด $(1,1)$ โดยที่จุดอ้างอิง $(0,1)$ ถูกเลื่อนไปที่ $(0+1, 1+1) = (1,2)$



$f(x) = 2^{x-1} + 1$

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $3^{x^2} = 81$

<u>วิธีทำ</u> เขียน $81 = 3^4$ ดังนั้น $3^{x^2} = 3^4$
โดยสมบัติของเลขยกกำลัง ได้ว่า $x^2 = 4$
จึงได้ว่า $x = 2$ หรือ $x = -2$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้สมการ $4^{2x+1} = \frac{1}{64}$

<u>วิธีทำ</u> เขียนฐานเหมือนกัน ได้ว่า $(2^2)^{2x+1} = 2^{-6}$
หรือได้ว่า $2^{4x+2} = 2^{-6}$
โดยสมบัติของเลขยกกำลัง ได้ว่า $4x + 2 = -6$
จึงได้ว่า $4x = -8$ ได้ว่า $x = -2$

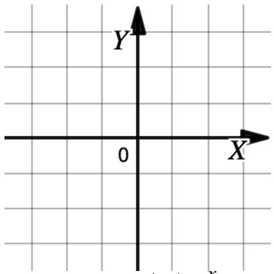
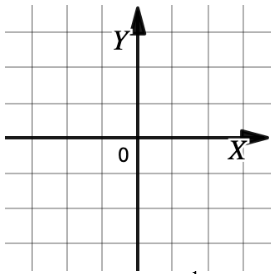
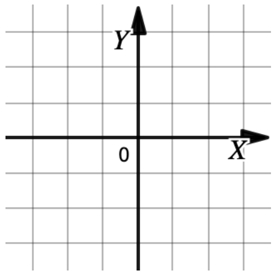
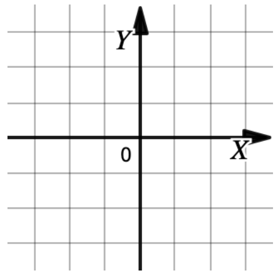
ตัวอย่างที่ 5 จงแก้สมการ $2^{x+1} > 16$

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปฐานของเลขกำลัง ได้ $2^{x+1} > 2^4$
เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ได้ว่า $x + 1 > 4$
เพราะฉะนั้น $x > 3$

ตัวอย่างที่ 6 จงแก้สมการ $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x^2} \leq \left(\frac{1}{27}\right)$

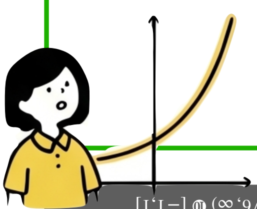
<u>วิธีทำ</u> เขียนฐานเหมือนกัน ได้ว่า $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x^2} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$
เป็นฟังก์ชันฐานลด ได้ว่า $4 - x^2 \geq 3$
แก้อสมการในรูป $x^2 - 1 \leq 0$ ได้เซตคำตอบคือ $[-1,1]$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ร่างกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่กำหนดให้ต่อไปนี้

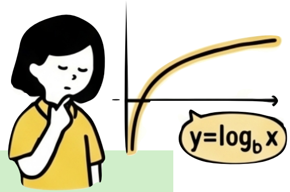
 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$	 $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 2$	 $h(x) = -e^{x+1} - 1$	 $i(x) = e^{-x+1} + 1$

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงแก้สมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียลที่กำหนดให้

❶ $2^{x+1} = 16$	❷ $5^{2x-1} = 125^{-1}$
❸ $2^{x^2} = 16$	❹ $3^{x^2-1} = 27$
❺ $0.5^{x^2-3x} = 0.0625$	❻ $9^{x^2-2x} = 81$
❼ $3^{x+2} > 27$	❽ $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq \frac{1}{8}$
❾ $2^{x^2-3} \geq 8$	❿ $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} \geq \frac{1}{9}$



เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ $x = 3$ ❷ $x = -1$ ❸ $x = \pm 2$ ❹ $x = \pm 2$ ❺ $x = -1, 4$ ❻ $x = -1, 3$ ❼ $(1, \infty)$ ❽ $[2, \infty)$ ❾ $(-\infty, \sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, \infty)$ ❿ $[-1, 1]$



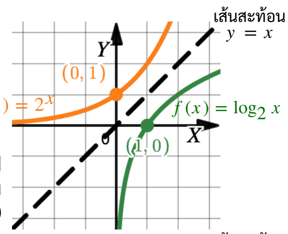
วันที่ 21 ฟังก์ชันลอการิทึม

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 | วัน / เวลาที่ทำ :

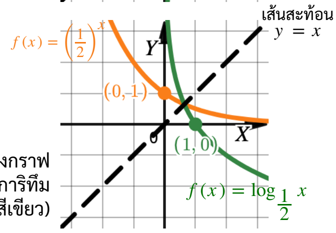
Main Concept : สาระสำคัญ

- เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ตัวผกผันจึงเป็นฟังก์ชัน เรียกฟังก์ชันนั้นว่า**ฟังก์ชันลอการิทึม** (logarithmic function) ดังความสัมพันธ์ $y = a^x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \log_a y$
- ฟังก์ชันลอการิทึม คือฟังก์ชันที่เขียนในรูป $y = \log_a x$ โดยที่ $a > 0, a \neq 1$
- ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล
  - ฟังก์ชันลอการิทึมฐานเพิ่ม (เป็นฟังก์ชันเพิ่ม) เมื่อ $a > 1$
  - ฟังก์ชันลอการิทึมฐานลด (เป็นฟังก์ชันลด) เมื่อ $0 < a < 1$
- ในรูปแบบมาตรฐาน กราฟจะตัดแกน X ที่จุด $(1,0)$
- กรณีที่ฐาน a เป็นจำนวน $e \approx 2.7$ (จำนวนอตรรกยะ) จะเขียนฟังก์ชันลอการิทึมในรูป $y = \ln x$ เรียกว่า **ลอการิทึมฐานธรรมชาติ** (natural logarithm)
- โดยทั่วไป หากไม่กำกับฐาน เช่น $y = \log x$ จะหมายถึงลอการิทึมฐาน 10

ตัวอย่างกราฟ ฟังก์ชันลอการิทึม แบบฐานเพิ่ม (สีเขียว)



ตัวอย่างกราฟ ฟังก์ชันลอการิทึม แบบฐานลด (สีเขียว)



- สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม มีดังนี้
  1. $\log_a 1 = 0$ และ $\log_a a = 1$
  2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
  3. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
  4. $\log_a(x^k) = k\log_a x$ และ $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$
  5. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ และ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
  6. $a^{\log_a x} = x$ และ $\log_a(a^x) = x$

ข้อควรระวัง

- $\log(x \pm y) \neq \log x \pm \log y$
- $\log(xy) \neq \log x \cdot \log y$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) \neq \frac{\log x}{\log y}$
- $(\log x)^n \neq n\log x$
- $\log(ax) \neq a\log x$

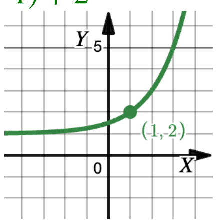
กำหนด $f(x) = \log_a x$
$D_f = (0,\infty)$
$R_f = \mathbb{R}$
นั่นคือ $x > 0$ เสมอ

ค่าคงตัวใช้บ่อย
$\log 2 \approx 0.301$
$\log 3 \approx 0.477$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก :

ตัวอย่างที่ 1 วาดกราฟ $f(x) = \ln(x-1)+2$

วิธีทำ เขียน $y - 2 = \ln(x-1)$
คือกราฟของ $y = \ln x$
ที่จุดกำเนิดใหม่ อยู่ที่ $(1,2)$
โดยที่จุดอ้างอิง $(1,0)$
ถูกเลื่อนไปที่ $(2,2)$



ตัวอย่างที่ 2 หาโดเมนของ $f(x) = \log(1-x^2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $1 - x^2 > 0$ จึงได้ว่า
$x^2 - 1 < 0$
หรือได้อสมการ คือ $(x+1)(x-1) < 0$
ดังนั้น โดเมนคือ $(-1,1)$

ตัวอย่างที่ 3 ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย
$2\log(3)+\frac{1}{2}\log(16)$

วิธีทำ $2\log(3)+\frac{1}{2}\log(16) = \log 3^2 + \log 16^{\frac{1}{2}}$
$= \log(9 \cdot 4) = \log(36)$

ตัวอย่างที่ 4 ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย $e^{-\ln(1+x^2)}$

วิธีทำ $e^{-\ln(1+x^2)} = e^{\ln(1+x^2)^{-1}}$
$= (1+x^2)^{-1}$ (สมบัติข้อที่ 6)
$= \frac{1}{1+x^2}$

ตัวอย่างที่ 5 ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย
$\log_2(\sqrt{32}) - \log_2(4)$

วิธีทำ $\log_2(\sqrt{32}) - \log_2(4) = \log_2(2^{\frac{5}{2}}) - \log_2(2^2)$
$= \frac{5}{2}\log_2 2 - 2\log_2 2$
$= \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 6 เขียน $\ln\left(\frac{x^2\sqrt{y}}{z}\right)$ ให้อยู่ในรูปผลบวก - ลบ

วิธีทำ $\ln\left(\frac{x^2\sqrt{y}}{z}\right) = \ln(x^2) + \ln(\sqrt{y}) - \ln z$
$= 2\ln x + \frac{1}{2}\ln y - \ln z$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้แก้ไขให้ถูกต้อง

ข้อความ	จริง	เท็จ	แก้ไข
$\log_2(8\cdot 4)=\log_2 8+\log_2 4$			
$\log_2(8+4)=\log_2 8+\log_2 4$			
$\log_3\left(\frac{27}{3}\right)=\log_3 27-\log_3 3$			
$\log_2(16)=(\log_2 4)^2$			
$\log_5(25^x)=2x$			
$\log_2 8=\frac{1}{\log_8 2}$			
$\log_2\left(\sqrt{8}\right)=\frac{3}{2}$			
$\log_2(8^{x+1})=(x+1)\log_2 8$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

❶ $2\log_3(9)-\log_3(\sqrt{3})$

❷ $3\ln(e)+\ln\left(\frac{\sqrt{e^2}}{e^4}\right)$

❸ $\log_2(4^3)-2\log_2(2^2)+\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

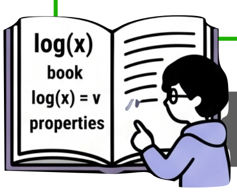
❹ $2\log_3(9x)-\log_3(3x^2)$ เมื่อ $x>0$

❺ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย $3^{-\frac{1}{2}\log_3(x^2+4)^2}$

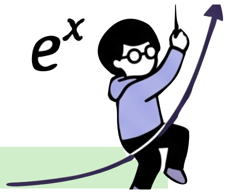
❻ เขียนในรูปฐานธรรมชาติ
$\log_2(8)+\log_2(\sqrt{2})-\log_2(4)$

❼ เขียนในรูปผลบวก - ลบ $\ln\left(\frac{e^{2x}\sqrt{e^x}}{e^3}\right)$

❽ เขียนในรูปผลบวก - ลบ $\log_2\left(\frac{8\sqrt{2x^3}}{4x}\right)$, $x>0$



เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ $\frac{7}{2}$ ❷ 0 ❸ $\frac{3}{2}$ ❹ 3 ❺ $\frac{\ln 4}{\ln 2}+\frac{\ln 9}{\ln 3}$ ❻ $\frac{\ln(2\sqrt{2})}{\ln 2}$ ❼ $2x+\frac{x}{2}-3$ ❽ $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log_2 x$



วันที่ 22 สมการและอสมการลอการิทึม

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- ในทำนองคล้ายกันกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เรามีสมบัติของสมการลอการิทึม กล่าวคือ

  $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
- นอกจากนี้ เราอาจใช้สมบัติของลอการิทึมที่เชื่อมโยงกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $y = a^x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \log_a y$
- เราใช้ลอการิทึมช่วยในการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลได้ในกรณีที่ไม่สามารถจัดรูปฐานให้เท่ากันทั้งสองข้าง โดยการใส่ลอการิทึมทั้งสองข้าง

  เช่น $2^x = 5$ ต้องการแก้หาค่า x ใส่ลอการิทึมฐานสองทั้งสองข้าง ได้ $\log_2 2^x = \log_2 x$ ได้ว่า $x = \log_2 5$
- เมื่อแก้สมการ ต้องตรวจสอบเงื่อนไขของคำตอบว่าสอดคล้องกับฟังก์ชันลอการิทึมหรือไม่

- ในทำนองคล้ายกันกับอสมการเอกซ์โพเนนเชียล เราสามารถใช้หลักการแก้อสมการ โดยแบ่งตามลักษณะฐาน ดังนี้
  - กรณีฐานเพิ่ม $(a > 1)$ $\log_a x \ge \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x \ge y$

    เช่น $\log_2 x \ge \log_2 5$ ได้ว่า $x \ge 5$ หรือ $2^x > 3$ ใส่ $\log_2$ ทั้งสองข้าง ได้ว่า $\log_2 2^x = x > \log_2 3$
  - กรณีฐานลด $(0 < a < 1)$ $\log_a x \ge \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x \le y$

    เช่น $\log_{\frac{1}{2}} x \ge \log_{\frac{1}{2}} 5$ ได้ว่า $x \le 5$ หรือ $(\frac{1}{2})^x > 3$ ใส่ $\log_{\frac{1}{2}}$ ทั้งสองข้าง ได้ว่า $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^x = x < \log_{\frac{1}{2}} 3$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 แก้สมการ $\log_2 x = 3$

วิธีทำ $\log_2 x = 3$ เขียนได้ในรูป $x = 2^3$

ได้ว่า คำตอบของสมการ คือ $x = 8$

ตัวอย่างที่ 2 แก้สมการ $\log_3(x-1) = 2$

วิธีทำ $\log_3(x-1) = 2$ เขียนได้ในรูป $x - 1 = 3^2$

ได้ว่า คำตอบของสมการ คือ $x = 10$

ตัวอย่างที่ 3 แก้สมการ $\log_2 x = \log_4 16$

วิธีทำ ทำฐานลอการิทึมให้เท่ากัน ได้ว่า

$$\log_2 x = \frac{1}{2}\log_2 2^4$$

หรือได้ว่า $\log_2 x = \log_2 2^2$

เพราะฉะนั้น $x = 4$

ตัวอย่างที่ 4 แก้สมการ $\log_3(x^2-1) = 2$

วิธีทำ $\log_3(x^2-1) = 2$ เขียนได้ในรูป $x^2 - 1 = 2^3$

แก้สมการ $x^2 = 9$ ได้คำตอบคือ $x = \pm 3$

เมื่อตรวจสอบพบว่า ทั้งสองคำตอบสอดคล้องกับเงื่อนไข

เพราะฉะนั้น $x = 3$ หรือ $x = -3$

ตัวอย่างที่ 5 แก้สมการ $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$

วิธีทำ ใช้สมบัติลอการิทึมจัดในรูปอย่างง่าย ได้ว่า

$$\log_2[(x-1)(x-3)] = 3$$

ดังนั้น $(x-1)(x-3) = 8$

หรือได้ว่า $x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

ได้ว่า $x = -1$ หรือ $x = 5$

แต่ $x = -1$ ทำให้ไม่จริงในเงื่อนไขโจทย์ ดังนั้น $x = 5$

ตัวอย่างที่ 6 แก้สมการ $5^{x+1} = 2^x$

วิธีทำ ใส่ ln ทั้งสองข้าง ได้ว่า $\ln(5^{x+1}) = \ln(2^x)$

ได้ว่า $(x+1)\ln 5 = x\ln 2$

หรือได้ว่า $x(\ln 5 - \ln 2) = -\ln 5$

เพราะฉะนั้น $x = -\dfrac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2}$

หรือคำตอบคือ $x = \dfrac{\ln 5}{\ln 2 - \ln 5}$

ตัวอย่างที่ 7 แก้อสมการ $\log_2(x-1) > 3$

วิธีทำ เขียนพจน์ด้านขวาในรูปลอการิทึม

$$\log_2(x-1) > \log_2 2^3$$

โดยสมบัติของอสมการลอการิทึม ได้ว่า

$$x - 1 > 8$$

หรือได้ว่า $x > 9$ เซตคำตอบของอสมการคือ $(9,\infty)$

ตัวอย่างที่ 6 แก้สมการ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 2$

วิธีทำ ใส่ ln ทั้งสองข้าง ได้ว่า $\ln\left(\frac{1}{3}\right)^x > \ln(2)$

ได้ว่า $x\ln\left(\frac{1}{3}\right) > \ln 2$

แต่เนื่องจาก $\ln(1/3) = -\ln 3$ ดังนั้น $x < -\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$

เซตคำตอบของอสมการคือ $(-\infty, -\frac{\ln 2}{\ln 3})$

(อาจตอบในรูปลอการิทึมฐานอื่น คือ $x < -\log_3 2$)

ทบทวนความเข้าใจ 1 จงหาค่า x ที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

สมการ	คำตอบของสมการ
$2\log_5(x) = \log_5(25)$	
$\log_2(x^2) = 4$	
$2^x = 7$	
$3^{2x-1} = 5$	
$4^x = 3^{2x}$	
$\log_5(x) = \log_2(8)$	
$\ln(x+1) = 2$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงแก้สมการหรืออสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

❶ $\log_3(x-1) - \log_3(2) = 2$

❷ $\log_3 x - \log_3(x-2) = 1$

❸ $\log_2(x) = \ln x$

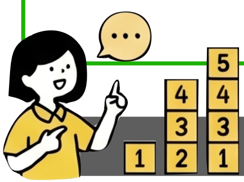
❹ $2^x + 2^{x-1} = 12$
(คำใบ้ : เปลี่ยนตัวแปรให้ $2^x = A$)

❺ $\log_2(x-1) > 2$

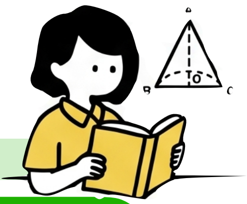
❻ $\log_3(x+2) - \log_3 x \leq 1$

❼ $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 5$

❽ $2^{x-1} + 2^x > 12$



เฉลยแบบฝึกหัด : ❶ $x = 19$ ❷ $x = 3$ ❸ $x = 1$ ❹ $x = 3$ ❺ $(5,\infty)$ ❻ $(0,1]$ ❼ $(-\frac{\ln 5}{\ln 3}, \infty)$ ❽ $(3,\infty)$



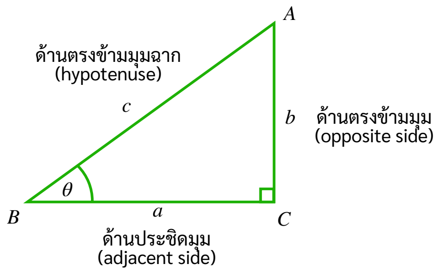
วันที่ 23 ทฤษฎีบทปีทากอรัส และอัตราส่วนตรีโกณมิติ

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $\triangle ABC$ ดังภาพ ทฤษฎีบทปีทากอรัส (Pythagoras Theorem) กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านประกอบมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากได้ว่า

$$a^2 + b^2 = c^2$$



- ตัวอย่างเลขชุดปีทากอรัส ที่ความยาวด้านเป็นจำนวนเต็ม เช่น (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25) ทั้งนี้ เมื่อขยายสเกลความสัมพันธ์นี้ยังคงเป็นจริง
- เมื่อสามเหลี่ยมมีความยาวด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $\sqrt{2}$ หน่วย

- สำหรับสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนด θ เป็นมุมประชิดกับด้านตรงข้ามมุมฉาก เรานิยาม**อัตราส่วนตรีโกณมิติ**

$$\sin\theta = \frac{b}{c} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

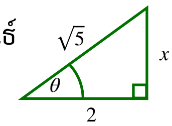
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- สำหรับกรณีค่ามุมพิเศษบางค่า ค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติสอดคล้องดังตาราง

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	×

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่งมีความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก $\sqrt{5}$ หน่วย และมีด้านประกอบมุมฉากหนึ่งยาว 2 หน่วย อีกด้านยาวเท่าใด



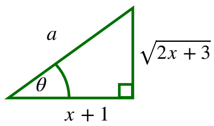
วิธีทำ สมมติอีกด้านยาว x จากความสัมพันธ์

$$(\sqrt{5})^2 = 2^2 + x^2$$

ได้ว่า $5 = 4 + x^2$ หรือได้ว่า $x^2 = 1$

เพราะฉะนั้น อีกด้านหนึ่งยาว 1 หน่วย (ใช้เฉพาะค่าบวก)

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนด พร้อมระบุค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ $\sin\theta, \cos\theta$



วิธีทำ ด้าน a หาได้จาก

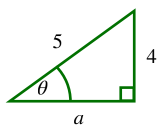
$$a^2 = (x+1)^2 + (\sqrt{2x+3})^2$$

$$a^2 = x^2 + 4x + 4 \text{ ได้ว่า}$$

$$a = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = x+2$$

ดังนั้น $\sin\theta = \frac{\sqrt{2x+3}}{x+2}$ และ $\cos\theta = \frac{x+1}{x+2}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\sin\theta = \frac{4}{5}$ จงหา $\tan\theta$



วิธีทำ จากเงื่อนไขที่กำหนด จะพบว่า

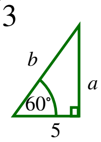
$$5^2 = 4^2 + a^2$$

ได้ว่า $a^2 = 9$ หรือ $a^2 = 3$

เพราะฉะนั้น $\tan\theta = \frac{4}{3}$

ตัวอย่างที่ 4 ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้ามุมหนึ่งมีขนาด 60° และด้านประชิดมุมยาว 5 หน่วย หาความยาวด้านที่เหลือ

วิธีทำ จาก $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ จะได้ว่า $\frac{a}{5} = \sqrt{3}$



นั่นคือ $a = 5\sqrt{3}$ และจาก $\cos 60^\circ = \frac{5}{b}$

จะได้ว่า $b = \frac{5}{1/2} = 10$

ตัวอย่างที่ 5 หาค่า $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$

วิธีทำ $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

ทั้งนี้ในสามเหลี่ยมมุมฉาก $\sin(A) = \cos(90^\circ - A)$ และ $\cos(A) = \sin(90^\circ - A)$

ตัวอย่างที่ 6 หาค่า $\sin 45^\circ \cos 60^\circ - \cos 30^\circ \sin 30^\circ$

วิธีทำ $\sin 45^\circ \cos 60^\circ - \cos 30^\circ \sin 30^\circ$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 จงหาความยาวด้านที่เหลือ และคำนวณอัตราส่วนตรีโกณมิติจากข้อมูลที่กำหนดให้

a	b	c	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
8	6		$\times$			
	$2\sqrt{2}$	8	$\times$			
x	$x+2$		$\times$			
$x+1$		x^2+2	$\times$			
3			30°			
	$\sqrt{2}$		60°			
		$\sqrt{x^2+1}$	45°			
	x		30°			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

❶ $\sin 45^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

❷ $\sin 30^\circ \sin 60^\circ + \cos 30^\circ \cos 60^\circ$

❸ $\dfrac{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ}{\tan 45^\circ}$

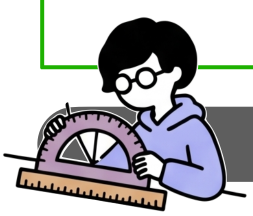
❹ $\tan 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \csc 45^\circ$

❺ $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$

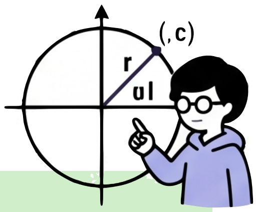
❻ $(\sin 60^\circ + \cos 30^\circ)(\sin 30^\circ + \cos 60^\circ)$

❼ $(\csc 30^\circ + \sin 45^\circ)^2 - (\sin 45^\circ)^2$

❽ $\dfrac{(\sec 60^\circ - \cos 30^\circ)(\sec 60^\circ + \cos 30^\circ)}{\tan^2 45^\circ}$



เฉลยเฉพาะคำตอบ : ❶ $\frac{3}{4}$ ❷ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ❸ 1 ❹ $\frac{5}{2}$ ❺ $\frac{1}{2}$ ❻ $\sqrt{3}$ ❼ $4+2\sqrt{2}$ ❽ $\frac{13}{4}$



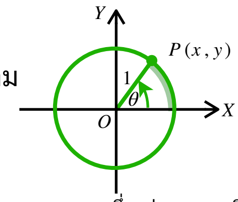
วันที่ 24 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ : วงกลมหนึ่งหน่วย

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 5 | วัน / เวลาที่ทำ :

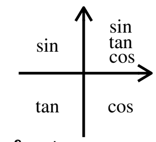
Main Concept : สาระสำคัญ

- เพื่อขยายแนวคิดของอัตราส่วนตรีโกณมิติให้สามารถวัดมุมในรูปสามเหลี่ยมที่ไม่ใช่สามเหลี่ยมมุมฉาก เราพิจารณาตรีโกณมิติในรูปแบบวงกลมหนึ่งหน่วย
- กำหนดวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2+y^2=1$ เมื่อพิจารณาจุด $P(x,y)$ ซึ่งอยู่บนวงกลมในจตุภาคที่หนึ่ง โดยที่ OP ทำมุม θ กับแกน X จะได้พิกัดของจุด(x,y) ในรูป

  $x=\cos\theta \quad y=\sin\theta$ ได้เอกลักษณ์ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$



วงกลมหนึ่งหน่วย



ในแต่ละจตุภาค ฟังก์ชันที่ระบุในรูป มีเครื่องหมายเป็นบวก

- นอกจากนี้ เราพิจารณาค่ามุมในรูปความยาวส่วนโค้ง เป็นค่าจำนวนจริง หน่วยการวัดมุมนี้เรียกว่า**เรเดียน** (radian) โดยมุม 360° คิดเป็น 2π เรเดียน
- เรานิยาม**ฟังก์ชันไซน์** $f(x)=\sin x$ และ **ฟังก์ชันโคไซน์** $f(x)=\cos x$ โดยที่ x ในที่นี้คือจำนวนจริง (การแทนค่าพึงแทนค่ามุมในหน่วยเรเดียน)
- สำหรับฟังก์ชันอื่น ๆ นิยามทำนองคล้ายกันกับอัตราส่วนตรีโกณมิติ คือ นิยาม

  $f(x)=\tan x \quad f(x)=\csc x \quad f(x)=\sec x \quad f(x)=\cot x$

กำหนด $f(x)=\sin x$
$D_f=\mathbb{R}, \quad R_f=[-1,1]$

กำหนด $f(x)=\cos x$
$D_f=\mathbb{R}, \quad R_f=[-1,1]$

- เมื่อขยายการคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติในการคำนวณค่ามุมจากมุมแหลมสู่มุมป้าน เราจะใช้การคำนวณบนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยอาศัยรูปสามเหลี่ยมที่สะท้อนจากสามเหลี่ยมในจตุภาคที่หนึ่ง ไปยังจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยในจตุภาคที่ต้องการ และพิจารณาเครื่องหมายตามจตุภาค
- กำหนดการวัดมุม θ จากแกน X ไปยัง OP ในทิศทวนเข็มนาฬิกาหากวัดเกิน 2π ให้ตัดรอบทีละ 2π และเมื่อวัดมุมในทิศตามเข็มนาฬิกาค่ามุมจะติดลบ ทั้งนี้ $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ และ $\cos(-\theta)=\cos(\theta)$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 เปลี่ยนมุม 45° ให้เป็นหน่วยเรเดียน และเปลี่ยน $\frac{5\pi}{6}$ ให้เป็นองศา

วิธีทำ เราใช้การเทียบบัญญัติไตรยางช่วยได้ กล่าวคือ

มุม 360° ความยาวส่วนโค้ง 2π เรเดียน

มุม 45° ความยาวส่วนโค้ง $\frac{2\pi}{360^\circ}\times 45^\circ=\frac{\pi}{4}$ เรเดียน

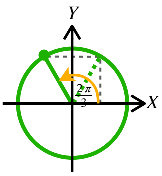
ความยาวส่วนโค้ง 2π เรเดียน คือมุม 360°

ความยาวส่วนโค้ง $\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน คือมุม

$$360^\circ\times\frac{5\pi/6}{2\pi}=150^\circ$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $f(x)=\sin x$ หา $f(\frac{\pi}{3}), f(\frac{2\pi}{3})$

วิธีทำ พิจารณา $f(\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{3})$ มีความหมายเดียวกันกับค่าไซน์ของมุม 60° นั่นคือ $f(\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$



กรณี $f(\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{2\pi}{3})$

แขนของมุมอยู่ใน Q2 มีค่าไซน์เป็นบวก และสัมพันธ์กับมุม $\pi/3$ ได้ว่า

$f(\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ตัวอย่างที่ 3 หาค่า $\sin(\frac{7\pi}{3}), \cos(\frac{7\pi}{3}), \tan(\frac{7\pi}{3})$

วิธีทำ $\sin(\frac{7\pi}{3})=\sin(2\pi+\frac{\pi}{3})$ ตัดรอบ 2π แขนของมุมตกใน Q1 จึงได้ว่า

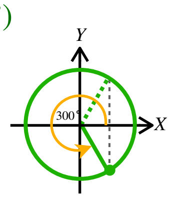
$$\sin(\frac{7\pi}{3})=\sin(2\pi+\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(\frac{7\pi}{3})=\cos(2\pi+\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$$

$$\tan(\frac{7\pi}{3})=\frac{\sin(\frac{7\pi}{3})}{\cos(\frac{7\pi}{3})}=\sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 4 หาค่า $\sin(300^\circ), \tan(300^\circ)$

วิธีทำ แขนของมุม 300° ตกใน Q4 สัมพันธ์กับสามเหลี่ยมที่มีมุม 60° ใน Q1 โดยที่ใน Q4 ค่าไซน์เป็นลบ จึงได้ว่า



$\sin(300^\circ)=-\sin(60^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

และพบว่าใน Q4 ค่าแทนเจนต์เป็นบวก ได้ว่า

$\tan(300^\circ)=-\tan(60^\circ)=-\sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 5 หาค่า $\sin(-\frac{7\pi}{4}), \quad \cos(-\frac{7\pi}{4})$

วิธีทำ $\sin(-\frac{7\pi}{4})=-\sin(\frac{7\pi}{4})$ แขนของมุมตกใน Q4 และ $\sin(\frac{7\pi}{4})=-\sin(\frac{\pi}{4})$ ได้ว่า $\sin(-\frac{7\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

และ $\cos(-\frac{7\pi}{4})=\cos(\frac{7\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

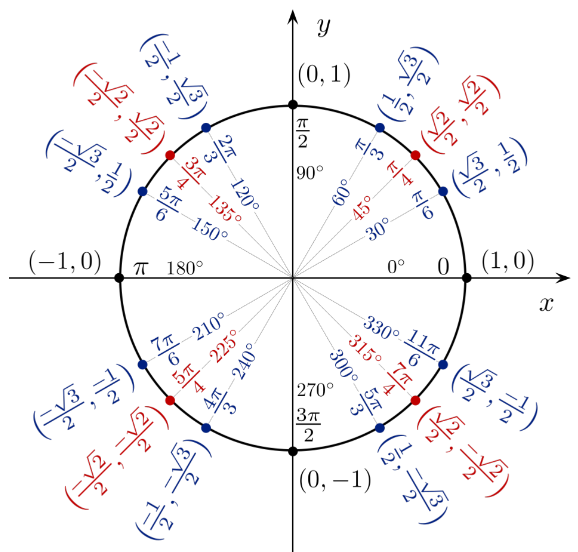
ตัวอย่างที่ 6 หาค่า $\sin(\frac{10\pi}{3}), \quad \sec(\frac{10\pi}{3})$

วิธีทำ $\sin(\frac{10\pi}{3})=\sin(2\pi+\frac{4\pi}{3})$ ตัดรอบ 2π แขนของมุมตกใน Q3 จึงได้ว่า

$$\sin(\frac{10\pi}{3})=\sin(2\pi+\frac{\pi}{3})=-\sin(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec(\frac{10\pi}{3})=\sec(2\pi+\frac{\pi}{3})=-\sec(\frac{\pi}{3})=-2$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 ใช้ข้อมูลจากวงกลมหนึ่งหน่วยที่กำหนด คำนวณค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้



ค่าของพิกัดบนวงกลมหนึ่งหน่วย (รูปจาก wikipedia.org)

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$\frac{\pi}{4}$			
$-\frac{\pi}{6}$			
$\frac{3\pi}{4}$			
$\frac{3\pi}{2}$			
$\frac{5\pi}{6}$			
$\frac{14\pi}{3}$			
$-\frac{11\pi}{6}$			
$\frac{4\pi}{3}$			

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ใช้สามเหลี่ยมมุมฉากช่วยหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

❶ $\cos(\frac{2\pi}{3})$

❷ $\sin(\frac{5\pi}{6})$

❸ $\tan(\frac{7\pi}{6})$

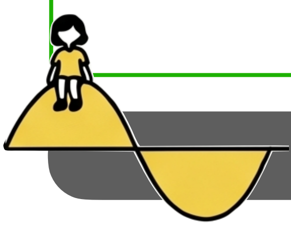
❹ $\sin(-\frac{\pi}{4})$

❺ $\cos(-\frac{2\pi}{3})$

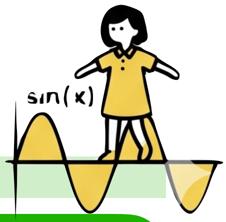
❻ $\tan(-\frac{5\pi}{6})$

❼ $\sin(\frac{35\pi}{6})$

❽ $\cos(\frac{13\pi}{4})$



เฉลยทบทวนความเข้าใจ 2 : ❶ $-\frac{1}{2}$ ❷ $\frac{1}{2}$ ❸ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ❹ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ❺ $-\frac{1}{2}$ ❻ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ❼ $-\frac{1}{2}$ ❽ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



วันที่ 25 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

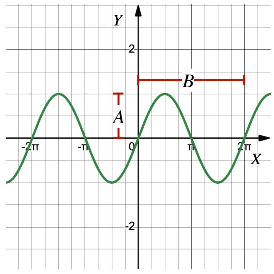
Level : มัธยมศึกษาปีที่ 5 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะเป็นคาบ (Period) สังเกตได้จากลักษณะการเกิดซ้ำตามรอบที่กำหนด
- กราฟของฟังก์ชันไซน์รูปมาตรฐาน อยู่ในรูป

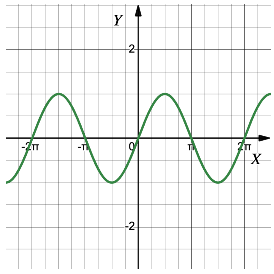
$$f(x) = A\sin(Bx + C) + D$$

  - A แสดงถึงความสูง (amplitude) บ่งบอกขนาดการแกว่ง
  - B แสดงถึงคาบ (Period) บ่งบอกความยาวหนึ่งรอบที่ซ้ำกัน หาได้จาก $\frac{2\pi}{|B|}$
  - C แสดงถึงการเลื่อนซ้าย–ขวา (phase shift)
  - D แสดงถึงการเลื่อนขึ้น–ลง (vertical shift)
- สำหรับกราฟของฟังก์ชันโคไซน์ มีลักษณะคล้ายกันกับฟังก์ชันไซน์ ทั้งนี้ อาจกล่าวได้ว่า $f(x) = \cos(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$



กราฟ $f(x) = \sin x$

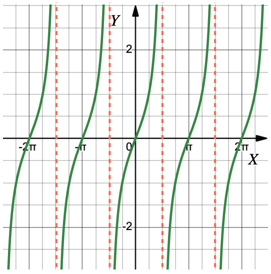
Amplitude = 1
คาบ = 2π



กราฟ $f(x) = \cos x$

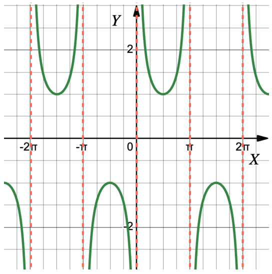
Amplitude = 1
คาบ = 2π

- ลักษณะของกราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ มักมีเงื่อนไขที่สอดคล้องกับการหาค่าไม่ได้ของตัวส่วน เช่น $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ซึ่ง $\cos x$ มีค่าเป็นศูนย์เมื่อ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ สำหรับจำนวนเต็ม k ใด ๆ ทั้งนี้ ณ ตำแหน่ง x ที่หาค่าไม่ได้ จะมีเส้นกำกับแนวตั้ง (vertical asymptote) คอยกำกับกราฟอยู่ ดังภาพ (เส้นประ)



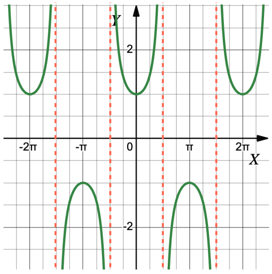
$f(x) = \tan x$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$R_f = \mathbb{R}$
คาบ = π



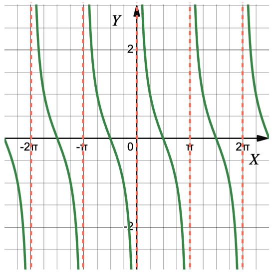
$f(x) = \csc x$

$D_f = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$R_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
คาบ = 2π



$f(x) = \sec x$

$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$
$R_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
คาบ = 2π



$f(x) = \cot x$

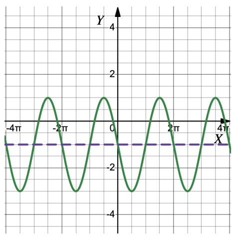
$D_f = \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$R_f = \mathbb{R}$
คาบ = π

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 วิเคราะห์ $f(x) = 2\sin(x + \pi) - 1$

<u>วิธีทำ</u> กราฟของฟังก์ชันนี้

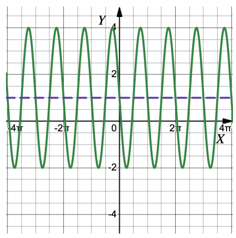
- Amplitude = 2
- คาบ = $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$
- Phase shift = $-\pi$
- Domain $D_f = \mathbb{R}$
- Range $R_f = [-3, 1]$
- เส้น midline คือ $y = -1$



ตัวอย่างที่ 2 วิเคราะห์ $f(x) = -3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

<u>วิธีทำ</u> กราฟพลิกตรงข้าม $f(x) = \cos x$

- Amplitude = 3
- คาบ = $\frac{2\pi}{2} = \pi$
- Phase shift = $\pi/2$
- Domain $D_f = \mathbb{R}$
- Range $R_f = [-2, 4]$
- เส้น midline คือ $y = 1$



ตัวอย่างที่ 3 หาโดเมนของ $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

<u>วิธีทำ</u> $f(x) = \tan x$ คำนวณค่าไม่ได้เมื่อ $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม k ดังนั้น จากฟังก์ชัน ได้เงื่อนไขว่า

$2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ จึงได้ว่า $x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม k

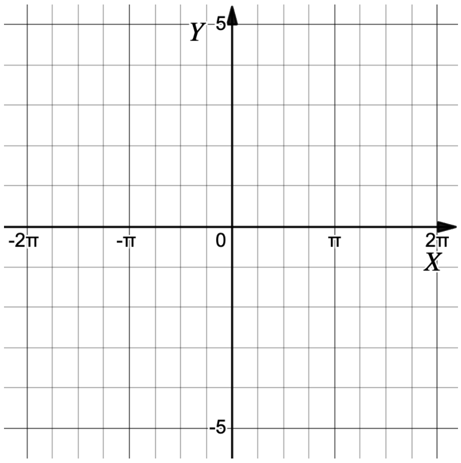
เพราะฉะนั้น Domain $= \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

ทบทวนความเข้าใจ 1 วิเคราะห์กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์และโคไซน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

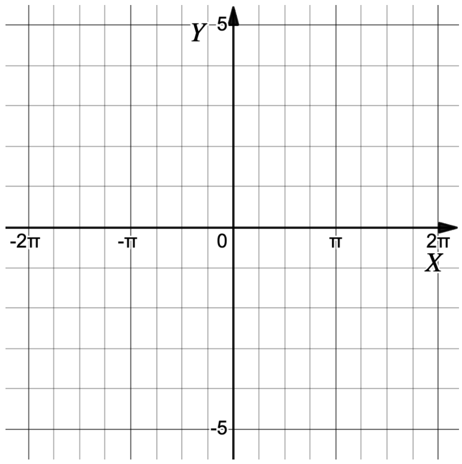
ฟังก์ชัน	Amplitude	คาบ	Phase shift	Midline
$f(x) = 2\sin x$				
$f(x) = \cos x - 3$				
$f(x) = 3\sin(2x)$				
$f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$				
$f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$				
$f(x) = -3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$				
$f(x) = \cos(3x - \pi) - 1$				

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ร่างกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

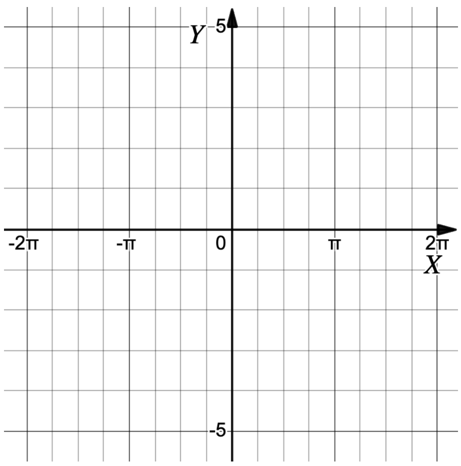
❶ $f(x) = 2\cos x$



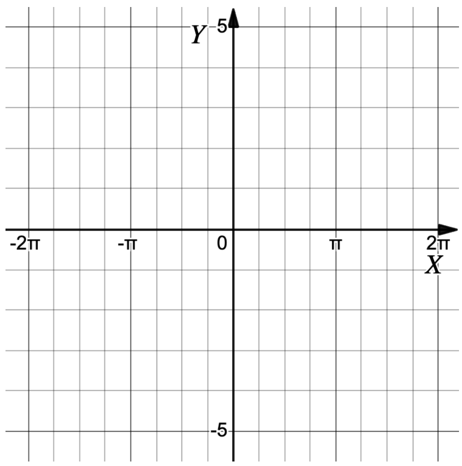
❷ $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

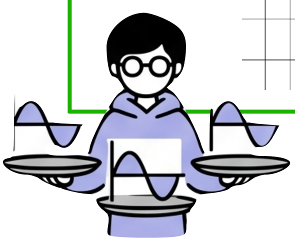


❸ $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + 1$



❹ $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$





วันที่ 26 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่สำคัญ

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 5 วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- เอกลักษณ์ตรีโกณมิติพื้นฐาน $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ นอกจากนี้ยังได้เอกลักษณ์เพิ่มเติม
  นำ $\sin^2\theta$ หารทั้งสมการ ได้ $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ นำ $\cos^2\theta$ หารทั้งสมการ ได้ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
- เอกลักษณ์เกี่ยวกับผลบวก $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$
  $$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$$
  $$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$$
- เอกลักษณ์เกี่ยวกับมุมสองเท่า $\sin(2A) = 2\sin A\cos A$
  $$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
  $$\tan(2A) = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}, \quad 1 - \tan^2 A \neq 0$$
  หรือเราใช้เอกลักษณ์ $\cos^2 A = \dfrac{1 + \cos 2A}{2}$ และ $\sin^2 A = \dfrac{1 - \cos 2A}{2}$
- เอกลักษณ์เกี่ยวกับผลคูณกับผลบวก $\sin A\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$
  $$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$
  $$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 จัดรูป $\sin^4 x$ ให้อยู่ในรูปที่ไม่มีเลขชี้กำลังมากกว่า 1

<u>วิธีทำ</u> ใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

ได้ว่า
$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\sin^2 x\right)^2 \\ &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \\ &= \frac{1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}}{4} \\ &= \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 เขียน $\sin^2 x\cos^2 x$ ให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

<u>วิธีทำ</u> ในที่จะจัดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันโคไซน์ ดังนี้
$$\begin{aligned}\sin^2 x\cos^2 x &= \left(\sin x\cos x\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\sin^2 2x}{4} \\ &= \frac{1 - \cos 4x}{8}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 เขียน $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ ในรูปอย่างง่าย

<u>วิธีทำ</u>
$$\begin{aligned}\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} &= \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 เขียน $\sin 3x\sin 5x$ ให้อยู่ในรูปผลบวก

<u>วิธีทำ</u> $\sin 3x\sin 5x$
$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2}\left[\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(-2x) - \cos 8x\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos 2x - \cos 8x\right]\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 เขียน $\sin^4 x + \cos^4 x$ ในรูปอย่างง่าย

<u>วิธีทำ</u> $\sin^4 x + \cos^4 x$
$$\begin{aligned}&= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x \\ &= 1^2 - 2\left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right) \\ &= 1 - \frac{1-\cos 4x}{4} \\ &= \frac{3 + \cos 4x}{4}\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่า $\sin(75^\circ)$

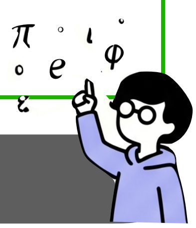
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 จัดรูปตรีโกณมิติให้อยู่ในรูปตรีโกณมิติที่มีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง หรือ ผลบวกของกำลังหนึ่ง

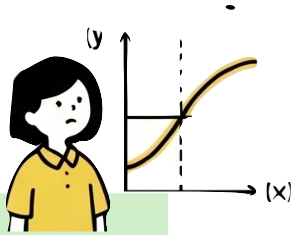
❶ $\cos^4 x$	❷ $\sin^6 x$
❸ $\cos^3 x \sin x$	❹ $\sin^3 x \cos x$
❺ $\cos^2 x \sin^4 x$	❻ $\sin^6 x - \cos^6 x$
❼ $\cos(x)\ \sin(3x)$	❽ $\cos(2x)\ \sin(4x)$

ทบทวนความเข้าใจ 2 ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

❶ $\dfrac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$	❷ $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x$
❸ $\dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos 2x}$	❹ $\dfrac{\tan x}{1 + \sec x} + \dfrac{1 + \sec x}{\tan x}$
❺ $\dfrac{1}{1 - \sin x} - \dfrac{1}{1 + \sin x}$	❻ $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x$
❼ $\sin(150^\circ)$	❽ $\cos(135^\circ)$



เฉลยเฉพาะคำตอบ ตอนที่สอง : ❶ 1 ❷ $\sin x \cos x$ ❸ $\dfrac{1 - \cos 2x}{2(1 + \cos 2x)}$ ❹ $\tan x + 1$ ❺ $2 \sec x \tan x$ ❻ $\sin 4x$ ❼ $\dfrac{1}{2}$ ❽ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

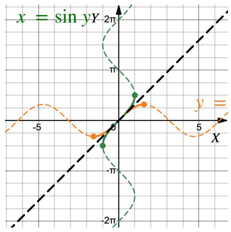


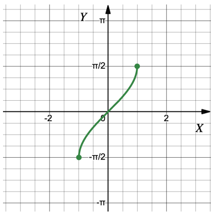
วันที่ 27 ฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 5 | วัน / เวลาที่ทำ :

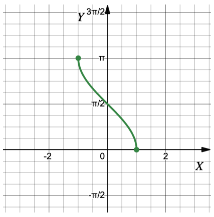
Main Concept : สาระสำคัญ

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ไม่เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน
- เราเขียนตัวผกผันตรีโกณมิติได้ เช่น $y = \sin x$ มีตัวผกผันคือ $y = \sin^{-1} x$ (**ไม่ได้**หมายถึง $\frac{1}{\sin x}$) กล่าวคือ $y = \sin^{-1} x$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sin y$ และฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นพิจารณาได้ในทำนองเดียวกัน
- เมื่อมีการกำหนดโดเมนที่เหมาะสม จะพิจารณาฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ ดังนี้

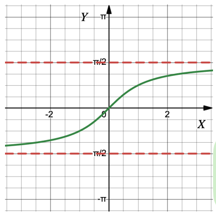




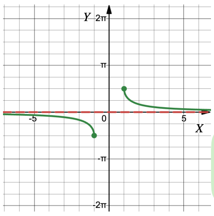
$f(x) = \sin x$ มีฟังก์ชันผกผัน $f(x) = \arcsin x$ เมื่อกำหนดโดเมน
$D_f = [-1,1]$
$R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



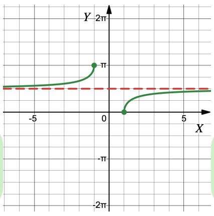
$f(x) = \cos x$ มีฟังก์ชันผกผัน $f(x) = \arccos x$ เมื่อกำหนดโดเมน
$D_f = [-1,1]$
$R_f = [0,\pi]$



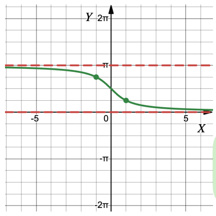
$f(x) = \tan x$ มีฟังก์ชันผกผัน $f(x) = \arctan x$ เมื่อกำหนดโดเมน
$D_f = (-\infty,\infty)$
$R_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



$f(x) = \csc x$ มีฟังก์ชันผกผัน $f(x) = \operatorname{arccsc} x$ เมื่อกำหนดโดเมน
$D_f = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$
$R_f = [-\frac{\pi}{2},0) \cup (0,\frac{\pi}{2}]$



$f(x) = \sec x$ มีฟังก์ชันผกผัน $f(x) = \operatorname{arcsec} x$ เมื่อกำหนดโดเมน
$D_f = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$
$R_f = [0,\frac{\pi}{2}) - (\frac{\pi}{2},\pi]$



$f(x) = \cot x$ มีฟังก์ชันผกผัน $f(x) = \operatorname{arccot} x$ เมื่อกำหนดโดเมน
$D_f = (-\infty,\infty)$
$R_f = (0,\pi)$

- การคำนวณค่าฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ จะต้องพิจารณาโดเมนของฟังก์ชันประกอบด้วย โดยค่าของฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติต้องเป็นจำนวนจริง (ไม่ใช่ค่ามุมเป็นองศา)

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 คำนวณค่า $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ ได้ว่า $\cos\theta = \frac{1}{2}$
หา θ ในช่วงเรนจ์ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ที่ทำให้ $\cos\theta = \frac{1}{2}$
พบว่า ในช่วง $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ มี $\theta = \frac{\pi}{3}$ ที่ทำให้ $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
เพราะฉะนั้น $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

ตัวอย่างที่ 2 คำนวณค่า $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\theta = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ได้ว่า $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
ในช่วงเรนจ์ มี $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ที่ทำให้ $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
เพราะฉะนั้น $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

ตัวอย่างที่ 3 คำนวณค่า $\arctan(-1)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\theta = \arctan(-1)$ ได้ว่า $\tan\theta = -1$
หา θ ในช่วงเรนจ์ $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ที่ทำให้ $\tan\theta = -1$
พบว่า ในช่วง $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ มี $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ที่ทำให้ $\tan(-\frac{\pi}{4}) = 1$ เพราะฉะนั้น $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

ตัวอย่างที่ 4 คำนวณค่า $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\theta = \arccos\frac{3}{5}$ จะได้ว่า $\cos\theta = \frac{3}{5}$
กรณีนี้สร้างรูปสามเหลี่ยมฉาก ซึ่งได้ว่า $\sin\theta = \frac{4}{5}$

ตัวอย่างที่ 5 คำนวณค่า $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\theta = \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)$ จะได้ว่า $\sin\theta = -\frac{5}{13}$
เนื่องจาก $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ และ $\sin\theta < 0$
มุม θ จึงตกในจตุภาคที่สี่ นั่นคือ $\tan\theta = -\frac{5}{12}$
ฉะนั้น $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right) = -\frac{5}{12}$

ตัวอย่างที่ 6 แสดงว่า $\arccos(\sin(0))$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\sin 0 = 0$ ดังนั้นพิจารณา $\arccos 0$
หา θ ในช่วงเรนจ์ $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ที่ทำให้ $\cos\theta = 0$
พบว่า $\theta = \frac{\pi}{2}$
(ถึงแม้ว่า $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ แต่เนื่องจากเรนจ์คือ $[0,\pi]$
$\theta = -\frac{\pi}{2}$ จึงไม่เป็นคำตอบ)

ทบทวนความเข้าใจ 1 คำนวณค่าของฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

❶ $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$	❷ $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
❸ $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	❹ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
❺ $\arctan(1)$	❻ $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$
❼ $\operatorname{arcsec}(2)$	❽ $\operatorname{arccot}(1)$

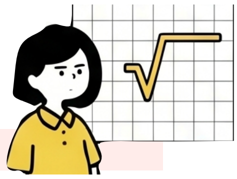
ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : คำนวณค่าต่อไปนี้

❶ $\sin(\arcsin(\frac{3}{5}))$	❷ $\cos(\arccos(\frac{5}{13}))$
❸ $\tan(\arcsin(\frac{5}{13}))$	❹ $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{6})$

เฉลยคำตอบแบบฝึกหัด ตอนที่หนึ่ง : ❶ $\frac{\pi}{6}$ ❷ $\frac{5\pi}{6}$ ❸ $\frac{\pi}{4}$ ❹ $\frac{2\pi}{3}$ ❺ $\frac{\pi}{4}$ ❻ $-\frac{\pi}{3}$ ❼ $\frac{\pi}{3}$ ❽ $\frac{\pi}{4}$ ตอนที่สอง : ❶ $\frac{3}{5}$ ❷ $\frac{5}{13}$ ❸ $\frac{5}{12}$ ❹ $\frac{\pi}{6}$

ช่วงที่ 6

เนื้อหาเบ็ดเตล็ดอื่น ๆ ที่จำเป็นในแคลคูลัส



วันที่ 28 สังยุคของราก

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 3-4 วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- **สังยุค** (conjugate) ของราก เป็นการจัดรูปที่เปลี่ยนเครื่องหมายกลางของพจน์ที่มีการบวกกันมากกว่าสองพจน์ เช่น
  สังยุคของ $a+\sqrt{b}$ คือ $a-\sqrt{b}$ สังยุคของ $\sqrt{x}-y$ คือ $\sqrt{x}+y$
- โดยทั่วไป เรามักใช้สังยุคช่วยในการจัดรูปพจน์ให้อยู่ในรูปที่คำนวณค่าง่ายขึ้น เช่น ทำให้ตัวส่วนไม่อยู่ในรูปติดราก (rationalization) โดยมักอาศัยเอกลักษณ์พีชคณิตช่วย เช่น ผลต่างกำลังสอง กล่าวคือ
  สังยุคของ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ คือ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ซึ่งพบว่า $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$
  ดังนั้น รูปที่สมมูลกับพจน์ $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ หาได้จาก $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$
- บางครั้งเราอาจใช้เอกลักษณ์อื่น เช่น ผลบวกกำลังสาม หรือ ผลต่างกำลังสามช่วยได้ เช่น
  สำหรับพจน์ $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ เราคูณพจน์นี้ด้วย $(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{ab}+(\sqrt[3]{b})^2$ เพื่อทำให้ได้ว่า
  $$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\left((\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{ab}+(\sqrt[3]{b})^2\right)=a+b$$

- กรณีของจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a+bi$ สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน คือ $a-bi$ เมื่อ i คือส่วนจินตภาพ $(i^2=-1)$
  เช่น สังยุคของ $3+4i$ คือ $3-4i$ ทั้งนี้ $(3+4i)(3-4i)=3^2-(4i)^2=9-16(-1)=25$
  สังยุคของ $-2i$ คือ $2i$ ทั้งนี้ $(-2i)(2i)=-4i^2=4$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 ทำ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดราก

วิธีทำ คูณ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ทั้งเศษและส่วนด้วย $\sqrt{2}$ ได้ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2 ทำ $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดราก

วิธีทำ สังยุคของ $2+\sqrt{3}$ คือ $2-\sqrt{3}$
คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $2-\sqrt{3}$ ได้ว่า

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}}{2^2-(\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 3 ทำ $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดราก

วิธีทำ สังยุคของ $\sqrt{3}-1$ คือ $\sqrt{3}+1$
คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $\sqrt{3}+1$ ได้ว่า

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 4 ทำ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดราก

วิธีทำ สังยุคของ $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ คือ $\sqrt{5}+\sqrt{2}$
คูณทั้งเศษและส่วนด้วย $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ได้ว่า

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\frac{\sqrt{10}+2+\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$$

ตัวอย่างที่ 5 ทำ $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+2}$ ให้อยู่ในรูปตัวส่วนไม่ติดราก

วิธีทำ ใช้พจน์ $(\sqrt[3]{3})^2-2\sqrt[3]{3}+2^2$ คูณทั้งเศษและส่วน ทำให้ $(\sqrt[3]{3}+2)\left((\sqrt[3]{3})^2-2\sqrt[3]{3}+2^2\right)=(\sqrt[3]{3})^3+2^3$

ได้ว่า

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}+2}\times\frac{(\sqrt[3]{3})^2-2\sqrt[3]{3}+2^2}{(\sqrt[3]{3})^2-2\sqrt[3]{3}+2^2}=\frac{(\sqrt[3]{3})^2-2\sqrt[3]{3}+2^2}{(\sqrt[3]{3}+2)\left((\sqrt[3]{3})^2-2\sqrt[3]{3}+2^2\right)}$$
$$=\frac{(\sqrt[3]{3})^2-2\sqrt[3]{3}+2^2}{(\sqrt[3]{3})^2+2^3}$$
$$=\frac{(\sqrt[3]{3})^2-2\sqrt[3]{3}+2^2}{11}$$

ทบทวนความเข้าใจ 1 หาสังยุคของพจน์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

พจน์ที่กำหนด	สังยุค
$3+\sqrt{5}$	
$\sqrt{7}-2$	
$5-2\sqrt{3}$	
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	
$\sqrt{6}-\sqrt{5}$	
$4+3i$	
$-2-5i$	
$i-2$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ทำให้ตัวส่วนไม่ติดราก

❶ $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

❷ $-\dfrac{7}{2\sqrt{3}}$

❸ $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

❹ $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$

❺ $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

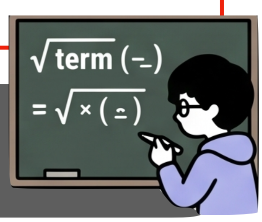
❻ $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

❼ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

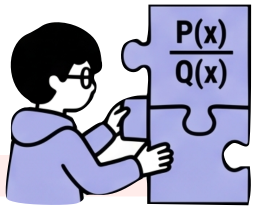
❽ $\dfrac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

❾ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

❿ $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}+2}$



เฉลยแบบฝึกหัดทบทวน : ❶ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ❷ $\dfrac{7\sqrt{3}}{6}$ ❸ $\sqrt{2}-1$ ❹ $3+\sqrt{5}$ ❺ $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ ❻ $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ❼ $2-\sqrt{3}$
❽ $3\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}+2$ ❾ $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ ❿ $\dfrac{2(\sqrt[3]{25}-2\sqrt[3]{5}+4)}{13}$



วันที่ 29 เศษส่วนของพหุนาม

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 | วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

- สำหรับจำนวนนับ **ขั้นตอนวิธีการหาร** (division algorithm) กล่าวว่า ตัวตั้ง = ตัวหาร × ผลหาร + เศษ
  เช่น เมื่อนำ 18 หารด้วย 7 ได้ผลหารคือ 2 มีเศษคือ 4 เราจะเขียนได้ในรูป $18 = 7 \times 2 + 4$
- สำหรับพหุนาม หากนำพหุนามมาหารด้วยพหุนาม เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ในทำนองเดียวกัน
- การหารพหุนามด้วยพหุนาม จะใช้วิธีการตั้งหารยาวพหุนาม ดังขั้นตอนต่อไปนี้
  1. เรียงพหุนามตามกำลังจากมากไปน้อย (พจน์ใดไม่มีตัวแปร ให้เขียนเว้นพจน์นั้นไว้)
  2. นำพจน์หน้าสุดของตัวตั้งไปหารพจน์หน้าสุดของตัวหาร
  3. คูณผลลัพธ์ที่ได้กลับไปทั้งตัวหาร
  4. ลบแล้วดึงพจน์ถัดลงมา
  5. ทำซ้ำจนกว่าดีกรีจะน้อยกว่าตัวหาร

- **เศษส่วนของพหุนาม** คือพจน์ที่เขียนได้ในรูป $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่ $Q(x) \neq 0$ (เขียนในรูปฟังก์ชันตรรกยะ) ทั้งนี้ เรามักเขียนเศษส่วนของพหุนามให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ
  เช่น ผลสำเร็จของ $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3} \times \dfrac{x^2+3x}{x^2+2x} = \dfrac{(x-1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-1)}} \times \dfrac{\cancel{x}\cancel{(x+3)}}{\cancel{x}(x+2)} = \dfrac{x-1}{x+2}$
- เพื่อบวก - ลบ เศษส่วนของพหุนาม จะใช้ ค.ร.น. ของพหุนาม โดยพิจารณาจากรูปตัวประกอบของพหุนาม
- เมื่อทำเศษส่วนของพหุนามให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ โดเมนของฟังก์ชันเศษส่วนพหุนามเดิมกับพหุนามในรูปผลสำเร็จ อาจไม่เท่ากัน เมื่อถามถึงโดเมนของฟังก์ชันที่กำหนดให้ จะต้องพิจารณาโดเมนของฟังก์ชันก่อนจัดรูปเสมอ
  เช่น ถ้ากำหนด $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3} \times \dfrac{x^2+3x}{x^2+2x}$ และ $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$
  จะได้ว่า $D_f = \mathbb{R} - \{-3,-2,1\}$ ในขณะที่ $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 หาร $x^3 - 2x^2 + 4$ ด้วย $x - 1$

วิธีทำ ตั้งหารยาว ได้ว่า

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 \quad -x \quad -1 \\ \hline
x-1 & x^3 - 2x^2 + 0x + 4 \\
 & \underline{x^3 - x^2} \; - \\
 & \quad -x^2 \qquad\quad + 4 \\
 & \quad \underline{-x^2 \; + x} \; - \\
 & \qquad\qquad -x \; + 4 \\
 & \qquad\qquad \underline{-x \; + 1} \; - \\
 & \qquad\qquad\qquad 3
\end{array}
$$

ได้ผลหารคือ $x^2 - x - 1$ มีเศษคือ 3 กล่าวคือ
$x^3 - 2x^2 + 4 = (x-1)(x^2 - x - 1) + 3$

อธิบายขั้นตอน
1. เขียนพหุนามเรียงพจน์ (ไม่มีพจน์ x ให้เว้นไว้)
2. นำ x ไปหาร x^3 ได้ x^2 จากนั้นนำ x^2 กลับไปคูณ $x - 1$ ได้พจน์ $x^3 - x^2$
3. นำพหุนามตัวตั้งไปลบออกจาก $x^3 - x^2$ ได้ $-x^2 + 4$
4. ดึงพจน์ที่เหลือลงมา (ในที่นี้คือ $+4$)
5. นำ x ไปหาร $-x^2$ ได้ $-x$ แล้วนำ $-x$ กลับไปคูณ $x - 1$ ได้พจน์ $x^2 + x$ นำไปลบจาก $-x^2 + 4$ ได้ $-x + 4$
6. นำ x ไปหาร $-x$ ได้ -1 แล้วนำ -1 กลับไปคูณ $x - 1$ ได้พจน์ $-x + 1$ นำไปลบจาก $-x + 4$ ได้ 3
7. เนื่องจากดีกรีที่ได้ต่ำกว่าดีกรีตัวหาร จึงหยุดหารพหุนาม

ตัวอย่างที่ 2 ทำ $\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ แยกตัวประกอบ ได้ว่า

$$\frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+3}{x-2}$$

ทั้งนี้ ถ้าให้ $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ และ $g(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

จะพบว่า $D_f = \mathbb{R} - \{-3,2\}$

ในขณะที่ $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

ตัวอย่างที่ 3 ทำ $\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} + \dfrac{2x}{x^2-4}$ ในรูปผลสำเร็จ

วิธีทำ แยกตัวประกอบ ได้ว่า

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} + \frac{2x}{x^2-4} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} + \frac{2x}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x+1}{x-2} + \frac{2x}{(x-2)(x+2)}$$

(หา ค.ร.น. ของตัวส่วน) $= \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \dfrac{2x}{(x-2)(x+2)}$

$$= \frac{(x+1)(x+2)+2x}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2+5x+2}{(x-2)(x+2)}$$

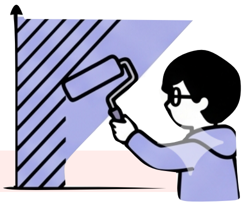
ทบทวนความเข้าใจ 1 ทำเศษส่วนพหุนามต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

เศษส่วนพหุนาม	รูปอย่างง่าย
$\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$	
$\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-4x-5}$	
$\dfrac{2x^2-8x}{x^2-4}$	
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+1}$	
$\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{3}{x+2}$	
$\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2}{x^2-1}$	
$\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}$	
$\dfrac{x^2-1}{x^2-4}\cdot\dfrac{x+2}{x-1}$	
$\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}\div\dfrac{x-3}{x+2}$	
$\dfrac{x^2+2x}{x^2-1}\cdot\dfrac{x-1}{x}$	

ทบทวนความเข้าใจ 2 แสดงวิธีทำอย่างละเอียด : ตั้งหารยาวพหุนามที่กำหนดให้ ด้วยพหุนาม

❶ หารพหุนาม x^2+4x+2 ด้วย $x+1$	❷ หารพหุนาม $2x^2-5x+3$ ด้วย $x-2$
❸ หารพหุนาม x^3-4x^2+x+6 ด้วย $x-1$	❹ หารพหุนาม $2x^3+x^2-7x-3$ ด้วย $x+1$
❺ หารพหุนาม $x^4-3x^3+2x^2+x-1$ ด้วย $x-1$	❻ หารพหุนาม $2x^4+x^3+3x-2$ ด้วย x^2+2

เฉลยผลหารและเศษ : ❶ $x+3$ เศษ -1 ❷ $2x-1$ เศษ 1 ❸ x^2-3x-2 เศษ 4 ❹ $2x^2-x-6$ เศษ 3 ❺ x^3-x^2+1 เศษ 0 ❻ $2x^2+x-1$ เศษ x



วันที่ 30 กราฟของอสมการสองตัวแปร

Level : มัธยมศึกษาปีที่ 4 - 5 วัน / เวลาที่ทำ :

Main Concept : สาระสำคัญ

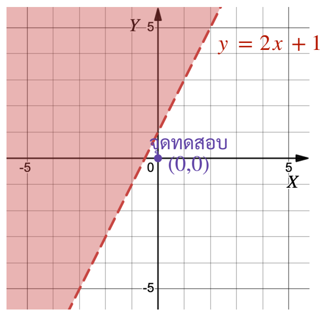
- ความสัมพันธ์บางความสัมพันธ์มีกราฟเป็นบริเวณในระนาบยุคลิด (ระนาบ $\mathbb{R}^2$) โดยทั่วไปมักเป็นความสัมพันธ์ที่มีเงื่อนไขเป็นอสมการสองตัวแปร
- ขั้นตอนในการพิจารณาบริเวณที่แสดงกราฟของอสมการ มีดังนี้
  1. หาเส้นขอบของบริเวณ จากเงื่อนไขที่ระบุในสมการ
  2. เส้นขอบอาจเป็นเส้นประ เมื่ออสมการมีเครื่องหมาย $<$ หรือ $>$ หรือ เส้นขอบอาจเป็นเส้นทึบ เมื่ออสมการมีเครื่องหมาย $\leq$ หรือ $\geq$
  3. เส้นขอบจะแบ่งบริเวณเป็นส่วน ๆ เราเลือกจุดตัวแทนในบริเวณดังกล่าว หากจุดตัวแทนทำให้อสมการนั้นเป็นจริง แสดงว่า บริเวณที่เลือกตัวแทนมา เป็นบริเวณของอสมการที่กำหนด

  โดยทั่วไป มักเลือกจุดที่ง่ายต่อการพิจารณา เช่น $(0,0)$ กรณีที่เส้นขอบแบ่งบริเวณออกเป็นสองบริเวณ เราอาจใช้จุดเดียวทดสอบได้ หากสอดคล้องกับอสมการ แสดงว่าเลือกบริเวณนั้น หากไม่สอดคล้อง จะเลือกบริเวณตรงข้าม
- การเลือกบริเวณ มีเงื่อนไขกำกับ เช่น เงื่อนไขหรือ นำบริเวณมายูเนียนกัน ($\cup$) เงื่อนไขและ นำบริเวณมาตัดกัน ($\cap$)

ตัวอย่างจากง่ายไปยาก

ตัวอย่างที่ 1 วาดกราฟความสัมพันธ์

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 2x + 1\}$$

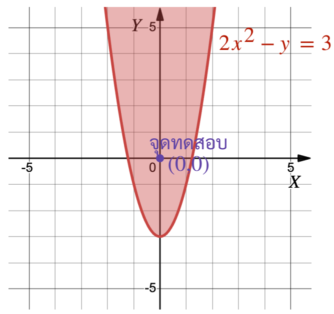


อธิบายขั้นตอน

1. $y = 2x + 1$ เป็นเส้นขอบ
2. เครื่องหมาย $>$ ขอบเป็นเส้นประ
3. เลือกจุดทดสอบ $(0,0)$ พบว่า $0 \ngtr 2(0) + 1$ แสดงว่าต้องเลือกบริเวณที่ไม่รวมจุด $(0,0)$

ตัวอย่างที่ 2 วาดกราฟความสัมพันธ์

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 - y \leq 3\}$$

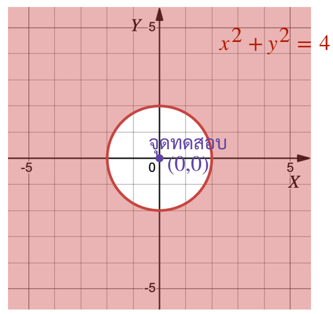


อธิบายขั้นตอน

1. $2x^2 - y = 3$ เป็นเส้นขอบ
2. เครื่องหมาย $\leq$ ขอบเป็นเส้นทึบ
3. เลือกจุดทดสอบ $(0,0)$ พบว่า $2(0) - 0 = 0 \leq 3$ แสดงว่าต้องเลือกบริเวณที่รวมจุด $(0,0)$

ตัวอย่างที่ 3 วาดกราฟความสัมพันธ์

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$$



อธิบายขั้นตอน

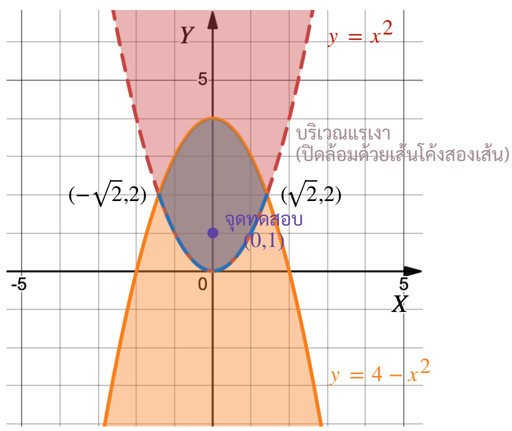
1. $x^2 + y^2 = 4$ เป็นเส้นขอบ
2. เครื่องหมาย $\geq$ ขอบเป็นเส้นทึบ
3. เลือกจุดทดสอบ $(0,0)$ พบว่า $0^2 + 0^2 = 0 \ngeq 4$ แสดงว่าต้องเลือกบริเวณที่ไม่รวมจุด $(0,0)$

ตัวอย่างที่ 5 วาดกราฟความสัมพันธ์

$$r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 \text{ และ } y \leq 4 - x^2\}$$

จุดตัดของกราฟสองเส้น
หาได้จากระบบสมการ
$y = x^2$ และ $y = 4 - x^2$
นั่นคือ $x^2 = 4 - x^2$
หรือได้ว่า $2x^2 = 4$
กล่าวคือ $x = \pm\sqrt{2}$

เมื่อ $x = \sqrt{2}$ ได้ว่า $y = 2$
และ เมื่อ $x = -\sqrt{2}$ ได้ว่า $y = 2$
ได้จุดตัดคือ $(-\sqrt{2},2), (\sqrt{2},2)$

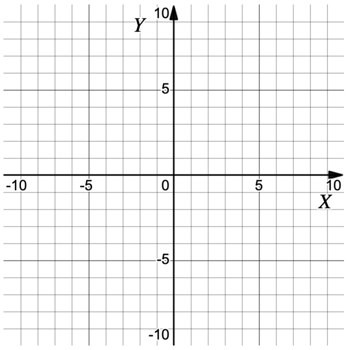


อธิบายขั้นตอน

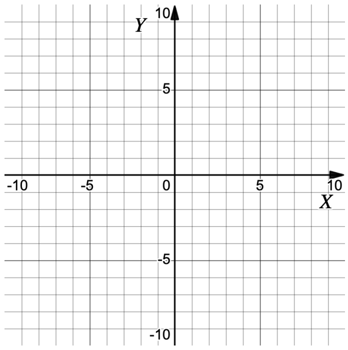
1. $y = x^2$ และ $y = 4 - x^2$ เป็นเส้นขอบ แบ่งบริเวณเป็นสามส่วน
2. อสมการ $y > x^2$ เป็นเส้นประ เลือกจุด $(0,1)$ สอดคล้องกับอสมการ (ปิดล้อมด้วยพาราโบลา)
3. อสมการ $y \leq 4 - x^2$ เป็นเส้นทึบ เลือกจุด $(0,1)$ สอดคล้องกับอสมการ (ปิดล้อมด้วยพาราโบลา
4. จึงเลือกบริเวณที่รวมจุด $(0,1)$

ทบทวนความเข้าใจ วาดกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

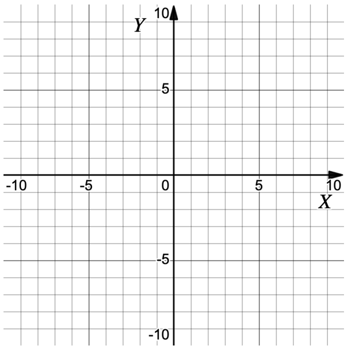
❶ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 2x + 3y > 1\}$



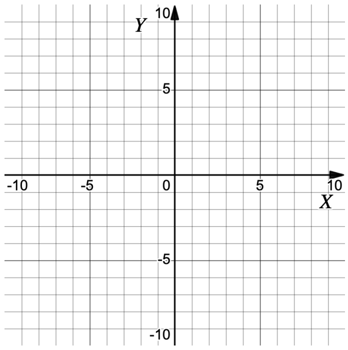
❷ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \leq 2x^2 + 4\}$



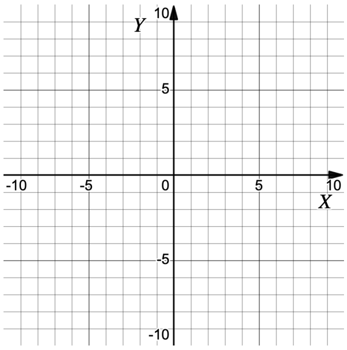
❸ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y + x^2 \geq 3\}$



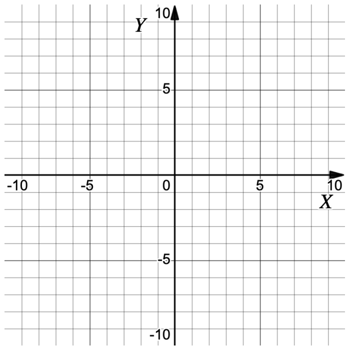
❹ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y > e^x - 1\}$



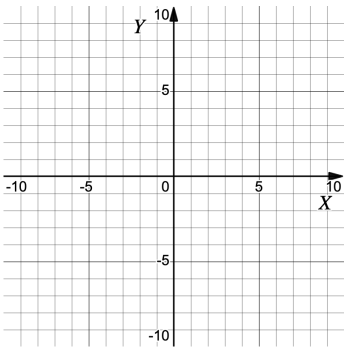
❺ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \leq \ln(x + 2)\}$

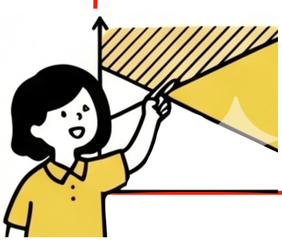


❻ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 4x^2 + 9y^2 > 36\}$

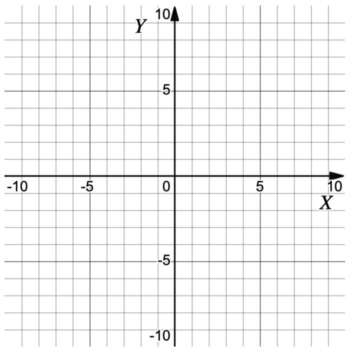


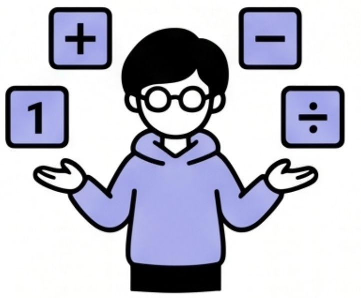
❼ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 9$ และ $y \geq 1\}$





❽ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y < -1$
และ $2x - y \geq 2\}$





แบบทดสอบหลังเรียน

ตรวจสอบความเข้าใจด้วยแบบฝึกหัดรวม

กติกา

1. แบบทดสอบหลังเรียน มีจำนวน 30 ข้อ ใช้เวลาทำ 60 นาที
2. ขอให้ใช้ความพยายามให้เต็มที่ในการทำแบบทดสอบชุดนี้ เพื่อสะท้อนผลการเรียนรู้
3. ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องมือช่วย อาทิ เครื่องคำนวณ โทรศัพท์มือถือ ปัญญาประดิษฐ์ ระหว่างทำแบบทดสอบหรือเปิดหนังสืออื่นใด เพื่อให้แบบทดสอบฉบับนี้สะท้อนความสามารถที่แท้จริงของผู้อ่าน

ถ้าพร้อมแล้ว ลงมือทำได้เลย !

แบบทดสอบหลังเรียน (ใช้เวลาทำ 1 ชั่วโมง)

คำชี้แจง เติมคำตอบลงในช่องว่าง

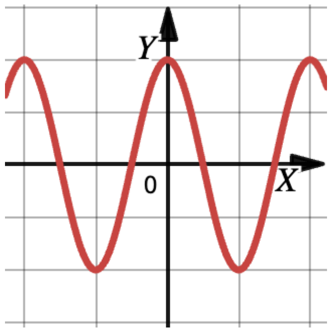
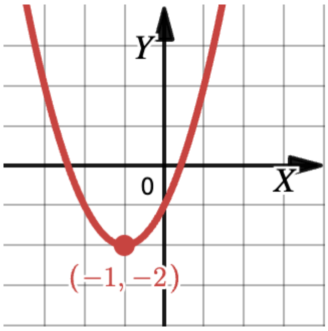
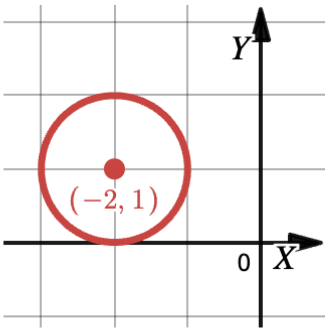
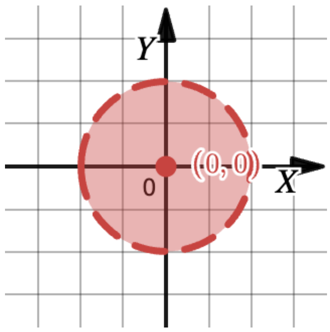
ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
1	$3 \times 4 - 9 \div 3 - 2(3+1)^2 =$	
2	$\frac{7}{8} \div \frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) =$	
3	$\frac{(20^{-1} \times 2^3)^2 \times 5^2}{2^{-3} \times 10^{-2}}$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวกได้เป็น	
4	$\frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{20}}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{30}}$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
5	กำหนด $3(x-4) - 4(x-2) = 4x - 19$ แก้สมการจะได้ $x =$	
6	$(3x-2)(x+5) - (x^2 - 3x + 4)$ ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะได้	
7	$(2x-1)^2 - (3x+2)^2$ ทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ จะได้	
8	$(4x^2 - 23x - 6)$ แยกตัวประกอบได้เป็น	
9	กำหนด $8x^2 + 2x - 3 = 0$ แก้สมการจะได้ $x =$	
10	กำหนด $\lvert 3x - 2 \rvert \geq 11$ แก้อสมการจะได้ช่วงของคำตอบคือ	
11	กำหนด $f(x) = x^2 - 3x + 4$ จะได้ $f(-2) =$	
12	กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 2x+3, & x \geq 2 \end{cases}$ จะได้ $f(-2) + f(2) - f(3)$	
13	กำหนด $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = 2x$ จะได้ $f(g(-2)) =$	
14	กำหนด $f(x) = 2x + 5$ เมื่อ $x \geq 0$ จะได้ว่าฟังก์ชันผกผันของ f คือ	
15	สมการของเส้นตรงที่มีความชัน -2 และผ่านจุด $(-1,2)$ คือ	
16	วาดกราฟของ $f(x) = (x+1)^2 - 2$	

ข้อที่	คำถาม	คำตอบ
17	สมการ $x + y^2 = 1$ มีกราฟเป็น	
18	กำหนด $\begin{array}{l} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{array}$ แก้ระบบสมการ จะได้ $x = \ldots\ldots, y = \ldots\ldots$	
19	วาดกราฟของ $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$	
20	กำหนด $5^{2x+1} = 125$ จะได้ $x =$	
21	$3\log_3(9) - 6\log_3(\sqrt{3})$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
22	กำหนด $\log_3(x-1) = 9$ จะได้ $x =$	
23	$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
24	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ ทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้เป็น	
25	วาดกราฟของ $f(x) = 2\cos x$	
26	$\sin^4 x$ จัดให้อยู่ในรูปตรีโกณมิติที่มีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่งได้เป็น	
27	$\arccos(-1) =$	
28	พจน์ $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ เมื่อทำให้ตัวส่วนไม่มีรากจะได้	
29	เมื่อหาร $2x^2 - 3x + 7$ ด้วย $x - 2$ จะได้ผลหารคือ .... และเศษคือ	
30	วาดกราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2 + y^2 < 4\}$	

ตรวจคำตอบได้ที่หน้าที่ 80

คะแนน Pre-test ที่ได้ คะแนน Post-test ที่ได้

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน (เฉพาะคำตอบ)

1	-29	11	14	21	3
2	$\frac{8}{3}$	12	2	22	$x = 3^9 + 1 = 19684$
3	$3200 = 2^7 \times 5^2$	13	17	23	$\frac{5}{4}$
4	$\frac{6}{5}$	14	$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2},\ x \geq 5$	24	$-\frac{3}{4}$
5	$x = 3$	15	$y = -2x$	25	
6	$2x^2 + 16x - 14$	16		26	$\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$
7	$-5x^2 - 16x - 3$	17	พาราโบลา	27	π
8	$(4x+1)(x-6)$	18	$x = 3,\ y = 2$	28	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$
9	$x = \frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}$	19		29	ผลหาร $= 2x + 1$, เศษ $= 9$
10	$(-\infty, -3] \cup [\frac{13}{3}, \infty)$	20	$x = 1$	30	

ประวัติผู้เขียน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ศุภณัฐ ชัยดี
Asst. Prof. Supanut Chaidee, Sc.D.

ประวัติการศึกษา

ระดับมัธยมศึกษา	พ.ศ.2550	โรงเรียนมงฟอร์ตวิทยาลัย จ.เชียงใหม่
ระดับมัธยมศึกษา	พ.ศ.2554	วท.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยมอันดับ 1 มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ระดับปริญญาตรี	พ.ศ.2556	วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ระดับปริญญาโท	พ.ศ.2560	Doctor of Mathematical Sciences, Meiji University, Japan

นักศึกษาโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) พ.ศ. 2551 - 2560

ประวัติการทำงาน

พ.ศ.2560 - 2563	อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ.2563 - ปัจจุบัน	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ.2564 - ปัจจุบัน	ผู้ช่วยคณบดี คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ความสนใจด้านงานวิจัย

การจำลองเชิงเรขาคณิต (Geometric Modeling) เรขาคณิตวิยุตและเรขาคณิตเชิงคำนวณ (Discrete and Computational Geometry) คณิตศาสตร์การคณนา (Computational Mathematics)

เว็บไซต์ส่วนตัว https://www.schaidee.com และ https://geomlab.wordpress.com

รองศาสตราจารย์ ดร.สมลักษณ์ อุตุดี
Assoc. Prof. Somlak Utudee, Ph.D.

ประวัติการศึกษา

ระดับมัธยมศึกษา	พ.ศ.2536	โรงเรียนลำปางกัลยาณี จ.ลำปาง
ระดับปริญญาตรี	พ.ศ.2540	วท.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยมอันดับ 1 มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ระดับปริญญาโท	พ.ศ.2543	วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ระดับปริญญาเอก	พ.ศ.2548	วท.ด. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นักศึกษาโครงการพัฒนาและส่งเสริมผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พสวท.) พ.ศ. 2536 - 2548

ประวัติการทำงาน

พ.ศ.2548 - 2558	อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ.2558 - 2563	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ.2563 - ปัจจุบัน	รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
พ.ศ.2555 - 2563	ประธานหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ความสนใจด้านงานวิจัย

คณิตวิเคราะห์ (Mathematical Analysis)

30 DAYS DAILY STEPS TO CALCULUS

อ่างแก้ว มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ เดือนพฤษภาคม 2569

ภาพปก

อ่างแก้ว มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
เป็นภาพจำที่ทุกคนคุ้นเคยในฐานะหมุดหมายสำคัญหนึ่งของเชียงใหม่
นักศึกษาใหม่ปีหนึ่งคงต้องแวะมาเยือนเมื่อมาถึงมหาวิทยาลัยเชียงใหม่
จึงเปรียบเสมือนภาพแห่งความสวยงามของการเรียนระดับอุดมศึกษาเมื่อมาถึง

ถึงแม้จะเห็นภาพความสวยงามเมื่อแรกมาถึง
แต่ความสวยงามนี้ เป็นเพียงการเริ่มต้นการเดินทางในการศึกษา
การเริ่มต้นที่ดี ย่อมจะนำมาซึ่งความสดในและราบรื่นในอนาคต

หนังสือ 30 Days: Daily Step to Calculus
30 วัน วันละนิด ปรับพื้นคณิตสู่แคลคูลัส
เป็นหนังสือที่สรุปประเด็นสำคัญของคณิตศาสตร์พื้นฐาน
ที่จำเป็นสำหรับการเรียนแคลคูลัส ตั้งแต่เลขคณิต พีชคณิต
ฟังก์ชัน ฟังก์ชันชนิดต่าง ๆ และหัวข้อสำคัญต่าง ๆ แยกย่อย 30 หัวข้อ
เพื่อให้เหมาะสมกับการทบทวนวันละ 1 คู่หน้า

ไม่ว่าผู้อ่านจะเป็นนักเรียนที่กำลังก้าวสู่รั้วมหาวิทยาลัย
หรือนักศึกษาที่ต้องการทบทวนพื้นฐาน
หนังสือเล่มนี้จะช่วยให้ทำให้ผู้อ่านสร้างความมั่นใจ
เติมเต็มช่องว่างทางความรู้ และเตรียมความพร้อมสำหรับการเรียนแคลคูลัสได้อย่างมั่นคง

เพราะทุกการเดินทางที่ยิ่งใหญ่ ล้วนเริ่มต้นจากก้าวเล็ก ๆ ในแต่ละวัน