เฉลยแบบฝึกหัดชุดที่ 2 (Final)

1.1 $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x^2}+\frac{6x}{x^2+1}+\frac{1}{x}\right)dx$

เฉพาะก้อนนี้ เปลี่ยนตัวแปรให้ $u = x^2+1$

$= 4\sqrt{x} - \frac{5}{x} - 3\ln(x^2+1) + \ln|x| + C$

1.2 $\int\left((2x+18)^5 + (2+18x)^{1/5}\right)dx$

$= \int (2x+18)^5\,dx + \int (2+18x)^{1/5}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int (2x+18)^5\,d(2x+18) + \frac{1}{18}\int (2+18x)^{1/5}\,d(2+18x)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(2x+18)^6 + \frac{1}{18}\cdot\frac{5}{6}(2+18x)^{6/5} + C$

$= \frac{1}{12}(2x+18)^6 + \frac{5}{108}(2+18x)^{6/5} + C$

1.3 $$\int \left(e^{\sin x} \cos x - a^{\cos x} \sin x \right) dx$$

$$= \int e^{\sin x} \cos x \, dx - \int a^{\cos x} \sin x \, dx$$

$$= \int e^{\sin x} \, d(\sin x) + \int a^{\cos x} \, d(\cos x)$$

$$= e^{\sin x} + \frac{a^{\cos x}}{\ln a} + C$$

1.4 $$\int \left((1-\tan x)^{9/2} + \cot x \right) \sec^2 x \, dx$$

$$= \int (1-\tan x)^{9/2} \sec^2 x \, dx + \int \cot x \sec^2 x \, dx$$

$$= -\int (1-\tan x)^{9/2} \, d(1-\tan x) + \int \frac{1}{\tan x} \, d(\tan x)$$

$$= -\frac{2}{11} (1-\tan x)^{11/2} + \ln |\tan x| + C$$

1.5 Let $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x\,dx$

$$\int \frac{4x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}\,dx = -\int \frac{2}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= -2\arcsin u + C$$

$$= -2\arcsin(1-x^2) + C$$

1.6 Let $u = 5x^5 + 5 \Rightarrow du = 25x^4\,dx$

$$\int x^4 \operatorname{cosec}(5x^2+5)\cot(5x^2+5)\,dx$$

$$= \frac{1}{25}\int \operatorname{cosec} u \cot u\,du$$

$$= -\frac{1}{25}\operatorname{cosec} u + C$$

$$= -\frac{1}{25}\operatorname{cosec}(5x^5+5) + C$$

a.1 Đặt $u = \ln(x^2+1)$, $dv = \frac{1}{2x^2}dx$

$\Rightarrow du = \frac{2x}{x^2+1}dx$, $v = \int \frac{1}{2x^2}dx = -\frac{1}{2x}$

$$\int \frac{\ln(x^2+1)}{2x^2}dx = -\frac{\ln(x^2+1)}{2x} + \int \frac{1}{2x}\left(\frac{2x}{x^2+1}dx\right)$$

$$= -\frac{\ln(x^2+1)}{2x} + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{\ln(x^2+1)}{2x} + \arctan x + C$$

---

a.2 Đặt $u = x^3+1$, $dv = x^2 e^{x^3}dx$

$\Rightarrow du = 3x^2dx$, $v = \int x^2 e^{x^3}dx$

$$= \frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3) = \frac{1}{3}e^{x^3}$$

$$\int (x^3+1)x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}e^{x^3}(x^3+1) - \frac{1}{3}\int e^{x^3}\cdot \underbrace{3x^2dx}_{=d(x^3)}$$

$$= \frac{1}{3}e^{x^3}(x^3+1) - \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

3. $\int \sin^3(2\pi x)\,dx$

$$= \int \sin^2(2\pi x)\,\sin(2\pi x)\,dx$$

$$= \int \sin^2(2\pi x)\,\frac{d(\cos(2\pi x))}{-2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int \left(1-\cos^2(2\pi x)\right) d(\cos(2\pi x))$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi x) - \frac{\cos^3(2\pi x)}{3}\right] + C$$

---

4. $\cos(x)\cos(2x)\cos(3x)$

$$= \frac{\cos(x)}{2}\left[\cos(5x) + \cos(-x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos(x)\cos(5x) + \cos(x)\cos(-x)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\cos(6x) + \cos(-4x) + \cancel{\cos 0}^{\,1} + \cos(2x)\right]$$

$$\int \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\cos(6x) + \cos(-4x) + \cos(2x) + 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(6x)}{6} - \frac{\sin(-4x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{2} + x\right) + C$$

5. ให้ $x-2 = 3\sin\theta \Rightarrow x = 3\sin\theta + 2$

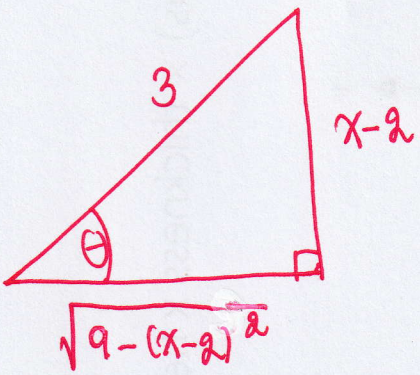
$\Rightarrow dx = 3\cos\theta\, d\theta$

$$\sqrt{9-(x-2)^2} = \sqrt{9-9\sin^2\theta} = 3\cos\theta$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-(x-2)^2}}\, dx = \int \left(\frac{3\sin\theta+2}{3\cos\theta}\right) 3\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int (3\sin\theta + 2)\, d\theta$$

$$= -3\cos\theta + 2\theta + C$$



$$= -3\left(\frac{\sqrt{9-(x-2)^2}}{3}\right) + 2\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$$

$$= -\sqrt{9-(x-2)^2} + 2\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$$

6. $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x(x^2+1)(x^2-4)} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x(x^2+1)(x-2)(x+2)}$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

---

7. $\dfrac{x^3-2x-2}{x^2(x^2+2x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2x+2}$

$$= \frac{Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+2x+2)}$$

$$\Rightarrow x^3-2x-2 = Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2$$

$$= (A+C)x^3 + (2A+B+D)x^2 + (2A+2B)x + 2B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=1 \\ 2A+B+D=0 \\ 2A+2B=-2 \\ 2B=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=0 \\ B=-1 \\ C=1 \\ D=1 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{x^3-2x-2}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{-1}{x^2}+\frac{x+1}{x^2+2x+2}$$

$$\int \frac{x^3-2x-2}{x^2(x^2+2x+2)}\,dx = -\int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$$

เลือก $u = x^2+2x+2$

$$du = (2x+2)\,dx = 2(x+1)\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

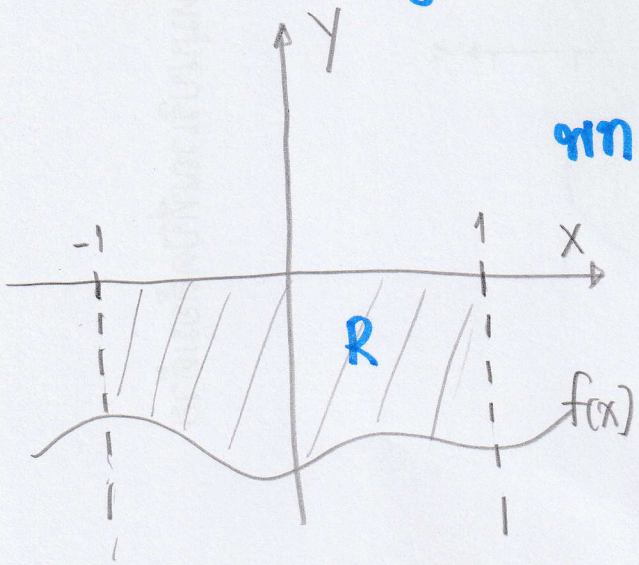
$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| + C$$

---

8. $f(x) \le 0$ บนช่วง $[-1,1]$ (กราฟอยู่ใต้แกน X)

x^3-3x+1 เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = x^3-3x+1$$

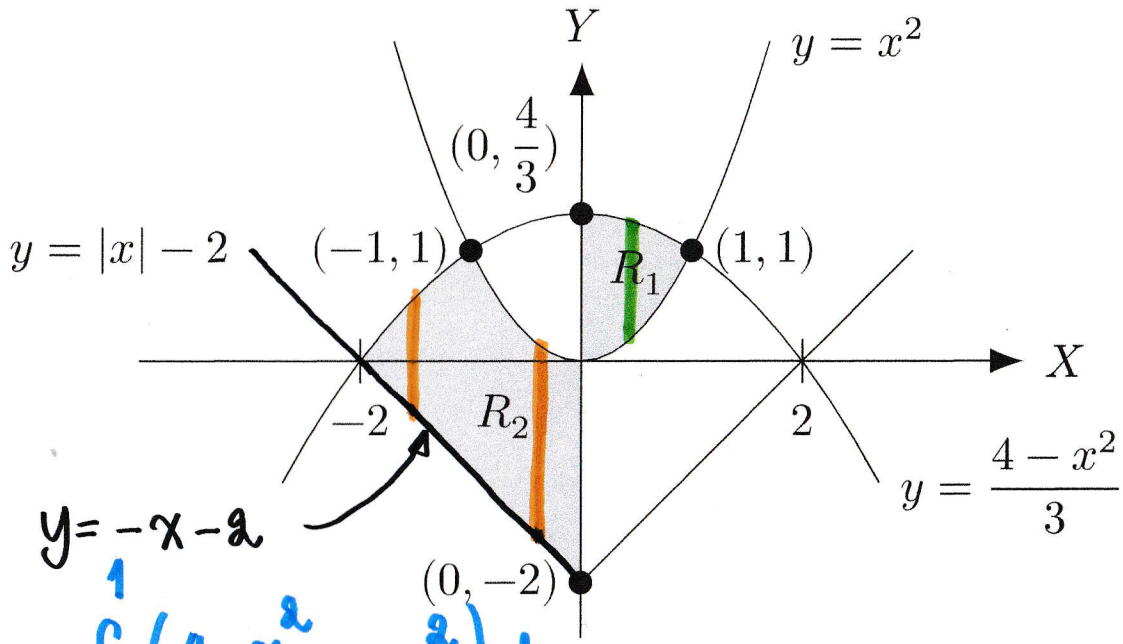


$$\text{พท. } R = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$= -\left[x^3-3x+1\right]\Big|_{x=-1}^{x=1}$$

$$= -\left[(-1)-3\right] = 4$$

9. ให้ R_1 และ R_2 เป็นบริเวณที่กำหนดให้ดังรูป



9.1 พท. $R_1 = \int_0^1 \left(\frac{4-x^2}{3} - x^2\right) dx$

9.1. จงเขียนพื้นที่ของบริเวณ R_1 ในรูปของอินทิกรัล **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

. . . . . .

9.2. จงเขียนพื้นที่ของบริเวณ R_2 ในรูปของอินทิกรัล **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

9.2 พท. $R_2 = \int_{-2}^{-1} \left[\frac{4-x^2}{3} - (-x-2)\right] dx + \int_{-1}^{0} \left[x^2 - (-x-2)\right] dx$

10. ไคทย์ถามหาระยะทางที่มดเดินได้

= ความยาวส่วนโค้ง $y=\sqrt{4x-x^2}$ ตั้งแต่

$x=0$ ถึง $x=2$

จาก $y=\sqrt{4x-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}$

$\therefore 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(2-x)^2}{4x-x^2}$

$= \frac{(4x-x^2)+(4-4x+x^2)}{4x-x^2} = \frac{4}{4x-x^2}$

$L = \int_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

$= \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4x-x^2}}\, dx = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)\Big|_{x=0}^{x=2}$

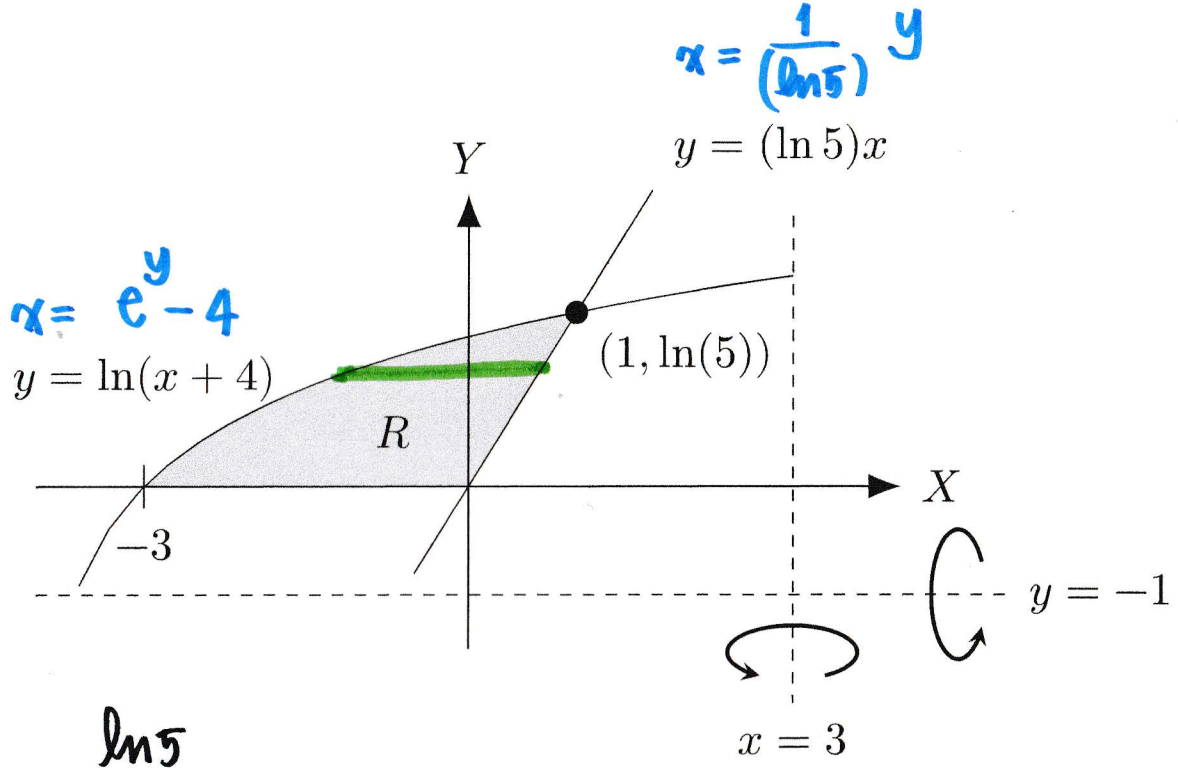
$= 2\arcsin(0) - 2\arcsin(-1)$

$= 0 - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

* $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

11.1 (รอบ $y=-1$): $V = 2\pi \int_0^{\ln 5} (y+1)\left[\frac{1}{(\ln 5)}y - (e^y - 4)\right] dy$

11. ให้ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \ln(x+4)$ เส้นตรง $y = (\ln 5)x$ และ แกน X (ดังรูป) จงหาปริมาตร V ของทรงตันที่เกิดจากการหมุน R รอบเส้นตรงที่กำหนด โดยเขียนคำตอบในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต



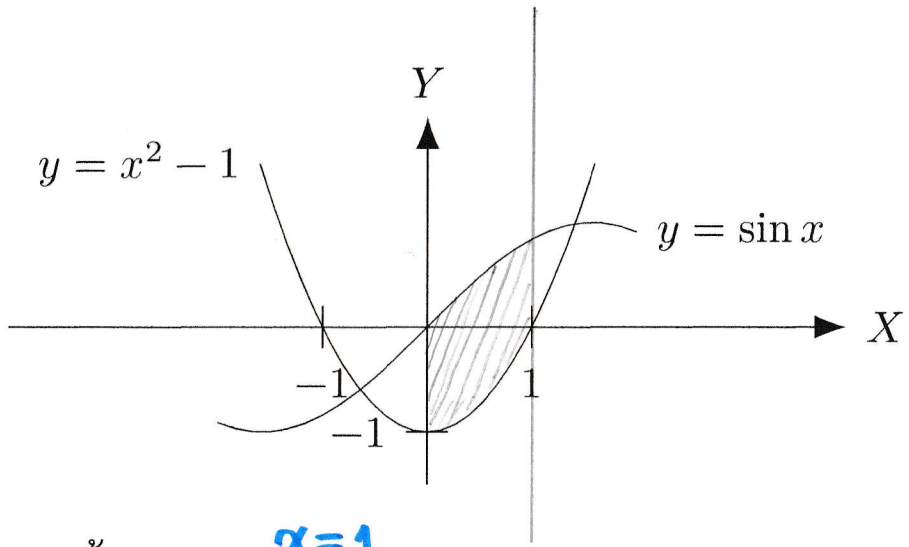
11.2 (รอบ $x=3$): $V = \pi \int_0^{\ln 5} \left[\left(3-(e^y-4)\right)^2 - \left(3 - \frac{1}{(\ln 5)}y\right)^2\right] dy$

12. กำหนดให้

$$V = \int_0^1 2\pi(1-x)\left(\sin x - (x^2-1)\right)dx$$

เป็นปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ R

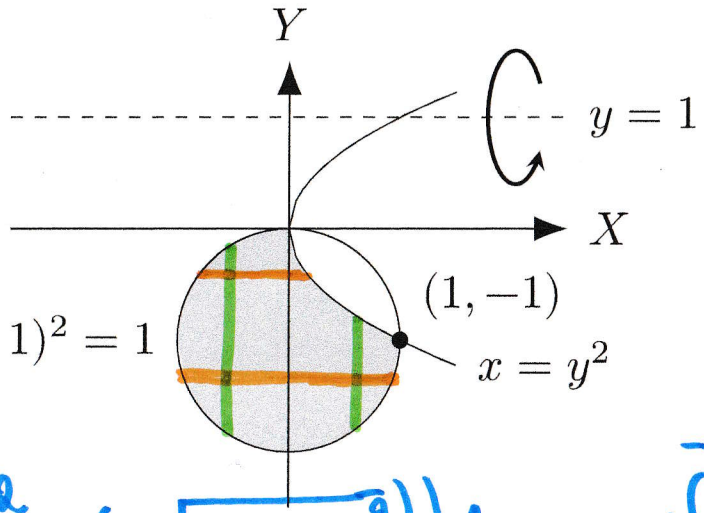
12.1. จงแรเงาพื้นที่ R



12.2. การหมุนครั้งนี้ หมุนรอบเส้นตรง $x=1$ .....

13. จงหาปริมาตร V ของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงาดังรูป หมุนรอบเส้นตรง $y = 1$ โดยเขียนคำตอบในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

* วิธี Disk ดูสีเขียว
วิธี Shell ดูสีส้ม



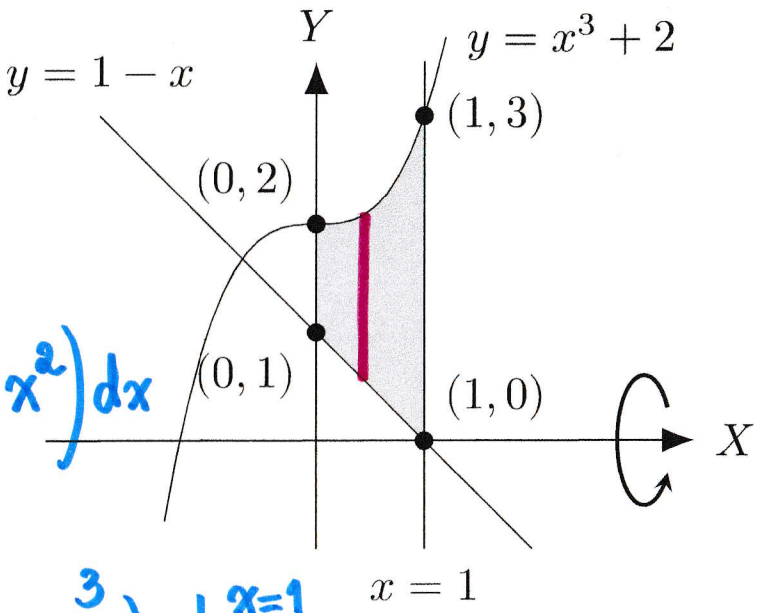
Shell $\longrightarrow$ $2\pi \int_{-1}^{0} (0-y)\left(y^2 - \left(-\sqrt{1-(y+1)^2}\right)\right) dy + 2\pi \int_{-2}^{-1} (0-y)\left(2\sqrt{1-(y+1)^2}\right) dy$

$V =$

Disk $\longrightarrow$ $\pi \int_{-1}^{0} \left(\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2\right) dx + \pi \int_{0}^{1} \left(\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(-\sqrt{x}\right)^2\right) dx$

อิอีที่เหมาะสม คือ วิธี Disk (Washer)

14. **จงหาปริมาตรของทรงตัน**ที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ปิดล้อมด้วย~~สมการวงกลม~~ เส้นตรง $y = x^3 + 2$ เส้นตรง $y = 1 - x$ เส้นตรง $x = 1$ และ แกน Y (ดังรูป) รอบแกน X **โดยคำนวณให้เสร็จสมบูรณ์**



$$V = \pi \int_0^1 \left((x^3+2)^2 - (1-x)^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(x^6 + 4x^3 + 4 - 1 + 2x - x^2 \right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^7}{7} + x^4 + 3x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \pi \left(\frac{1}{7} + 1 + 3 + 1 - \frac{1}{3} \right) - \pi \cdot 0 = \frac{101}{21}\pi$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{0.5}{2}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right]$$

$$\approx \frac{0.5}{2}\left[1 + 2(1.28) + 2.72\right]$$

$$= 1.57$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{0.25}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right]$$

$$= \frac{0.25}{3}\left[1 + 4(1.06) + 2(1.28) + 4(1.75) + 2.72\right]$$

$$= 1.46$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)\sin x}\,dx$$

$$= \lim_{A \to 0^-} \int_{-1}^{A} \frac{1}{(x^2+1)\sin x}\,dx + \lim_{B \to 0^+} \int_{B}^{1} \frac{1}{(x^2+1)\sin x}\,dx$$

16.2 $$\int_1^3 \frac{e^x}{(x^2-9)(x-1)}\,dx$$

$$= \lim_{A\to 1^+} \int_A^2 \frac{e^x}{(x^2-9)(x-1)}\,dx + \lim_{B\to 3^-} \int_2^B \frac{e^x}{(x^2-9)(x-1)}\,dx$$

16.3 $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^4}}{e^{x^2}+1}\,dx$$

$$= \lim_{A\to -\infty} \int_A^0 \frac{e^{-x^4}}{e^{x^2}+1}\,dx + \lim_{B\to \infty} \int_0^B \frac{e^{-x^4}}{e^{x^2}+1}\,dx$$

---

17. $$\int_0^1 \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}\,dx = \lim_{A\to 1^-} \int_0^A \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}\,dx$$

$$= \lim_{A\to 1^-} -\int_0^A \frac{d(1-x^3)}{(1-x^3)^2}$$

$$= \lim_{A\to 1^-} \left.\frac{1}{1-x^3}\right|_{x=0}^{x=A}$$

$$= \lim_{A\to 1^-} \left(\frac{1}{1-A^3} + 1\right) = +\infty$$