แบบฝึกหัด ชุดที่ 1 (Final)

1.1 ให้ $u = \sqrt[x]{3} = 3^{1/x}$

$$\Rightarrow du = 3^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln 3 \, dx$$

$$\int \left(\frac{\sqrt[x]{3}}{x^2} + \sqrt[3]{x} \right) dx$$

$$= \int \frac{\cancel{3^{1/x}}}{\cancel{x^2}} \left(\frac{-\cancel{x^2}\, du}{\cancel{3^{1/x}} \ln 3} \right) + \int x^{1/3} dx$$

$$= -\frac{1}{\ln 3} u + \frac{3x^{4/3}}{4} + C$$

$$= -\frac{1}{\ln 3} \sqrt[x]{3} + \frac{3}{4} x^{4/3} + C$$

1.2 ให้ $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \sec(\sqrt{x}) \tan(\sqrt{x}) + \frac{1}{4+x^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{2}{\sqrt{x}} \sec u \tan u \, (2\sqrt{x}\, du) + \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \, dx$$

$$= 4 \int \sec u \tan u \, du + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \, d\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 4 \sec u + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= 4 \sec(\sqrt{x}) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

1.3 $$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-12x+9}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^2}} \, dx$$

$$= \int \frac{1}{2x-3} \, dx$$

ให้ $u = 2x-3$

$du = 2\,dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C$$

1.4 ให้ $u = 1+4x \Rightarrow du = 4dx$

$$x = \frac{u-1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{u^2-2u+1}{16}$$

$$\int \frac{64x^2}{\sqrt{1+4x}}\,dx = \int \frac{u^2-2u+1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \int \left(u^{3/2} - 2u^{1/2} + u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{2u^{5/2}}{5} - 2 \cdot \frac{2u^{3/2}}{3} + 2u^{1/2} + C$$

$$= \frac{2}{5}(1+4x)^{5/2} - \frac{4}{3}(1+4x)^{3/2} + 2(1+4x)^{1/2} + C$$

1.5 ให้ $u = \arcsin(e^x)$

$$\Rightarrow du = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \arcsin(e^x)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{(\arcsin(e^x))^2}{2} + C$$

2. เลือก $u = x^2$, $dv = xe^{x^2}dx$

3. ให้ $u = \arctan x$, $dv = (3x^2+1)\,dx$

$\Rightarrow du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$, $v = x^3 + x = x(x^2+1)$

$$\therefore \int (3x^2+1)\arctan x\,dx$$

$$= x(x^2+1)\arctan x - \int x\cancel{(x^2+1)}\left(\frac{1}{\cancel{1+x^2}}dx\right)$$

$$= x(x^2+1)\arctan x - \frac{x^2}{2} + C$$

---

4. $\displaystyle\int \sin(\pi x)\cos(2\pi x)\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin(\pi x - 2\pi x) + \sin(\pi x + 2\pi x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin(-\pi x) + \sin(3\pi x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(-\pi x)}{-\pi} - \frac{\cos(3\pi x)}{3\pi}\right] + C$$

5. $\displaystyle\int \frac{\cos^3\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}}\,dx$

$$= \int \frac{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}{\sqrt{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}} \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

$$= 3\int \frac{\left(1 - \sin^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)}{\sqrt{\sin\left(\frac{x}{3}\right)}}\, d\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$

$$= 3\int \left[\sin^{-1/2}\left(\frac{x}{3}\right) - \sin^{3/2}\left(\frac{x}{3}\right)\right] d\left(\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)$$

$$= 3\left[2\sin^{1/2}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{2}{5}\sin^{5/2}\left(\frac{x}{3}\right)\right] + C$$

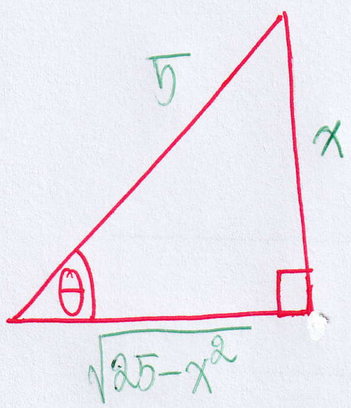
6. $x = 5\sin\theta \Rightarrow dx = 5\cos\theta\, d\theta$

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25\sin^2\theta} = 5\cos\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^4}\,dx = \int \frac{5\cos\theta}{5^4\sin^4\theta}(5\cos\theta\, d\theta)$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{25}\int \cot^2\theta \csc^2\theta\, d\theta$$



$$= -\frac{1}{25}\int \cot^2\theta\, d(\cot\theta)$$

$$= -\frac{1}{25}\cdot\frac{\cot^3\theta}{3} + C$$

$$= -\frac{1}{75}\frac{(25-x^2)^{3/2}}{x^3} + C$$

7. $$\frac{3x+4}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

---

8. $$\frac{3-5x-x^2}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$\Rightarrow 3-5x-x^2 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$$

ให้ $x=1$: $-3 = 3B \Rightarrow B = -1$

$x=-2$: $9 = 9C \Rightarrow C = 1$

$x=0$: $3 = -2A + 2B + C = -2A - 2 + 1$

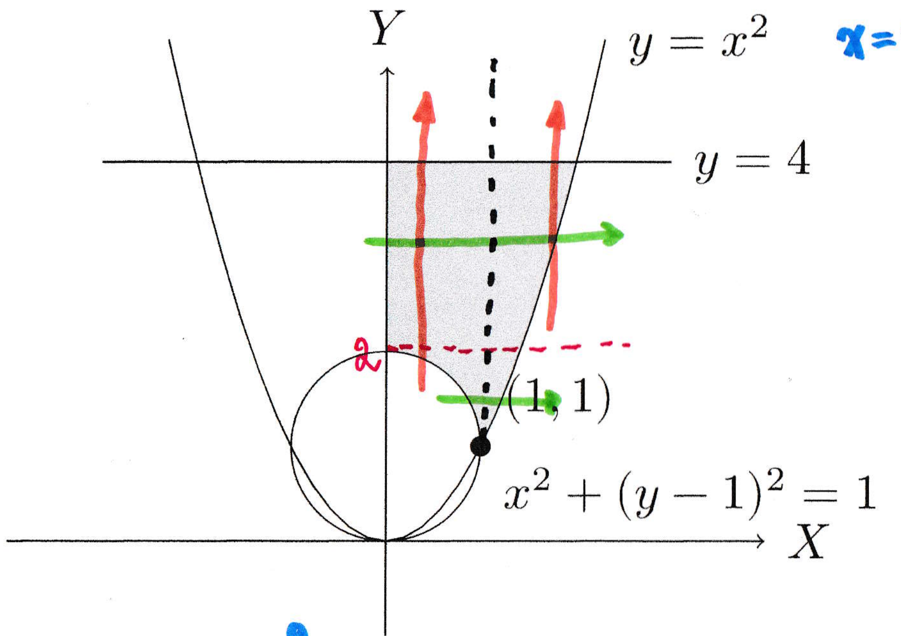
$A = -2$

$$\therefore \frac{3x+4}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{-2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{3x+4}{(x-1)^2(x+2)}\,dx = -2\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x+2| + C$$

9. จงเขียนพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาดังรูป ในรูปของอินทิเกรตจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



$x = \sqrt{y}$

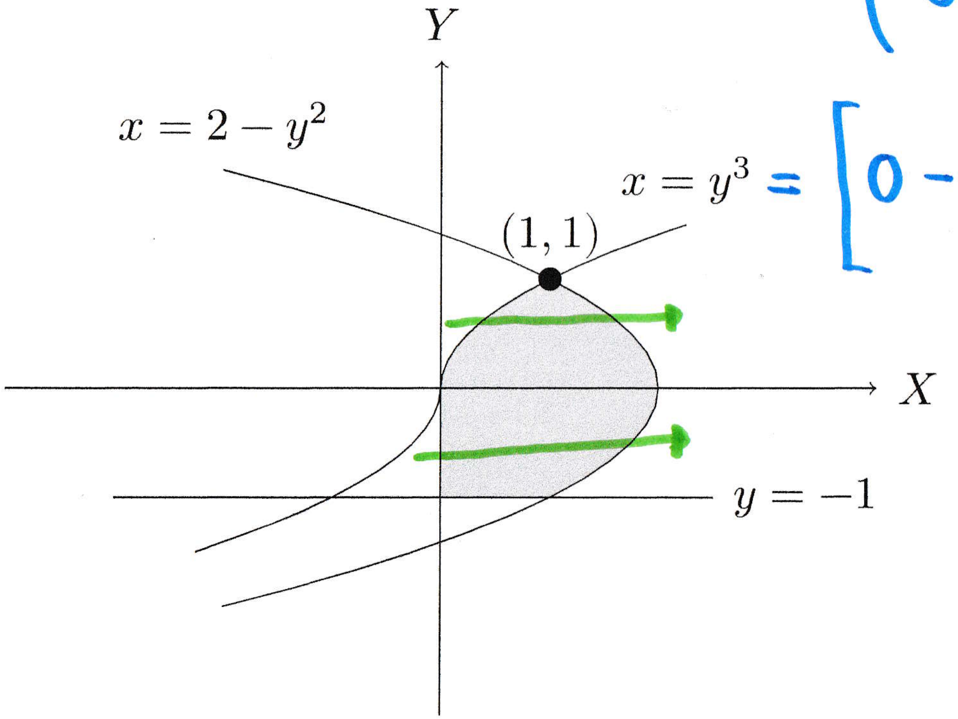
$y - 1 = \pm\sqrt{1 - x^2}$

$x = \pm\sqrt{1-(y-1)^2}$

$$\text{พื้นที่} = \int_1^2 \left(\sqrt{y} - \sqrt{1-(y-1)^2}\right) dy + \int_2^4 \left(\sqrt{y} - 0\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(4 - \left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)\right) dx + \int_1^2 (4 - x^2)\, dx$$

10. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาดังรูป



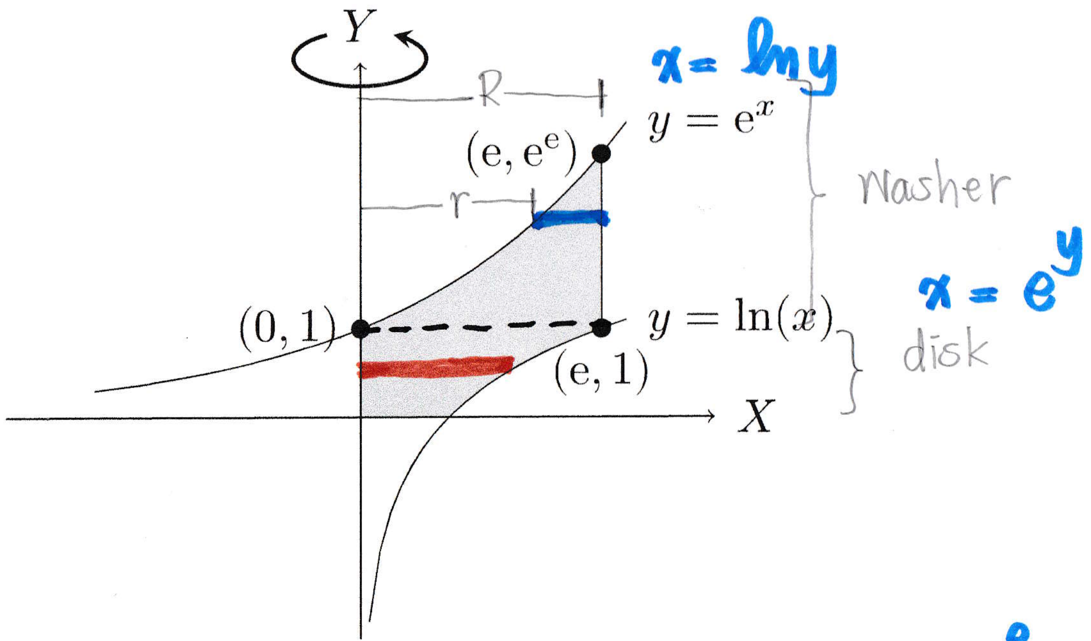
$$\text{พท.} = \int_{-1}^{0} (2 - y^2)\,dy + \int_{0}^{1} (2 - y^2 - y^3)\,dy$$

$$= \left(2y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-1}^{y=0} + \left(2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}$$

$$= \left[0 - \left(-2 + \frac{1}{3}\right)\right] + \left[\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0\right]$$

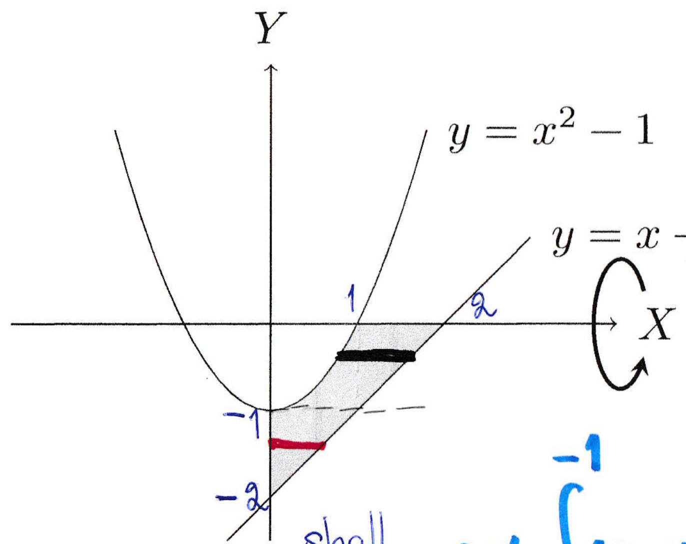
$$= \frac{37}{12}$$

11. จงหาปริมาตร (V) ของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงา **โดยวิธี Disk** รอบแกน Y โดยเขียนคำตอบในรูปของอินทิกรับจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



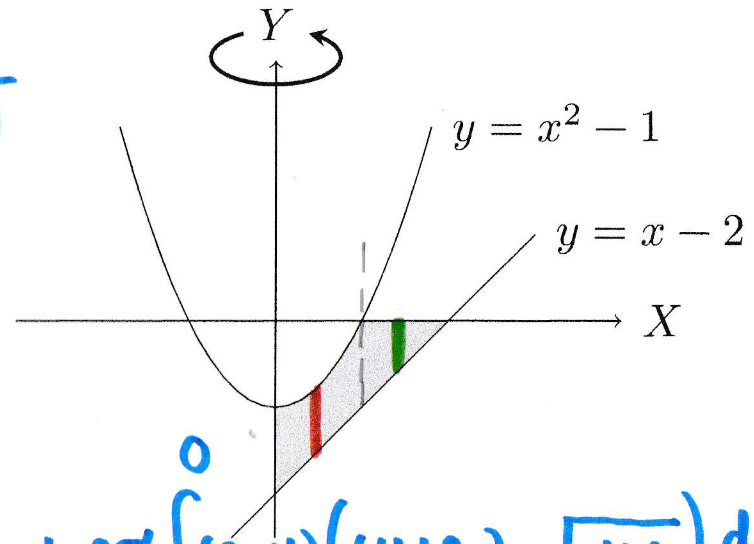
ปริมาตร V = $\pi \int_0^1 (e^y)^2 \, dy + \pi \int_1^{e^e} \left(e^2 - (\ln y)^2\right) dy$

12. กำหนด R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 1,\ y = x - 2$ แกน X และ แกน Y ดังรูป จงหาปริมาตร (V) ของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงารอบแกนที่กำหนดให้ ในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



$x = \pm\sqrt{y+1}$

$x = y+2$



12.1. รอบแกน X
ปริมาตร V =

Shell: $2\pi\int_{-2}^{-1}(0-y)(y+2)\,dy + 2\pi\int_{-1}^{0}(0-y)\left((y+2)-\sqrt{y+1}\right)dy$

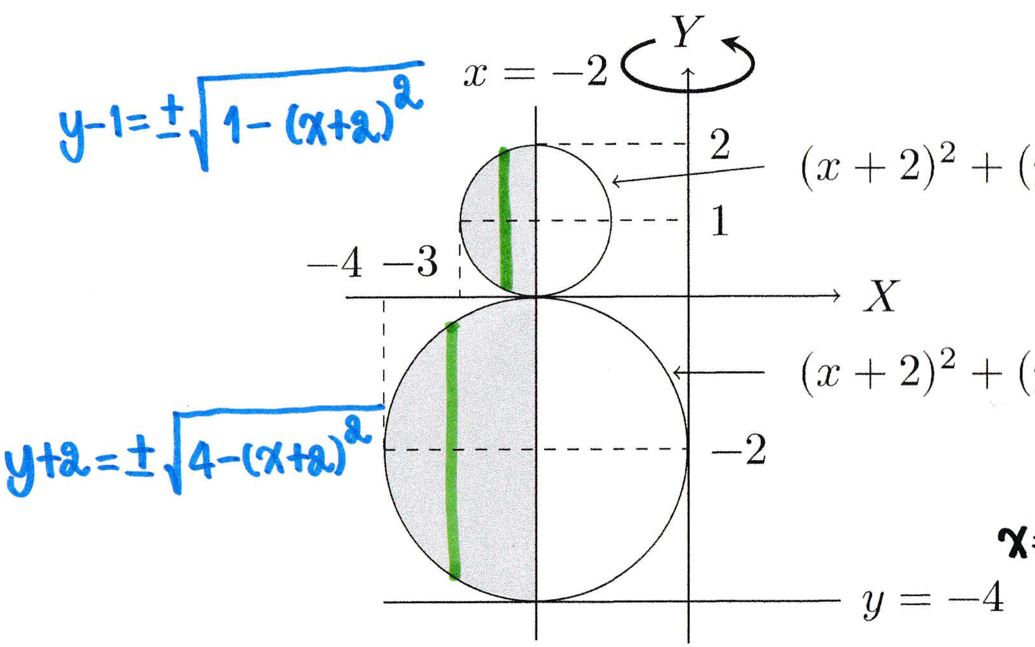
Disk: $\pi\int^{1}\left((0-(x-2))^2-(0-(x^2-1))^2\right)dx + \pi\int^{2}(0-(x-2))^2\,dx$

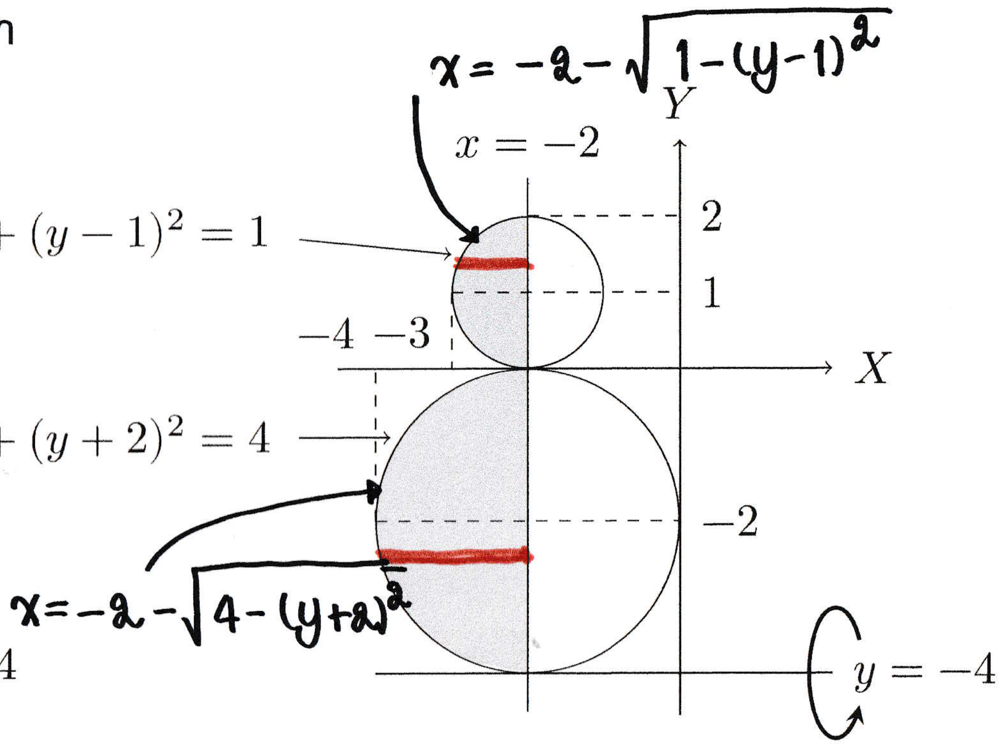
12.2. รอบแกน Y
ปริมาตร V =

Shell: $2\pi\int_{0}^{1}x\left((x^2-1)-(x-2)\right)dx + 2\pi\int_{1}^{2}x(0-(x-2))\,dx$

Disk: $\pi\int_{-2}^{-1}(y+2)^2\,dy + \pi\int_{-1}^{0}\left((y+2)^2-(\sqrt{y+1})^2\right)dy$

13. จงหาปริมาตร (V) ของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงาดังรูป **โดยวิธี Shell** ในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**





13.1. รอบแกน Y

ปริมาตร V = $2\pi\int_{-4}^{0}(0-x)\left(2\sqrt{4-(x+2)^2}\right)dx + 2\pi\int_{-2}^{0}(0-x)\left(2\sqrt{1-(x+2)^2}\right)dx$

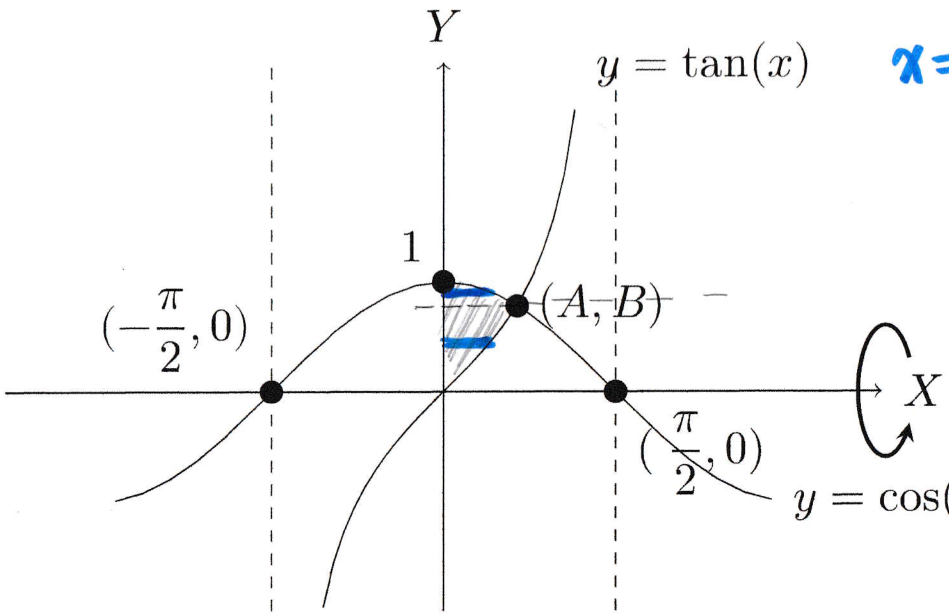
13.2. รอบเส้นตรง $y=-4$

ปริมาตร V = $2\pi\int_{-4}^{0}(y+4)\left(-2-\left(-2-\sqrt{4-(y+2)^2}\right)\right)dy + 2\pi\int_{0}^{2}(y+4)\left(-2-\left(-2-\sqrt{1-(y-1)^2}\right)\right)dy$

14. กำหนดปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน X **โดยวิธี Disk** เป็น

$$V = \pi \int_0^A \left(\cos^2 x - \tan^2 x \right) \mathrm{d}x$$

14.1. จงแรเงาบริเวณ R ที่สอดคล้องกับปริมาตร V



$x = \arctan y$

$x = \arccos y$

14.2. จงเขียนปริมาตร V ที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R ในข้อ 14.1 รอบแกน X **โดยวิธี Shell** ในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

ปริมาตร V = $2\pi \int_0^B y(\arctan y)\,dy + 2\pi \int_B^1 y(\arccos y)\,dy$

15.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(y^2+2)^{1/2}(2y)$$

$$= y\sqrt{y^2+2}$$

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + y^2(y^2+2)$$

$$= y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2+1)^2$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_0^2 (y^2+1)\, dy$$

$$= \left(\frac{y^3}{3} + y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2}$$

$$= \frac{8}{3} + 2 - 0 = \frac{14}{3}$$

16.1
$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{0.5}{2}\Big[f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) + 2f(1.5) + f(2)\Big]$$

$$= \frac{0.5}{2}\left[f(0) + 2f\left(\frac{3}{6}\right) + 2f(1) + 2f\left(\frac{9}{6}\right) + f(2)\right]$$

$$= \frac{0.5}{2}\Big[1.5 + 2(-0.1) + 2(0.2) + 2(1.45) + (-0.3)\Big]$$

$$= \frac{0.5}{2}(3.3) = 0.825$$

16.2
$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{1/3}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{3}\right) + 2f\left(\frac{2}{3}\right) + 4f(1) + 2f\left(\frac{4}{3}\right) + 4f\left(\frac{5}{3}\right) + f(2)\right]$$

$$= \frac{1}{9}\Big[1.5 + 4(0.6) + 2(-0.5) + 4(0.2) + 2(1.4) + 4(1.0) + (-0.3)\Big]$$

$$= \frac{10.2}{9} = 1.133$$

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2e^{-2x}}{e^{-2x}-1}\,dx$

$u = e^{-2x} - 1$

$du = -2e^{-2x}dx$

$$= \lim_{A \to 0^+} \int_A^1 \frac{-2e^{-2x}}{e^{-2x}-1}\,dx$$

$$= \lim_{A \to 0^+} \ln\left|e^{-2x}-1\right| \Big|_{x=A}^{x=1}$$

$$= \lim_{A \to 0^+} \left(\ln\left|e^{-2}-1\right| - \ln\left|e^{-2A}-1\right| \right)$$

$$= \ln\left|\frac{1}{e^2}-1\right| \quad \text{converges}$$

18.1 $\displaystyle\int_{-3}^{\infty} \frac{1}{(e^x+1)(x+2)}\,dx$

$$= \lim_{A \to -2^-} \int_{-3}^{A} \frac{dx}{(e^x+1)(x+2)} + \lim_{B \to -2^+} \int_B^0 \frac{dx}{(e^x+1)(x+2)} + \lim_{C \to \infty} \int_0^C \frac{dx}{(e^x+1)(x+2)}$$

18.2 $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$

$$= \lim_{A \to -1^+} \int_A^0 \frac{x}{(x^2-1)(x+2)}dx + \lim_{B \to 1^-} \int_0^B \frac{x}{(x^2-1)(x+2)}dx + \lim_{C \to 1^+} \int_C^2 \frac{x}{(x^2-1)(x+2)}dx$$