⇒ แบบฝึกหัดชุด 2 :

15. กำหนดค่า x และ $f(x) = e^{x^2}$ ดังตาราง

x_0 x_1 x_2

x	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1
$f(x)$	1	1.02	1.06	1.15	1.28	1.48	1.75	2.15	2.72

$y_0\ y_0 \quad y_1 \quad y_1\ y_2 \quad y_3 \quad y_2\ y_4$

จงหาค่าโดยประมาณของ

15.1. $\int_0^1 f(x)dx$ เมื่อ $n = 2$ **โดยใช้การประมาณค่าเชิงสี่เหลี่ยมคางหมู** $\quad h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$

15.2. $\int_0^1 f(x)dx$ เมื่อ $n = 4$ **โดยใช้กฎของซิมป์สัน** $\Rightarrow h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

15.1) $$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + y_2\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\left[1 + 2\cdot(1.28) + 2.72\right] = \dots \boxed{}$$

15.2) $$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{3}\left[1 + 4(1.06) + 2(1.28) + 4(1.75) + 2.72\right]$$

$$= \dots \boxed{}$$

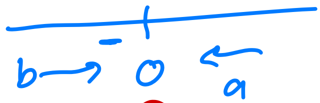
16. จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ในรูปแบบลิมิตของอินทิกรัล **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

16.1. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)\sin(x)}\, dx \quad \Rightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

16.2. $\int_{1}^{3} \frac{e^x}{(x^2-9)(x-1)}\, dx \quad \Rightarrow$ จุดที่ $x = 3, 1$

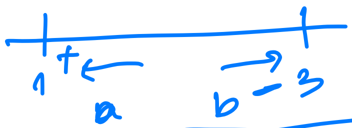
16.3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^4}}{e^{x^2}+1}\, dx \quad \Rightarrow$ ขอบเขต $\pm\infty$

16.1: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)\sinh(x)}\,dx = \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} \frac{1}{(x^2+1)\sinh(x)}\,dx$



$\displaystyle + \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{1} \frac{1}{(x^2+1)\sinh(x)}\,dx$ ∎

16.2: $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{e^x}{(x^2-9)(x-1)}\,dx = \lim_{a\to 1^+} \int_{a}^{2} \frac{e^x}{(x^2-9)(x-1)}\,dx$



$\displaystyle + \lim_{b\to 3^-} \int_{2}^{b} \frac{e^x}{(x^2-9)(x-1)}\,dx$ ∎

16.3: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^4}}{e^{x^2}+1}\,dx = \lim_{a\to -\infty} \int_{a}^{0} \frac{e^{-x^4}}{e^{x^2}+1}\,dx$

$\displaystyle + \lim_{b\to +\infty} \int_{0}^{b} \frac{e^{-x^4}}{e^{x^2}+1}\,dx$ ∎

---

17. จงแสดงว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}\,\mathrm{d}x$ หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้ ให้หาค่าอินทิกรัล

เขียนในรูป lim: $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}\,dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}\,dx$

พิจารณา. $\displaystyle\int \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}\,dx = \int \frac{\cancel{3x^2}}{u^2}\,\frac{du}{-\cancel{3x^2}}$

$u = 1-x^3$

$du = -3x^2\,dx$

$dx = \dfrac{du}{-3x^2}$

$= \dfrac{1}{u} + C = \dfrac{1}{1+x^3} + C$

ดังนั้น. $\displaystyle\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}\,dx = \lim_{b\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=b}$

$\displaystyle = \lim_{b\to 1^-}\left[\underbrace{\left(\frac{1}{1-b^3}\right)}_{\to \frac{1}{+0} \to +\infty} - 1\right]$

$= +\infty$ $\boxtimes$

แบบฝึกหัด ชุด 1 :

18. จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ ในรูปลิมิตของอินทิกรัล **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

18.1. $\displaystyle\int_{-3}^{\infty} \frac{1}{(e^x+1)(x+2)}\,dx =$ ____________________

$(x=-2)$

18.2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{(x^2-1)(x+2)}\,dx =$ ____________________

$(x=\pm 1, \cancel{-2})$

18.1)

$$\int_{-3}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(e^x+1)(x+2)}}_{=f_1(x)} dx = \int_{-3}^{-2} f_1(x)\,dx + \int_{-2}^{0} f_1(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f_1(x)\,dx$$

$$= \lim_{a \to -2^-} \int_{-3}^{a} f_1(x)\,dx + \lim_{b \to -2^+} \int_{b}^{0} f_1(x)\,dx + \lim_{c \to +\infty} \int_{0}^{c} f_1(x)\,dx$$

■

18.2

$$\int_{-1}^{2} \underbrace{\frac{x}{(x^2-1)(x+2)}}_{=f_2(x)} dx$$

$(x = \pm 1)$

$$= \int_{-1}^{0} f_2(x)\,dx + \int_{0}^{1} f_2(x)\,dx + \int_{1}^{2} f_2(x)\,dx$$

$$= \lim_{a \to -1^+} \int_{a}^{0} f_2(x)\,dx + \lim_{b \to 1^-} \int_{0}^{b} f_2(x)\,dx + \lim_{c \to 1^+} \int_{c}^{2} f_2(x)\,dx$$

■

---

17. จงแสดงว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2e^{-2x}}{\underbrace{e^{-2x}-1}_{\to\, = 0 \iff x = 0.}}\,dx$ คอนเวอร์จหรือไดเวอร์จ ถ้าคอนเวอร์จให้หาค่าอินทิกรัล

เขียนในรูป lim : $\displaystyle \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{-2e^{-2x}}{e^{-2x}-1}\,dx$

พิจารณา $\displaystyle \int \frac{-2e^{-2x}}{(e^{-2x}-1)}\,dx = \int \frac{\cancel{(-2e^{-2x})}}{u}\,\frac{du}{\cancel{(-2e^{-2x})}}$

$(e^{-2x}-1) = u$

$u = e^{-2x}-1$

$du = (-2)e^{-2x}\,dx$

$dx = \dfrac{du}{-2e^{-2x}}$

$= \ln|u| + C = \ln|e^{-2x}-1| + C$

ดังนั้น $\displaystyle \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{-2e^{-2x}}{e^{-2x}-1}\,dx = \lim_{a\to 0^+}\left(\ln|e^{-2x}-1|\right)\Big|_{x=a}^{x=1}$

$\displaystyle = \lim_{a\to 0^+}\left[\ln|e^{-2(1)}-1| - \ln\underbrace{|e^{-2(a)}-1|}_{\to(-\infty)}\right]$

$= +\infty$

16. กำหนดค่า x และ $f(x) = \cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) + 0.5$ ดังตาราง

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1	7/6	8/6	9/6	10/6	11/6	2
$f(x)$	1.5	1.25	0.6	-0.1	-0.5	-0.4	0.2	0.9	1.4	1.45	1.0	0.3	-0.3

จงหาค่าโดยประมาณของ

16.1. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ เมื่อ $n = 4$ โดยใช้การประมาณค่าเชิงสี่เหลี่ยมคางหมู $h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

16.2. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ เมื่อ $n = 6$ โดยใช้กฎของซิมป์สัน $h = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3}$

16.1: $A \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right]$

$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\left[1.5 + 2(-0.1) + 2(0.2) + 2(1.45) + (-0.3)\right]$

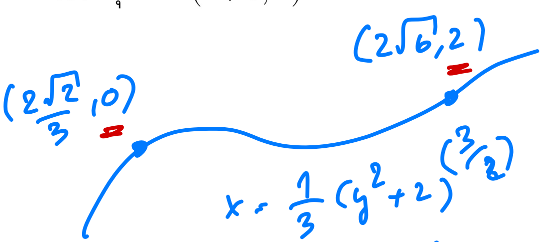
$= \ldots - - \ \boxed{}$

16.2: $A \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6\right]$

$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{3}\left[- - - \ -\right] = \ldots \ \boxed{}$

---

15. จงหาความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้ง $x = \frac{1}{3}(y^2+2)^{(3/2)}$ ตั้งแต่จุด $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right)$ ไปถึงจุด $(2\sqrt{6}, 2)$



$L = \int_{y=0}^{y=2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\right)(y^2+2)^{\frac{1}{2}}(\cancel{2}y)$

$$L = \int_{y=0}^{y=2} \sqrt{1+\left((y^2+2)^{\frac{1}{2}} y\right)^2}\, dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=2} \sqrt{1+(y^2+2)\,y^2}\, dy$$

$$= y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2+1)^2$$

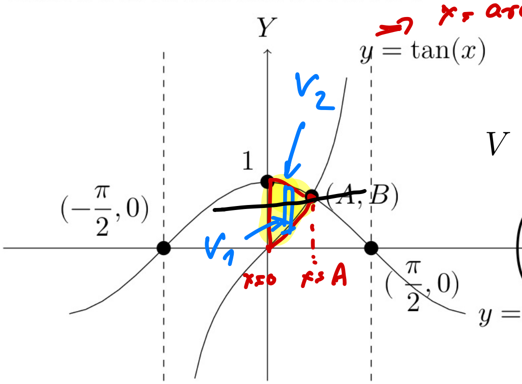
$$= \int_{y=0}^{y=2} \sqrt{(y^2+1)^2}\, dy = \int_{y=0}^{y=2} y^2+1\, dy$$

$$= \left(\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} = \frac{2^3}{3} + 2 = \frac{14}{3}$$

14.1. จงแรเงาบริเวณ R ที่สอดคล้องกับปริมาตร V

$\rightarrow x = \arctan y$

Disk: รอบแกน X



$$V = \pi \int_{x=0}^{x=A} \left(\cos^2 x - \tan^2 x\right) dx$$

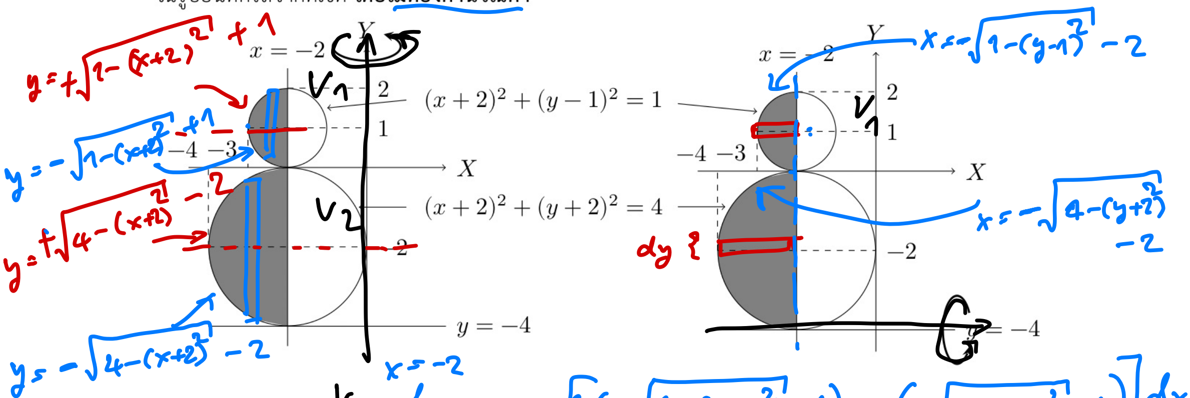
$$R(x)^2 - r(x)^2$$

$\rightarrow x = \arccos(y)$

14.2. จงเขียนปริมาตร V ที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R ในข้อ 14.1 รอบแกน X **โดยวิธี Shell** ในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

ปริมาตร V = $\int_{y=0}^{y=B} 2\pi(y)(\arctan y - 0)\, dy + \int_{y=B}^{y=1} 2\pi(y)(\arccos y - 0)\, dy$

13. จงหาปริมาตร (V) ของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงาดังรูป **โดยวิธี Shell** ในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



13.1. รอบแกน Y

ปริมาตร V =

V_1 $$\int_{x=-3}^{x=-2} 2\pi(-x)\left[\left(+\sqrt{1-(x+2)^2}+1\right)-\left(-\sqrt{1-(x+2)^2}+1\right)\right]dx$$

$$+\int_{x=-4}^{x=-2} 2\pi(-x)\left[\left(+\sqrt{4-(x+2)^2}-2\right)-\left(-\sqrt{4-(x+2)^2}-2\right)\right]dx$$

13.2. รอบเส้นตรง $y=-4$

ปริมาตร V =

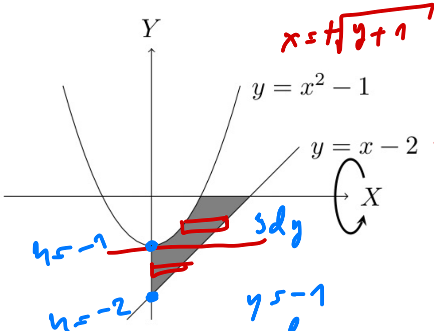
V_1 $$\int_{y=0}^{y=2} 2\pi(x+4)\left[\left(-\sqrt{1-(y-1)^2}-2\right)-(-2)\right]dx$$

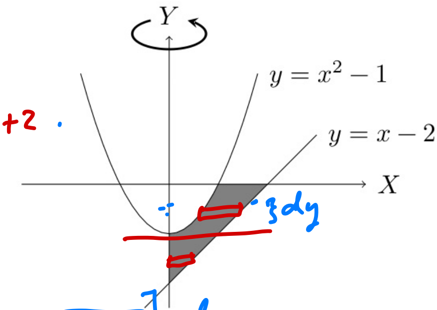
$$+\int_{y=-4}^{y=0} 2\pi(x+4)\left[\left(-\sqrt{4-(y+2)^2}-2\right)-(-2)\right]dx$$

12. กำหนด R เป็นบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 - 1,\ y = x - 2$ แกน X และ แกน Y ดังรูป จงหาปริมาตร (V) ของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงารอบแกนที่กำหนดให้ ในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

$x = \pm\sqrt{y+1}$

$\Rightarrow x = y+2$





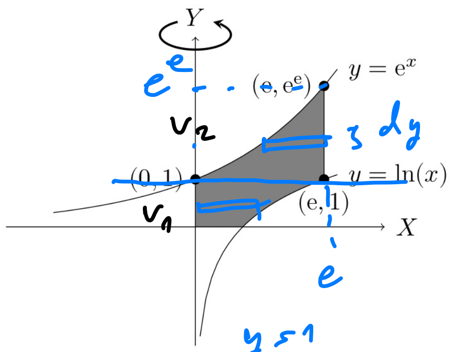
12.1. รอบแกน X

ปริมาตร V = $\displaystyle\int_{y=0}^{y=-1} 2\pi(-y)\left[(y+2) - \sqrt{y+1}\right] dy + \int_{y=-1}^{y=-2} 2\pi(-y)\left[(y+2) - 0\right] dy$

12.2. รอบแกน Y

ปริมาตร V = $\displaystyle\int_{y=0}^{y=-1} \pi\left((y+2)^2 - (+\sqrt{y+1})^2\right) dy + \int_{y=-1}^{y=-2} \pi\left((y+2)^2 - 0^2\right) dy$

11. จงหาปริมาตร (V) ของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงา **โดยวิธี Disk** รอบแกน Y โดยเขียนคำตอบในรูปของอินทิกรับจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

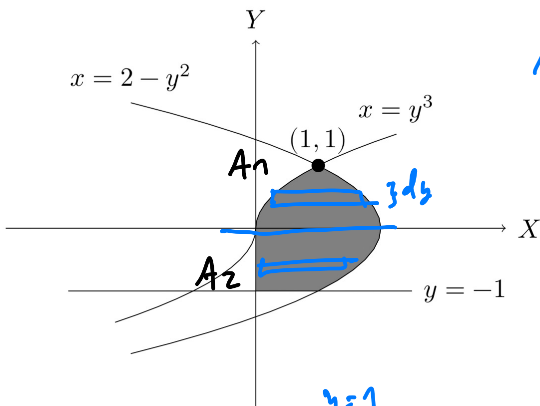


$\to x = \ln y$

$\to x = e^y$

ปริมาตร V = $\underbrace{\int_{y=0}^{y=1} \pi (e^y)^2 \, dy}_{V_1} + \underbrace{\int_{y=1}^{y=e^e} \pi \left(e^2 - (\ln y)^2\right) dy}_{V_2}$

10. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาดังรูป

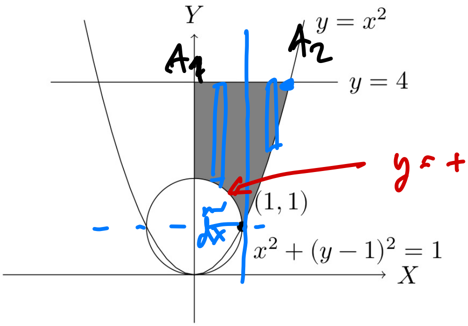


$$A = \underbrace{\int_{y=0}^{y=1} (2-y^2) - y^3 \, dy}_{A_1} + \underbrace{\int_{y=-1}^{y=0} (2-y^2) \, dy}_{A_2}$$

$$= \left(-\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} + 2y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} + \left(2y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=-1}^{y=0}$$

$$= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 2\right) + \left(0 - \left(-2 - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{24-7}{12} + \frac{7}{3}$$

9. จงเขียนพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาดังรูป ในรูปของอินทิเกรตจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



$y = +\sqrt{1-x^2} + 1$

พื้นที่ = $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} 4 - \left(\sqrt{1-x^2} + 1\right) dx$ A_1

$+ \displaystyle\int_{x=1}^{x=2} 4 - x^2 \, dx$ A_2.

รอบ!
RB5103 - RB5104
2 ธ.ค. 62 เวลา 8:00-11:00.