แบบฝึกหัดสำหรับ Final 2562/1 ชุดที่ 2

1. จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

   1.1. $\int \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^2} + \frac{6x}{x^2+1} + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

   1.2. $\int (2x+18)^5 + (2+18x)^{1/5}\,\mathrm{d}x$

   1.3. $\int \mathrm{e}^{\sin x}\cos x - 2^{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$

   1.4. $\int [(1-\tan x)^{9/2} + \cot x]\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

   1.5. $\int \frac{4x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}\,\mathrm{d}x$

   1.6. $\int x^4 \mathrm{cosec}(5x^5+5)\cot(5x^5+5)\,\mathrm{d}x$

2. จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้ **โดยใช้เทคนิค Integration by parts**

   2.1. $\int \frac{\ln(x^2+1)}{2x^2}\,\mathrm{d}x$

   2.2. $\int (x^3+1)x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x$

3. จงหาอินทิกรัล $\int \sin^3(2\pi x)\,\mathrm{d}x$

4. จงหาอินทิกรัล $\int \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$

✔ 5. จงหาอินทิกรัล $\int \frac{x}{\sqrt{9-(x-2)^2}}\,\mathrm{d}x$ **โดยการแทนด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ**

6. จงเขียน $\frac{(x-1)(x-3)}{x(x^2+1)(x^2-4)}$ ให้อยู่ในรูปแบบของผลบวกของเศษส่วนย่อยที่ถูกต้อง **โดยไม่ต้องคำนวณค่าคงตัว**

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x(x^2+1)(x^2-4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2x+A_3}{x^2+1} + \frac{A_4}{x-2} + \frac{A_5}{x+2}$$

7. จงหา $\int \frac{x^3-2x-2}{x^2(x^2+2x+2)}dx$

8. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) \le 0$ บน $[-1,1]$ ถ้าปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f บนช่วงดังกล่าวคือ x^3-3x+1 จงหา**พื้นที่**ระหว่างเส้นโค้ง $y=f(x)$ และแกน x เมื่อ $-1 \le x \le 1$

7. จงหา $\int \frac{x^3-2x-2}{x^2(x^2+2x+2)}dx$

→ check: $x = -2 \pm \sqrt{4-4\cdot 2} < 0$

แยกตัวประกอบไม่ได้

พิจารณา

$$\frac{x^3-2x-2}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3x+A_4}{x^2+2x+2}$$

คูณตลอดด้วย $x^2(x^2+2x+2)$

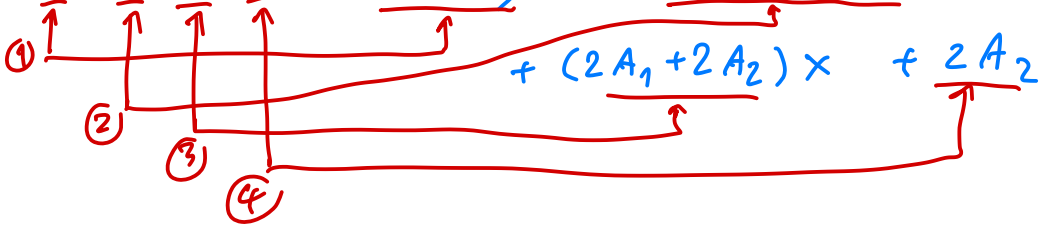
$= x^3+2x^2+2x$

$$x^3-2x-2 = A_1x(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (A_3x+A_4)x^2$$

$A_3x^3 + A_4x^2$

ดังนั้น

$$1x^3+0x^2-2x-2 = (A_1+A_3)x^3 + (2A_1+A_2+A_4)x^2 + (2A_1+2A_2)x + 2A_2$$



สรุประบบสมการ

① $A_1 + A_3 = 1 \Rightarrow A_3 = 1 - A_1 = 1$

② $2A_1 + A_2 + A_4 = 0 \Rightarrow A_4 = -(A_2 + 2A_1) = 1$ ($A_2 = -1$, $2A_1 = 0$)

③ $2A_1 + 2A_2 = -2 \Rightarrow A_1 = -1 - A_2 = -1 - (-1) = 0$

④ $2A_2 = -2 \Rightarrow A_2 = -1$

ดังนั้น $A_1 = 0,\ A_2 = -1,\ A_3 = 1,\ A_4 = 1$

ข้อ 7 $\int \frac{x^3-2x-2}{x^2(x^2+2x+2)}\,dx = \int \frac{0}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

$= -\int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx$

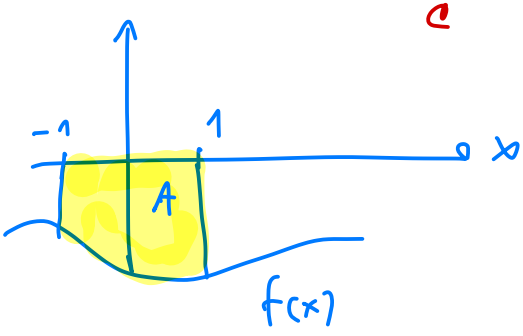
ให้ $u = x^2+2x+2$, $du = 2x+2\,dx$, $dx = \frac{du}{2(x+1)}$

$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + C$ ✓

---

8. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) \le 0$ บน $[-1,1]$ ถ้าปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f บนช่วงดังกล่าวคือ x^3-3x+1 จงหา**พื้นที่**ระหว่างเส้นโค้ง $y=f(x)$ และแกน x เมื่อ $-1 \le x \le 1$

ให้ $F(x) = x^3-3x+1$ ซึ่ง $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$



$A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$= F(x)\Big|_{x=-1}^{x=1}$

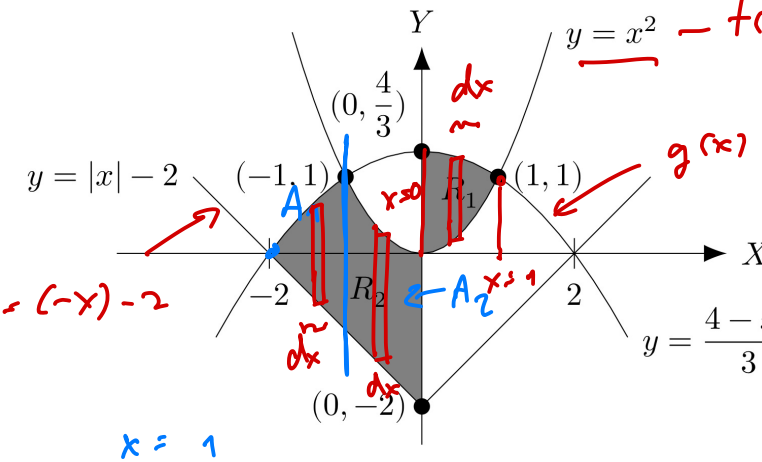
$= (x^3-3x+1)\Big|_{x=-1}^{x=1}$

$= [1^3-3(1)+1] - [(-1)^3-3(-1)+1]$

$= (1-3) - (-1+3) = -2-(+2) = -4$

ดังนั้น พท. $A = +4$ ตร.หน่วย ✓

9.1) ใน R_1 โดยใช้แต่ตัวแปรอย่างเดียว $\Rightarrow R_1 = \int_{x=0}^{x=?} g(x) - f(x)\,dx$



$\Rightarrow R_1 = \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{4-x^2}{3}\right) - x^2\,dx$

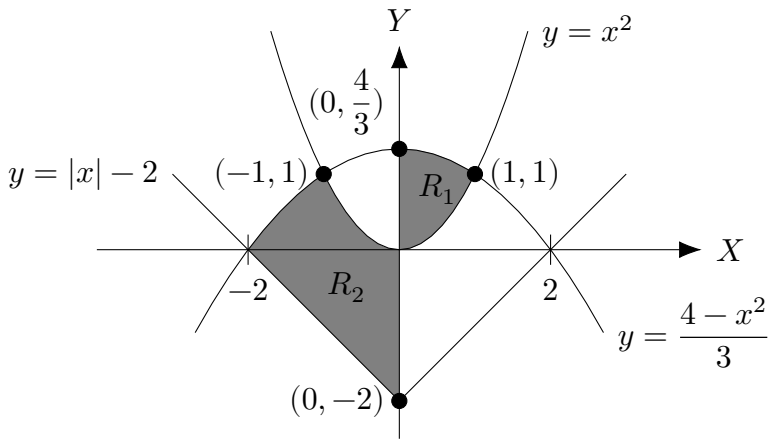
9.2: ใน R_2 โดยใช้แต่ตัวแปร x $\quad x = -1$

$R_2 = A_1 + A_2 \Rightarrow A_1 = \int_{x=-2}^{x=-1} \left(\frac{4-x^2}{3}\right) - [(-x)-2]\,dx$

$A_2 = \int_{x=-1}^{x=0} x^2 - [(-x)-2]\,dx$

---

9. ให้ R_1 และ R_2 เป็นบริเวณที่กำหนดให้ดังรูป



9.1. จงเขียนพื้นที่ของบริเวณ R_1 ในรูปของอินทิกรัล **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

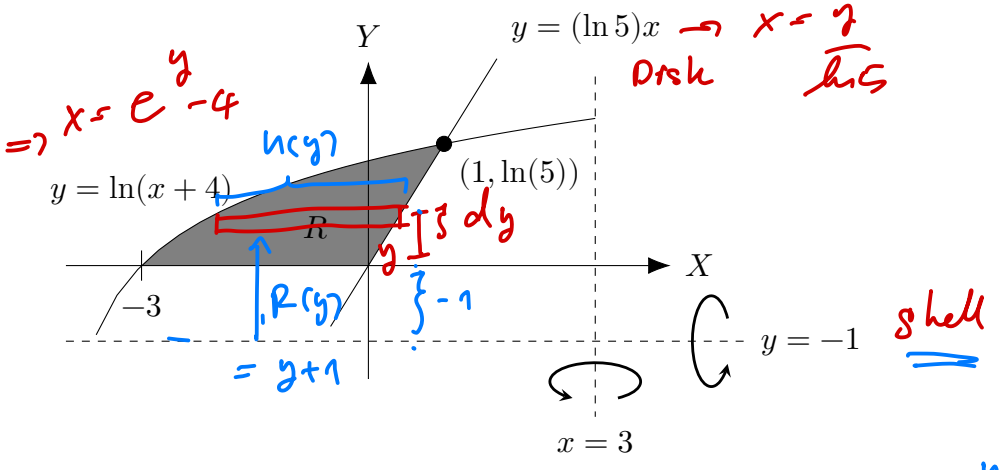
. . . . . .

9.2. จงเขียนพื้นที่ของบริเวณ R_2 ในรูปของอินทิกรัล **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

. . . . . .

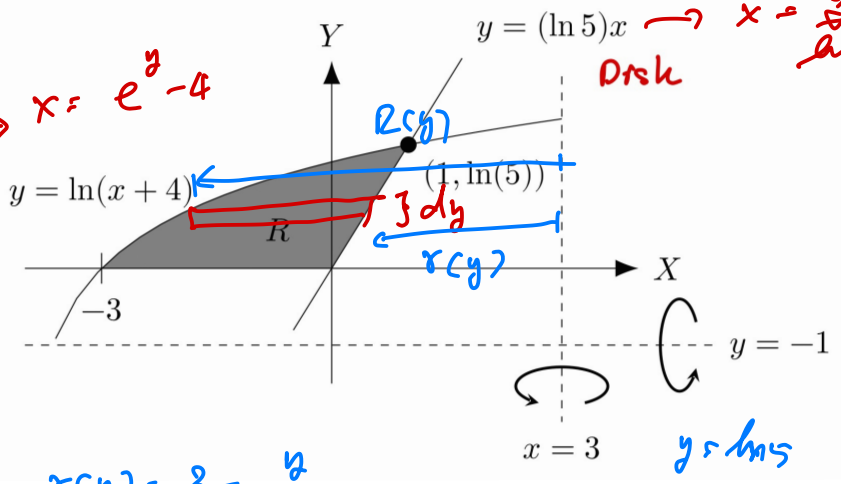
10. มดตัวหนึ่งเมาน้ำหวานจนเสียการทรงตัวทำให้เดินเป็นเส้นโค้งซึ่งมีสมการเป็น $y = \sqrt{4x - x^2}$ ถ้ามดตัวนี้เริ่มเดินทางจากจุด $(0, 0)$ และเขามีพละกำลังที่สามารถเดินไปได้จนถึงจุด $(2, 2)$ เท่านั้น จงหาว่ามดเมาน้ำหวานตัวนี้สามารถเดินได้เป็นระยะทางเท่าใด (กำหนดให้ $\frac{d}{dx}[\arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right)] = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$)

11. ให้ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \ln(x + 4)$ เส้นตรง $y = (\ln 5)x$ และ แกน X (ดังรูป) จงหาปริมาตร V ของทรงตันที่เกิดจากการหมุน R รอบเส้นตรงที่กำหนด โดยเขียนคำตอบในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต



$$\Rightarrow \int_{y=0}^{y=\ln 5} 2\pi(y+1)\left[\frac{y}{\ln 5} - (e^y - 4)\right] dy.$$

11.2: шайбой $x=3$ (Disk) ∥ ⊥ оси y



$y = (\ln 5)x \rightarrow x = \frac{y}{\ln 5}$

Disk

$\Rightarrow x = e^y - 4$

R(y)

3 dy

r(y)

shell

$y = \ln 5$

- $r(y) = 3 - \frac{y}{\ln 5}$
- $R(y) = 3 - (e^y - 4)$

$$V = \int_{y=0}^{y=\ln 5} \pi\left(R^2(y) - r^2(y)\right) dy$$

$$\Rightarrow V = \int_{y=0}^{y=\ln 5} \pi\left[\left(3-(e^y-4)\right)^2 - \left(3-\frac{y}{\ln 5}\right)^2\right] dy$$

11.1. หมุนบริเวณ R รอบเส้นตรง $y = -1$ **หาโดยใช้ Shell method โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

. . . . . .

11.2. หมุนบริเวณ R รอบเส้นตรง $x = 3$ **หาโดยใช้ Disk (Washer) method โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

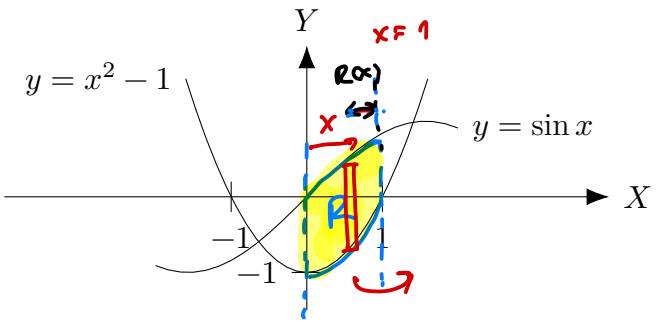
. . . . . .

12. กำหนดให้

$$V = \int_0^1 2\pi(1-x)\left(\sin x - (x^2-1)\right)dx$$

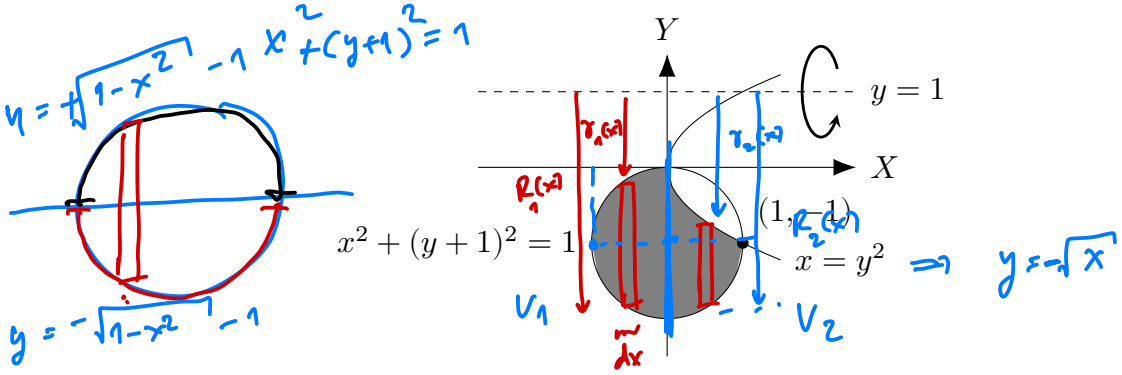
เป็นปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ R

12.1. จงแรเงาพื้นที่ R



12.2. การหมุนครั้งนี้ หมุนรอบเส้นตรง . . . . . .

13. จงหาปริมาตร V ของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงาดังรูป หมุนรอบเส้นตรง $y = 1$ โดยเขียนคำตอบในรูปอินทิกรัลจำกัดเขต **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**



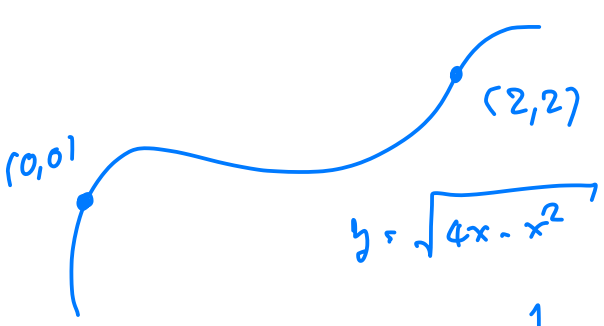
$V =$ . . . . . .

ตัวอย่าง:

$$V = \int_{x=-1}^{x=0} \pi \left[\left(1-\left(-\sqrt{1-x^2}-1\right)\right)^2 - \left(1-\left(+\sqrt{1-x^2}-1\right)\right)^2 \right] dx$$

$$+ \int_{x=0}^{x=1} \pi \left[\left(1-\left(-\sqrt{1-x^2}-1\right)\right)^2 - \left(1-\left(-\sqrt{x}\right)\right)^2 \right] dx$$

10. มดตัวหนึ่งเมาน้ำหวานจนเสียการทรงตัวทำให้เดินเป็นเส้นโค้งซึ่งมีสมการเป็น $y = \sqrt{4x - x^2}$ ถ้ามดตัวนี้เริ่มเดินทางจากจุด $(0,0)$ และเขามีพละกำลังที่สามารถเดินไปได้จนถึงจุด $(2,2)$ เท่านั้น จงหาว่ามดเมาน้ำหวานตัวนี้สามารถเดินได้เป็นระยะทางเท่าใด (กำหนดให้ $\frac{d}{dx}[\arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right)] = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$)



$$L = \int_{x=0}^{x=2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$\text{ม. } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4x - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4x - x^2)^{-\frac{1}{2}}(4 - 2x)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2(2 - x)}{(4x - x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$L = \int_{x=0}^{x=2} \sqrt{1 + \frac{(2-x)^2}{4x - x^2}}\, dx$$

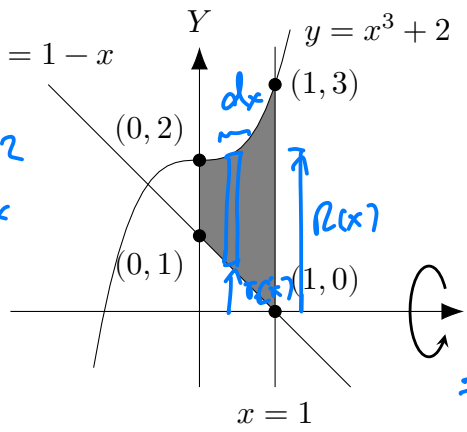
$$= \int_{x=0}^{x=2} \sqrt{\frac{(4x - x^2) + (4 - 4x + x^2)}{4x - x^2}}\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=2} \sqrt{\frac{4}{4x - x^2}}\, dx = 2\int_{x=0}^{x=2} \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}\, dx$$

$$= 2 \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = 2[\arcsin 0 - \arcsin(-1)]$$

$$= \pi \text{ ม.} \quad \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

14. **จงหาปริมาตรของทรงตัน**ที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ปิดล้อมด้วยสมการวงกลม $y = x^3 + 2$ เส้นตรง $y = 1 - x$ เส้นตรง $x = 1$ และ แกน Y (ดังรูป) รอบแกน X **โดยคำนวณให้เสร็จสมบูรณ์**



15. กำหนดค่า x และ $f(x) = e^{x^2}$ ดังตาราง

x	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	1
$f(x)$	1	1.02	1.06	1.15	1.28	1.48	1.75	2.15	2.72

จงหาค่าโดยประมาณของ

15.1. $\int_0^1 f(x)dx$ เมื่อ $n = 2$ **โดยใช้การประมาณค่าเชิงสี่เหลี่ยมคางหมู**

15.2. $\int_0^1 f(x)dx$ เมื่อ $n = 4$ **โดยใช้กฎของซิมป์สัน**

16. จงเขียนอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้ในรูปแบบลิมิตของอินทิกรัล **โดยไม่ต้องคำนวณค่า**

16.1. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x^2+1)\sin(x)}\,\mathrm{d}x$

16.2. $\int_{1}^{3} \frac{e^x}{(x^2-9)(x-1)}\,\mathrm{d}x$

16.3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^4}}{e^{x^2}+1}\,\mathrm{d}x$

17. จงแสดงว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_0^1 \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}\,\mathrm{d}x$ หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้ ให้หาค่าอินทิกรัล

$$\int \frac{3x^2}{u^2}\,\frac{du}{-3x^2} = \frac{1}{u} + C$$

$$= \frac{1}{(1-x^3)} + C$$

$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}\,dx = \lim_{b\to 1^-} \left(\frac{1}{1-x^3}\right)\Big|_{x=0}^{x=b}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left[\left(\frac{1}{1-b^3}\right) - 1\right]$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left[\frac{1-(1-b^3)}{1-b^3}\right]$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \left[\frac{b^3}{1-b^3}\right] \to +\infty$$

$$\to \frac{1}{+0}$$