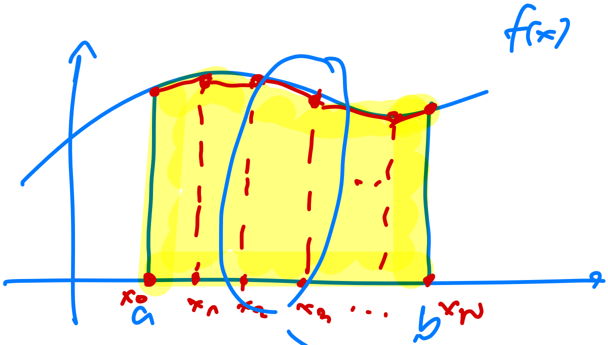
⇒ การอินทิเกรตเชิงตัวเลข:

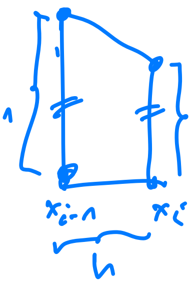
- เชิงสี่เหลี่ยมคางหมู
- เชิงพาราโบลา (กฎของซิมป์สัน)

⇒ สี่เหลี่ยมคางหมู:



เลือก $N > 0$

- $h = \frac{b-a}{N}$
- $x_i = a + ih$



สี่เหลี่ยมคางหมู

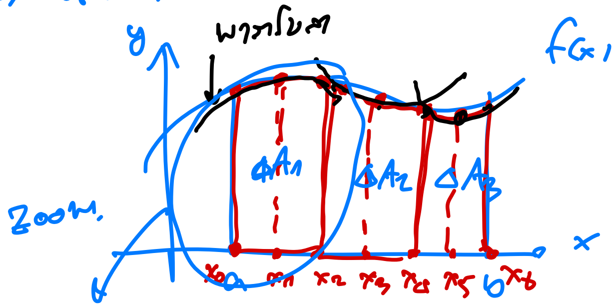
พท. $= \frac{1}{2} \times$ ผลบวกด้านคู่ขนาน

$$\Delta A_i = \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i)$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i$$

$$= \frac{h}{2}\left(1y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{N-1} + 1y_N\right)$$

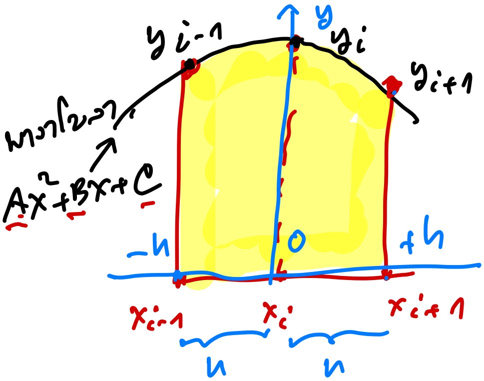
⇒ หลักการของซิมป์สัน:



⇒ ใช้พาราโบลาแทนเส้นตรง

ข้อกำหนด: $\boxed{N \text{ เป็นเลขคู่!}}$

- เลือก N เลขคู่
- $h = \frac{(b-a)}{N}$
- $x_i = a + ih$



$\Rightarrow \Delta A_j \quad , \; j = \dfrac{i+1}{2}$

ต้องหาค่า ΔA_j !

$$\Delta A_j = \int_{-h}^{h} Ax^2+Bx+C\,dx$$

$$= \left(\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right)\Bigg|_{x=-h}^{x=h}$$

(ต้องหาค่าของ A, B, C เพื่อหา ΔA_i)

$$= \left[\left(\frac{Ah^3}{3}+\cancel{\frac{Bh^2}{2}}+Ch\right)-\left(\frac{A(-h)^3}{3}+\cancel{\frac{B(-h)^2}{2}}+C(-h)\right)\right]$$

$$= \frac{2Ah^3}{3}+2Ch = \underbrace{\frac{h}{3}\left(\boxed{2Ah^2+6C}\right)}_{\Delta A_i}$$

$\Rightarrow$ หา A, B, C :

แทนจุด $(-h, y_{i-1})$, $(0, y_i)$, (h, y_{i+1})

ลงในสมการ Ax^2+Bx+C

จะได้

$(-h, y_{i-1})$: $\quad y_{i-1} = A(-h)^2+B(-h)+C$ — ①

$(0, y_i)$: $\quad y_i = 0+0+C$ — ②

$(+h, y_{i+1})$: $\quad y_{i+1} = Ah^2+B(h)+C$ — ③

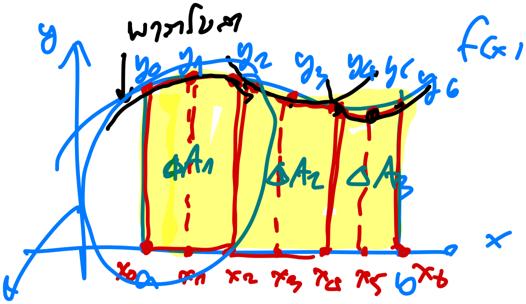
$\Rightarrow$ ต้องการหา $2Ah^2+6C$ ในรูป y_{i-1}, y_i, y_{i+1} $\Leftarrow$

①+③ :$\Rightarrow$ $2Ah^2+2C = y_{i-1}+y_{i+1}$

$+4C \qquad\qquad +4y_i$

จะได้ $2Ah^2+6C = y_{i-1}+4y_i+y_{i+1}$

ดังนั้น $\Delta A_i = \frac{h}{3}\left(y_{i-1}+4y_i+y_{i+1}\right)$



จากกฎของซิมป์สัน

$$A \approx \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3$$

$$= \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2) + \frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4) + \frac{h}{3}(y_4+4y_5+y_6)$$

$$\Rightarrow \boxed{A \approx \frac{h}{3}(1y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+1y_6)}$$

Ex: จงใช้กฎซิมป์สัน ประมาณค่า $\int_0^2 f(x)\,dx$ จากข้อมูลต่อไปนี้

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1/2	1	3/2	2
$y_i = f(x_i)$	0	$\frac{5}{16}$	5	$\frac{40}{16}$	20

$N = 4$

$h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

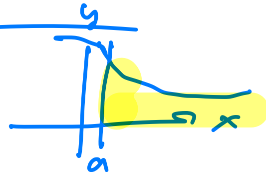
$$A \approx \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right)$$

แบบซิมป์สัน.

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{3}\left(0+\cancel{4}\cdot\frac{5}{\cancel{16}\,4}+2.5+\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{40}\,10}{\cancel{16}\,\cancel{4}}+20\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{5}{4}+40\right) = \frac{165}{24}$$

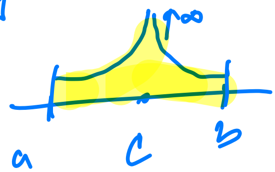
$\Rightarrow$ อินทิกรัลไม่ตรงแบบ :



3 แบบ:

① ขอบเขตอินทิกรัลเป็น $\pm\infty$

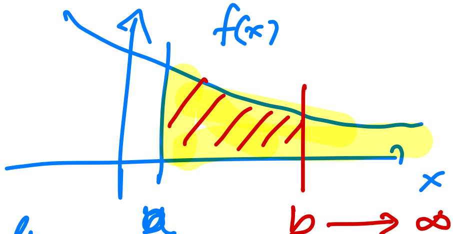
② : $\int_a^b f(x)\,dx$, มีค่า $c \in [a,b]$ ที่ $f(c)=\pm\infty$



③ : ผสม ① + ②

แบบ 1: ขอบเขต เป็น $\pm\infty$.

[1] อินทิกรัลในรูป. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$



Idea: หา. $\int_a^b f(x)\,dx$ แล้วเทคลิมิต $\lim_{b\to\infty}$

ดังนั้น $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Ex: หาค. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

① เขียนในรูปลิมิตเกิน $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

พิจารณา. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ | by parts: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = \ln x$

$\int dv = \int \frac{1}{x^2}\,dx$

$v = -\frac{1}{x}$

$$= \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x}\, \underbrace{d\ln x}_{\frac{1}{x}dx}$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

⇒ ดังนั้น. $\displaystyle\int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=b}$

$$= \left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b}\right) - (0 - 1)$$

$$= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1$$

ดังนั้น!

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\,dx}$$

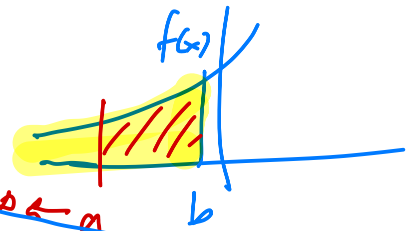
$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right)$$

$$= -\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{\ln b}{b} \right) - \underbrace{\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{b} \right)}_{\to 0} + 1$$

$\to \frac{\infty}{\infty}$ (โลปิตาล)

(โลปิตาล) $$= \underbrace{-\lim_{b \to +\infty} \frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{1}}_{\to 0} - 0 + 1 = 1$$

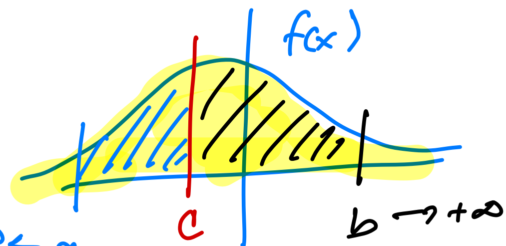
$\boxed{2}$ โจทย์ $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)$



เขียนโดยใช้ lim $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx}$$

$\boxed{3}$ โจทย์ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$



เขียนใหม่

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

(ครบปริมาณ.) $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx}$$

Ex: จงหา. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{(x-2)}_{u}^2+1}\,dx$

$\rightarrow (x^2-4x+4)+1$

พิจารณา. $\displaystyle\int \frac{1}{\underbrace{(x-2)}_{u}^2+1}\,dx = \arctan(x-2)+C \quad \leftarrow (*)$

ดังนั้น. เขียนใหม่ในรูปของ ได้เป็น.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx + \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{2} \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx$$

จาก.(*)

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\arctan(x-2)\right)\Big|_{x=a}^{x=2} + \lim_{b\to+\infty} \left(\arctan(x-2)\right)\Big|_{x=2}^{x=b}$$

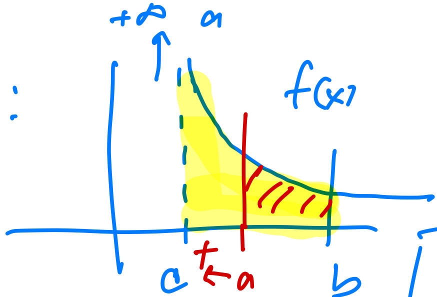
$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\underbrace{\arctan(0)}_{=0} - \underbrace{\arctan(a-2)}\right] + \lim_{b\to+\infty} \left[\arctan(b-2) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}\right]$$

$$= -\underbrace{\lim_{a\to-\infty} \left[\arctan(a-2)\right]}_{-\frac{\pi}{2}} + \lim_{b\to+\infty} \underbrace{\left[\arctan(b-2)\right]}_{\rightarrow\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad \blacksquare$$

⇒ แบบที่ 2 : $\int_a^b f(x)\,dx$, ถ้ามี $c \in [a,b]$ ที่ $f(c) = \pm\infty$

[1] :

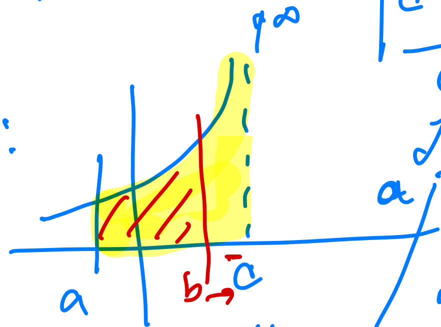


$\int_c^b f(x)\,dx$ โดยที่ $f(c) = +\infty$

เขียนในรูป lim :

$$\boxed{\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{a \to c^+} \int_a^b f(x)\,dx}$$

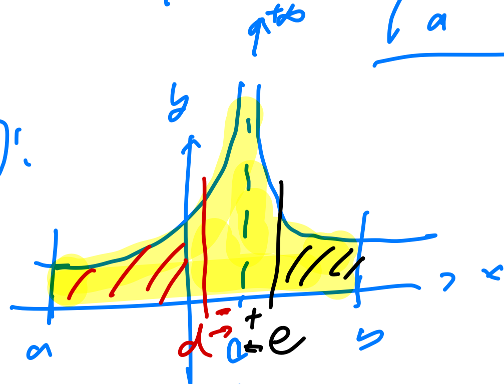
[2] :



$\int_a^c f(x)\,dx$ โดยที่ $f(c) = +\infty$

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c^-} \int_a^b f(x)\,dx}$$

[3] :



$\int_a^b f(x)\,dx$, $c \in [a,b]$
$f(c) = +\infty$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d \to c^-} \int_a^d f(x)\,dx + \lim_{e \to c^+} \int_e^b f(x)\,dx}$$

Ex: จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$

เป็น 0 เมื่อ $x = 1 \in [0,3]$
ดังนั้นเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ
ที่ $c = 1 \Rightarrow f(c) = +\infty$

สามารถเขียนในรูป lim ได้ดังนี้

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$$

$$\boxed{= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx + \lim_{a\to 1^+} \int_a^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx}$$

$= \ldots$ ☒

การบ้าน: แบบฝึกหัด 3.12

2.5) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4}\,dx$, 2.7.) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{2x}\,dx$

2.17) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$