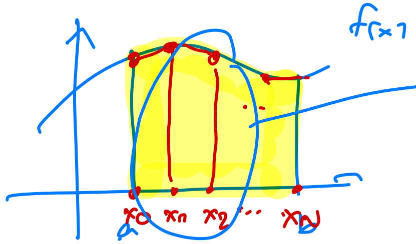
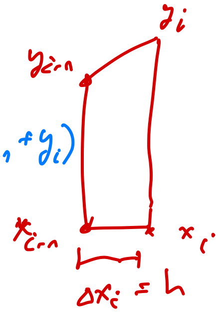
⇒ การอินทิเกรตเชิงตัวเลข:

• สี่เหลี่ยมคางหมู



$$\Delta A_i = \frac{1}{2} \times h \times (y_{i-1} + y_i)$$



$$A \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i = \boxed{\frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{N-1} + y_N\right)}$$

Ex: จงใช้การประมาณค่า สี่เหลี่ยมคางหมู ประมาณ $\int_0^2 f(x)\,dx$

โดยใช้ข้อมูล จากตาราง

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y_i = f(x_i)$	0	$\frac{5}{16}$	5	$\frac{40}{16}$	20
i	0		1		2

ประมาณค่า โดยใช้ □ คางหมู

• $h = \frac{1}{2}$

x_0 x_1 x_2 x_3 x_4

0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{3}{2}$ 2

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\left(0 + 2\cdot\frac{5}{16} + 2\cdot 5 + 2\cdot\frac{40}{16} + 20\right) = \dots$$

• ใช้ $h = 1$.

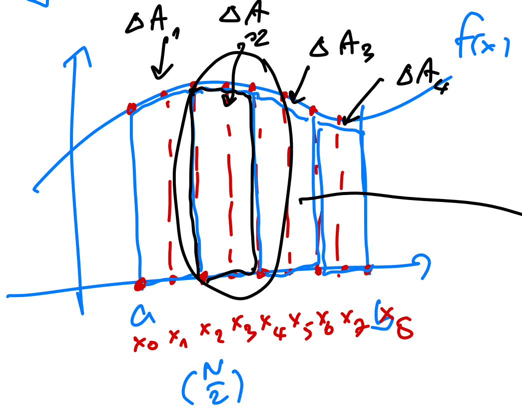
x_0 x_1 x_2

0 1 2

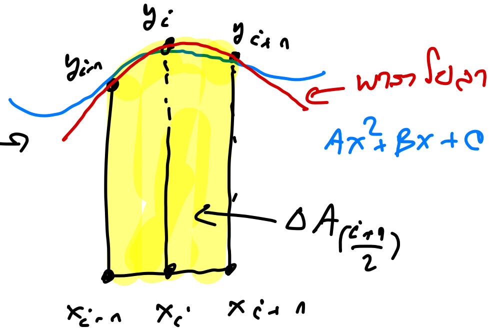
$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + y_2\right) = \frac{1}{2}\left(0 + 2\cdot 5 + 20\right)$$

$$= \frac{30}{2} = 15$$

=> กฎของซิมป์สัน



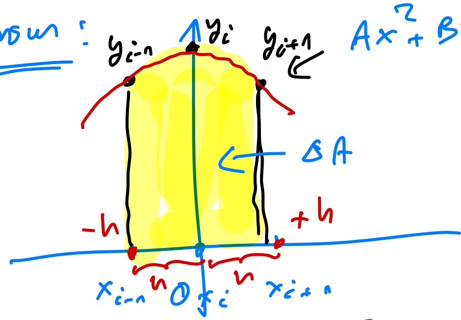
จำนวน N เป็นเลขคู่



$$A \approx \sum_{j=1} \Delta A_j$$

คำนวณ $\Delta A_{\left(\frac{i+1}{2}\right)}$

ดูในกรอบ :



$$\Delta A = \int_{-h}^{h} Ax^2+Bx+C\,dx$$

$$= \left(\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right)\Big|_{-h}^{h}$$

$$= \left[\left(\frac{Ah^3}{3}+\cancel{\frac{Bh^2}{2}}+Ch\right)-\left(\frac{A(-h)^3}{3}+\cancel{\frac{B(-h)^2}{2}}+C(-h)\right)\right]$$

$$\Delta A = \frac{2Ah^3}{3}+2Ch = \frac{h}{3}\underbrace{\left(2Ah^2+6C\right)}_{(*)}$$

=> คำนวณ ค่า A, B, C

โดยการแทน $x=-h$, $x=0$, $x=h$ ลงใน Ax^2+Bx+C

$x=-h$: $A(-h)^2+B(-h)+C = y_{i-1}$ ——— ①

$x=0$: $0+0+C = y_i$ ——— ②

$x=h$: $Ah^2+Bh+C = y_{i+1}$ ——— ③

$$① + ③ \Rightarrow 2Ah^2 + 2C = y_{i-1} + y_{i+1} \quad \text{—— ④}$$

$$④ + 4② \Rightarrow 2Ah^2 + 6C = y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}$$

ดังนั้น $\Delta A_{\left(\frac{i+1}{2}\right)} = \frac{h}{3}\left(2Ah^2 + 6C\right) = \boxed{\frac{h}{3}\left(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}\right)}$

ซิมป์สัน

$$\Rightarrow A \approx \sum_{j=1}^{\left(\frac{N}{2}\right)} \Delta A_j = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3}(y_{N-4} + 4y_{N-3} + y_{N-2}) + \frac{h}{3}(y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N)$$

$$\Rightarrow \boxed{A \approx \frac{h}{3}\left[1y_0 + 4y + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{N-3} + 2y_{N-2} + 4y_{N-1} + y_N\right]}$$

Ex: จงใช้การประมาณค่า โดยกฎซิมป์สัน ประมาณ $\int_0^2 f(x)\,dx$

โดยใช้ข้อมูลจากตาราง

i	0	1	2	3	4
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y_i = f(x_i)$	$\boxed{0}$	$\frac{5}{16}$	$\boxed{5}$	$\frac{40}{16}$	$\boxed{20}$

$\Rightarrow N$ จำนวนคู่. $N = 4$

$$h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

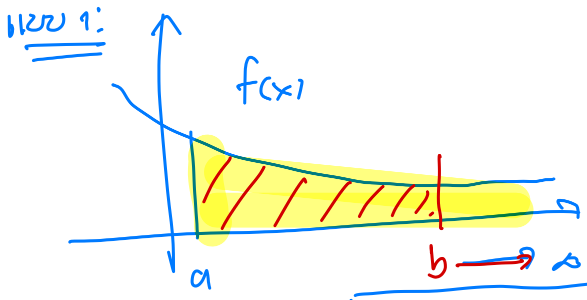
$$A \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\right]$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{3}\left[0 + \cancel{4}\cdot\frac{5}{\underset{4}{\cancel{16}}} + 2.5 + \cancel{4}\cdot\frac{\overset{10}{\cancel{40}}}{\cancel{16}\,\cancel{4}} + 20\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{5}{4} + 40\right] = \frac{165}{24}$$

⟹ อินทิกรัลไม่ตรงแบบ: (Improper integral)

แบบ 1:



ต้องการหา. $\displaystyle\int_{x=a}^{x=+\infty} f(x)\,dx$

Idea: นิยาม

$$\boxed{\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to+\infty}\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx}$$

Ex: จงหา. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}\,dx$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+4}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\int_0^b \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx\right)$$

$u = \frac{x}{2}$

$du = \frac{dx}{2}$

$dx = 2du$

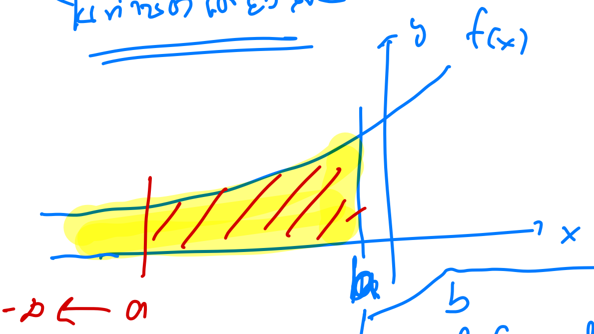
$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{2}{4} \int_0^b \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{u}^2 + 1} \, d\underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{u} \right)$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_0^b \right]$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2} \left[\underbrace{\arctan\left(\frac{b}{2}\right)}_{\to \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan(0)}_{= 0} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}$$

ในกรณีหางเดียวซ้าย.

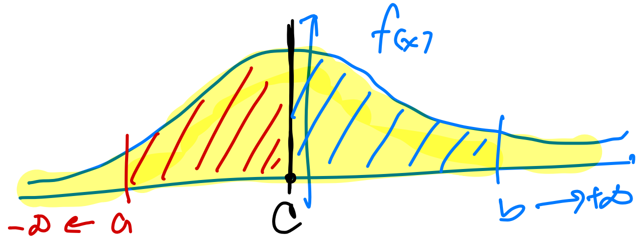


$\Rightarrow$ ต้องการหา $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

โดย กำหนด. $$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

สำหรับ ค่าหน้า ทั้งสองข้าง ทางขวาซ้าย;

ต้องการหา. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$



$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx}$$

Ex: จงหาค่าของ. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx$

พิจารณา, $\displaystyle\int \frac{1}{\underbrace{x^2-4x+9}_{(x^2-4x+4)+5}}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+5}\,dx$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right)}_{=u}{}^2+1}\,dx$$

$u = \dfrac{x-2}{\sqrt{5}}$

$du = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,dx$

$dx = \sqrt{5}\,du$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

เลือก $c = 2$;

จะได้ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx = \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx + \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{2} \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b} \frac{1}{x^2-4x+9}\,dx$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) \right) \Bigg|_a^2 + \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) \right) \Bigg|_2^b$$

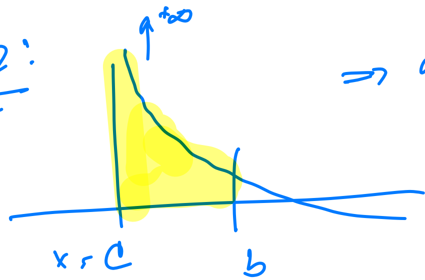
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\lim_{a \to -\infty} \left(0 - \underbrace{\arctan\left(\frac{a-2}{\sqrt{5}}\right)}_{\to -\frac{\pi}{2}} \right) + \lim_{b \to +\infty} \left(\underbrace{\arctan\left(\frac{b-2}{\sqrt{5}}\right)}_{\to \frac{\pi}{2}} - 0 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \quad \blacksquare$$

⇒ Remark: ถ้าพิจารณาแล้วที่ lim เป็น $\pm\infty$ เรียกว่า ไดเวอร์จ.
(ไม่ลู่เข้า)

แบบ 1: ขอบเขตอินทิกรัลเป็น $\pm\infty$

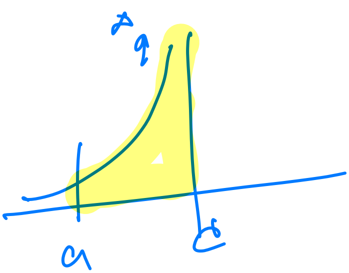
แบบที่ 2:



⇒ ต้องการหา $\int_{x=c}^{x=b} f(x)\,dx$

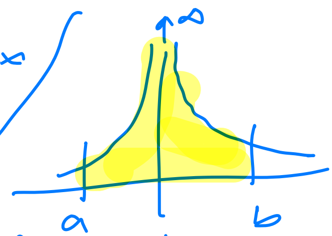
ขอบเขตไม่เป็น $\pm\infty$

แต่ค่าของ $f(c) \to +\infty$



⇒ ต้องการหา $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$

⇒ ปัญหา $f(c) \to +\infty$



(⇒ หา $\int_a^b f(x)\,dx$, c $f(c) \to \pm\infty$)