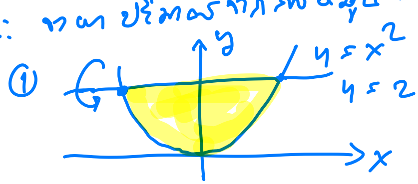
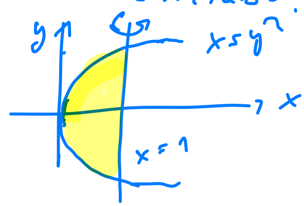
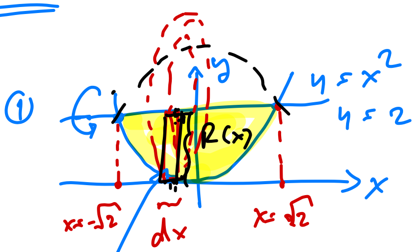
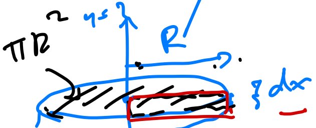
ตัวอย่าง: จงหาปริมาตรจากการหมุน พท. แรเงา รอบแกน ที่กำหนด.





⇒ Disk:





$dv=\pi R^2 dx$

$$V=\int_{x=-\sqrt{2}}^{x=\sqrt{2}} \overbrace{\pi R^2(x)\,dx}^{dv}$$

$R(x)=2-x^2$

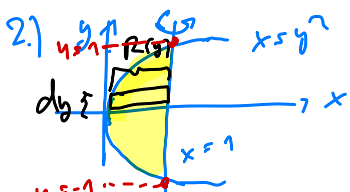
$$\boxed{V=\int_{x=-\sqrt{2}}^{x=\sqrt{2}} \pi(2-x^2)^2\,dx} \quad (**)$$

$$=\pi\int_{x=-\sqrt{2}}^{x=\sqrt{2}} (4-4x^2+x^4)\,dx$$

$$=\pi\left(4x-\frac{4x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{x=-\sqrt{2}}^{x=\sqrt{2}}$$

$$=\pi\left[\left(4\cdot\sqrt{2}-\frac{4\cdot\sqrt{2}^3}{3}+\frac{\sqrt{2}^5}{5}\right)-\left(-4\sqrt{2}-\frac{4\cdot(-\sqrt{2})^3}{3}-\frac{(-\sqrt{2})^5}{5}\right)\right]$$ ☐

2.)



$R(y)=1-y^2$

$$V=\int_{y=-1}^{y=1} \pi R(y)^2\,dy$$

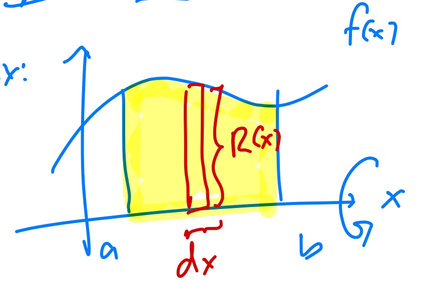
$$\boxed{V=\int_{y=-1}^{y=1} \pi(1-y^2)^2\,dy} \quad (**)$$

$$V = \pi \int_{y=-1}^{y=1} 1 - 2y^2 + y^4 \, dy = \pi \left(y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_{y=-1}^{y=1}$$

$$= \pi \left[\left(1 - \frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^5}{5} \right) - \left((-1) - \frac{2(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^5}{5} \right) \right]$$

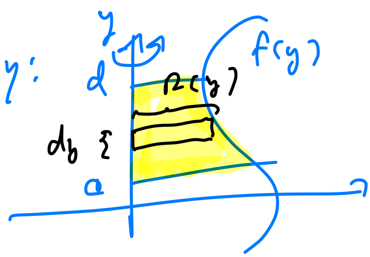
สรุป: วิธีdisk: ∥ หรือ ⊥ กับแกนหมุน.

แกนx:



$$\Rightarrow \boxed{V = \int_{x=a}^{x=b} \pi R(x)^2 \, dx}$$

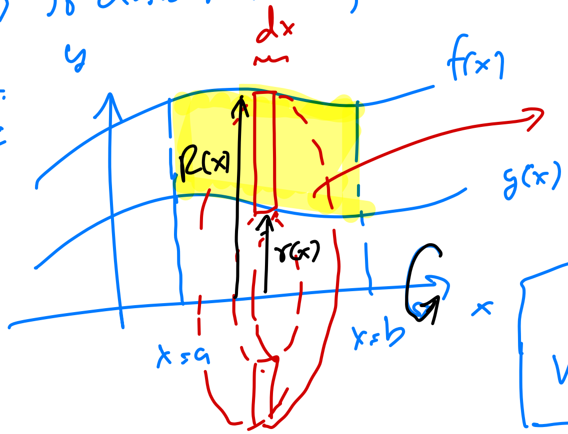
แกนy:

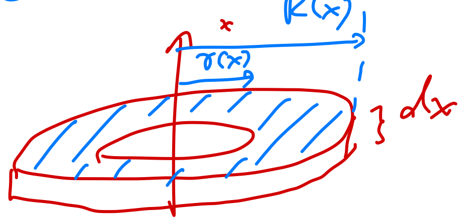


$$\Rightarrow \boxed{V = \int_{y=c}^{y=d} \pi R(y)^2 \, dy}$$

⇒ วิธี disk ที่แกนหมุน ไม่ติดกับพื้นที่ (เกิดรู)

Ex: แกนx:

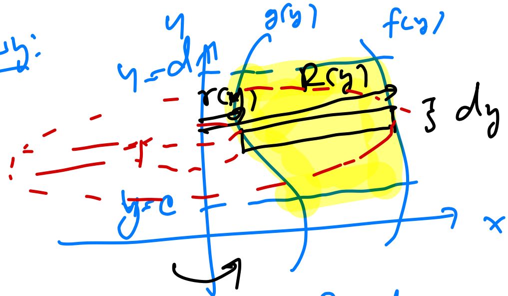




$$dV = \pi \left(R(x)^2 - r(x)^2 \right) dx$$

$$\boxed{V = \int_{x=a}^{x=b} \pi \left(R(x)^2 - r(x)^2 \right) dx}$$

แกน y:

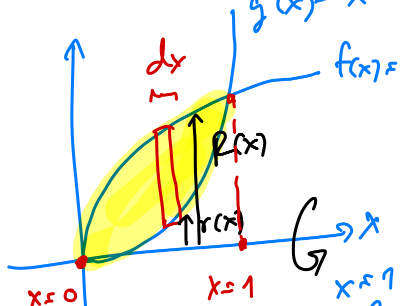


$$V = \int_{y=c}^{y=d} \pi \left(R(y)^2 - r(y)^2\right) dy$$

$$dv = \pi\left(R(y)^2 - r(y)^2\right) dy$$

Ex: จงหาปริมาตร จากการหมุน พท. แรเงา รอบแกนที่กำหนด. โดยใช้วิธีแหวน (แผ่น $\perp$ กับแกนหมุน)

1.)



$r(x) = x^2$

$R(x) = \sqrt{x}$

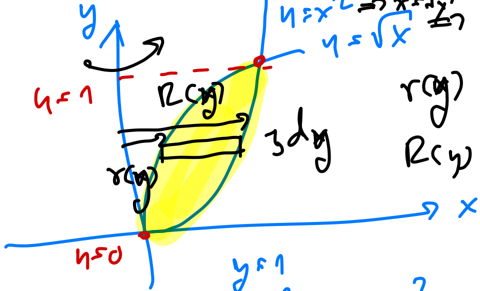
วิธีทำ $V = \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} \pi\left(R(x)^2 - r(x)^2\right) dx$

$$\boxed{V = \pi \int_{x=0}^{x=1} (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \, dx} = \pi \int_{x=0}^{x=1} x - x^4 \, dx$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

2.1

$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y} \Rightarrow x=y^2$



$r(y)=y^2$

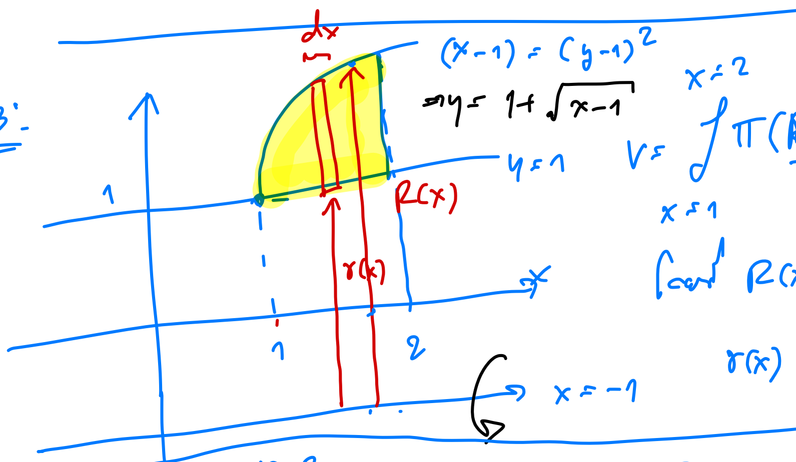
$R(y)=\sqrt{y}$

$$V=\int_{y=0}^{y=1}\pi\left(R(y)^2-r(y)^2\right)dy$$

$$V=\pi\int_{y=0}^{y=1}(\sqrt{y})^2-(y^2)^2\,dy=\pi\int_{y=0}^{y=1}y-y^4\,dy$$

$$=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\pi\frac{3}{10}\ \blacksquare$$

Ex 3:



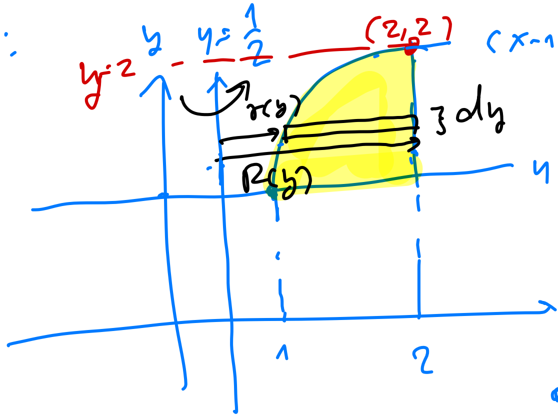
$$V=\int_{x=1}^{x=2}\pi\left(\underline{R(x)}^2-\underline{r(x)}^2\right)dx$$

$R(x)=(1+\sqrt{x-1})-(-1)$

$r(x)=1-(-1)=2$

$$\boxed{\Rightarrow V=\int_{x=1}^{x=2}\pi\left[\left(1+\sqrt{(x-1)}+1\right)^2-2^2\right]dx}$$

Ex4:



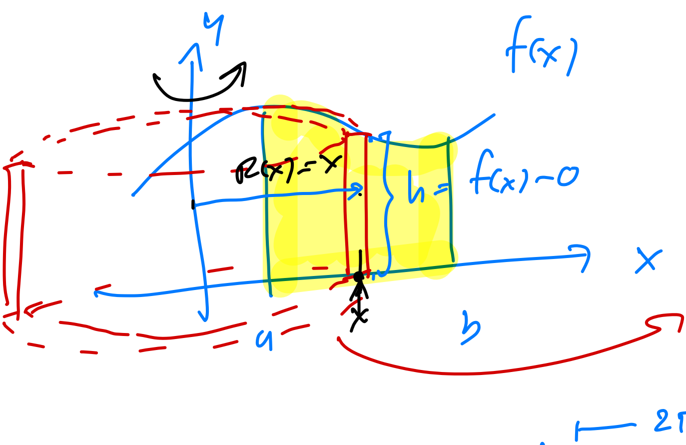
$(x-1)=(y-1)^2 \Rightarrow x=(y-1)^2+1$

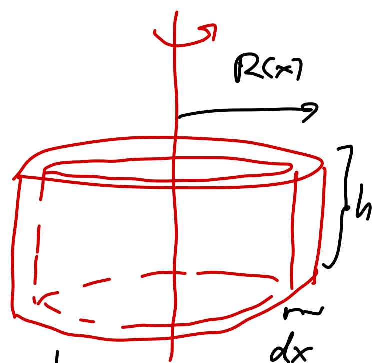
$$V=\int_{y=1}^{y=2} \pi\left(R(y)^2-r(y)^2\right)dy$$

- $R(y)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
- $r(y)=\left[(y-1)^2+1\right]-\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow V=\int_{y=1}^{y=2}\pi\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left[(y-1)^2+1-\frac{1}{2}\right]^2\right]dy$$

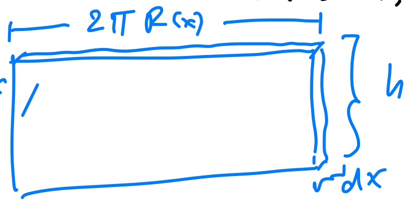
$\Rightarrow$ ข้อสังเกต: แท่ง $\perp$ หรือ // กับแกนหมุน.





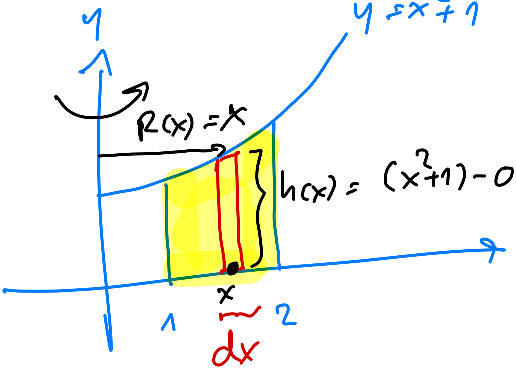
ผ่าครึ่ง แล้วกางออก.

$dV=2\pi R(x)h(x)dx$



$$\Rightarrow \boxed{V = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi\, R(x)\, h(x)\, dx}$$

Ex: จงหาปริมาตร จากการหมุน พท. (แรเงา) โดยวิธีเชลล์.



ขน // กับแกนหมุน

$$V = \int_{x=1}^{x=2} \underbrace{2\pi R(x) h(x)\, dx}_{dV}$$

- $R(x) = x$
- $h(x) = (x^2+1)$

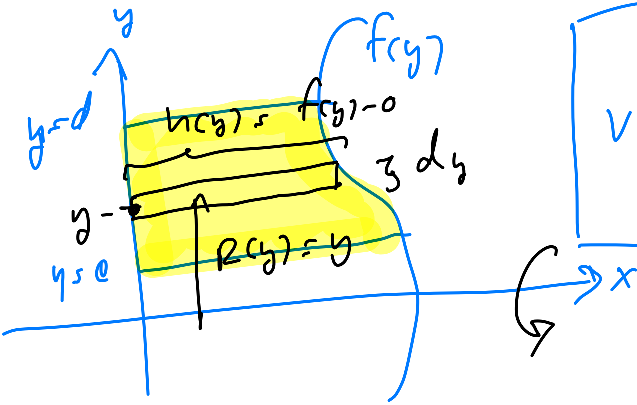
ดังนั้น.

$$V = 2\pi \int_{x=1}^{x=2} x \cdot (x^2+1)\, dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{x=1}^{x=2}$$

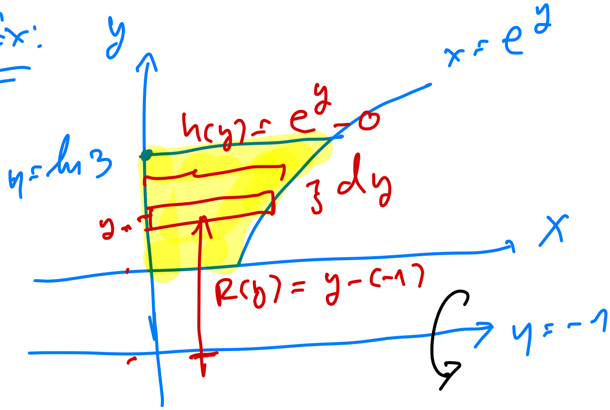
$$= 2\pi \left[\left(\frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \right] = \ldots$$

$\Rightarrow$ เทียบ y:



$$V = \int_{y=c}^{y=d} 2\pi R(y)\cdot h(y)\,dy$$

Ex:



จงหาปริมาตร ของทรงตัน
พท. (ร)(ว) เทียบแกน
ที่กำหนด โดยวิธีเปลือก

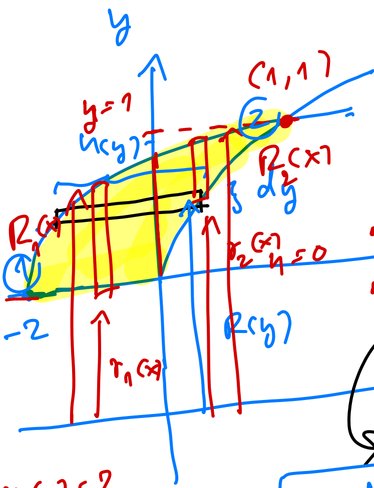
$$V = \int_{y=0}^{y=\ln 3} 2\pi R(y)\cdot h(y)\,dy$$

โดยที่ $R(y) = y-(-1) = y+1$

$h(y) = e^y - 0$

ดังนั้น $$\boxed{V = \int_{y=0}^{y=\ln 3} 2\pi (y+1)\cdot(e^y)\,dy} \quad (**)$$

$\underline{Ex:}$ จงหาปริมาตรจากการหมุน พท. แรเงา รอบแกนที่กำหนด
โดยใช้วิธีที่เหมาะสม



$x = y^2$

$(x+2) = 3y^2$

$x = 3y^2 - 2$

• $r_2(x) = \sqrt{x} + 2$

• $R_2(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3}} + 2$

$y = -2$

• $r_1(x) = 2$

• $R_1(x) = \sqrt{\frac{(x+2)}{3}} + 2$

$\underline{เชลล์:}$

$$V = \int_{y=0}^{y=1} 2\pi R(y) \cdot h(y)\, dy$$

โดยที่ $R(y) = y - (-2)$

$h(y) = y^2 - (3y^2 - 2)$

$\underline{เชลล์:}$

$$\boxed{V = \int_{y=0}^{y=1} 2\pi (y+2)\left(y^2 - (3y^2-2)\right) dy}$$

$\underline{ดิสก์:}$ ①.

$$V = \int_{x=-2}^{x=0} \pi \left(R_1(x)^2 - r_1(x)^2\right) dx$$

$$+ \text{②} \int_{x=0}^{x=1} \pi \left(R_2(x)^2 - r_1(x)^2\right) dx$$

=> แทนค่า R_1, r_1 และ R_2, r_2 ☒

การบ้าน: แบบฝึกหัด 3.2 ข้อ 2 (2.1 - 2.4).