การบ้าน: แบบฝึกหัด 3.7.

4.) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2-1}{x^3-x}\,dx$ 5.) $\displaystyle\int \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}\,dt$

4.) จาก $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2-1}{x^3-x}\,dx \xrightarrow{\text{จัดรูป}} \int \frac{x^4+x^2-1}{x(x-1)(x+1)}\,dx$

ดีกรี $P(x)=4$ > ดีกรี $Q(x)=3$ ต้องหารเพื่อลดดีกรี

$$
\begin{array}{r|l}
 & \boxed{x} \quad \text{ผลหาร} \\
\hline
x^3-x & x^4+x^2-1 \\
 & -\,(x^4-x^2) \\
\hline
 & 0+\boxed{2x^2-1} \quad \text{เศษ.}
\end{array}
$$

นำไปแทนรูป

$$\int x+\frac{2x^2-1}{x(x-1)(x+1)}\,dx$$

พิจารณา ① เขียนในรูปเศษส่วนย่อย.

$$\frac{2x^2-1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x+1} \quad \text{—(1)}$$

② หา unknowns: 3 ตัว A_1, A_2, A_3

คูณแต่ละตัวด้วย $x(x-1)(x+1)$ ตลอด

$$\Rightarrow \quad 2x^2-1 = A_1(x-1)(x+1)+A_2x(x+1)+A_3x(x-1)$$

เทคนิค แทนค่าลงตัวแปร:

$x=0$: $\Rightarrow -1 = A_1(-1)(+1)+0+0 \Rightarrow A_1=\frac{-1}{-1}=1$.

$x=-1$: $\Rightarrow 2(-1)^2-1 = 0+0+A_3(-1)(-1-1) \Rightarrow A_3=\frac{1}{2}$

$x=1$: $\Rightarrow 2(1)^2-1 = 0+A_2(1)(1+1)+0 \Rightarrow A_2=\frac{1}{2}$

ดังนั้น $A_1 = 1$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $A_3 = \frac{1}{2}$ ตามลำดับ.

$$\int \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^3 - x}\,dx = \int x + \frac{2x^2 - 1}{\underline{\underline{x(x-1)(x+1)}}}\,dx$$

$$= \int x\,dx + \int \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)(x+1)}\,dx$$

$$= \int x\,dx + \int \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)}\,dx$$

อินทิเกรต:

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + \underline{C}$$

5.) $$\int \frac{e^t}{e^{2t} + 3e^t + 2}\,dt$$ ให้ $u = e^t$

$du = e^t\,dt \Rightarrow dt = \frac{du}{e^t}$

$$\Rightarrow \int \frac{\cancel{e^t}}{u^2 + 3u + 2}\cdot\frac{du}{\cancel{e^t}} = \int \frac{1}{u^2 + 3u + 2}\,du$$

พิจารณา $$\frac{1}{\underbrace{u^2 + 3u + 2}_{=(u+2)(u+1)}} = \frac{A_1}{u+2} + \frac{A_2}{u+1} \quad \text{—— } (*)$$

คูณ $(*)$ ด้วย $(u+2)(u+1)$ ตลอด

$$1 = A_1(u+1) + A_2(u+2)$$

แทนค่าเพื่อหาตัวแปร:

$u=-1: \Rightarrow 1 = 0 + A_2(-1+2) \Rightarrow A_2 = 1$

$u=-2: \Rightarrow 1 = A_1(-2+1) + 0 \Rightarrow A_1 = -1$

จะได้ว่า

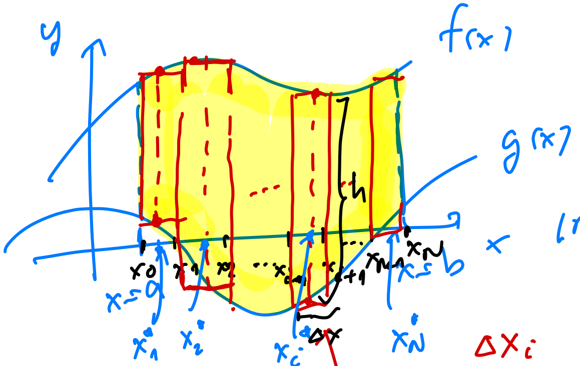
$$\int \frac{1}{(u+1)(u+2)}\,du = \int \frac{-1}{u+2} + \frac{1}{u+1}\,du$$

$$= -\ln|u+2| + \ln|u+1| + C$$

$$(u = e^t) \quad = -\ln|e^t+2| + \ln|e^t+1| + C \quad \blacksquare$$

⇒ การประยุกต์ของอินทิกรัล

⇒ การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง



$$\Rightarrow A \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*) - g(x_i^*)\Delta x_i$$

(กรณี lim)

$$\Rightarrow A = \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta x \to 0)}} \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*) - g(x_i^*)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

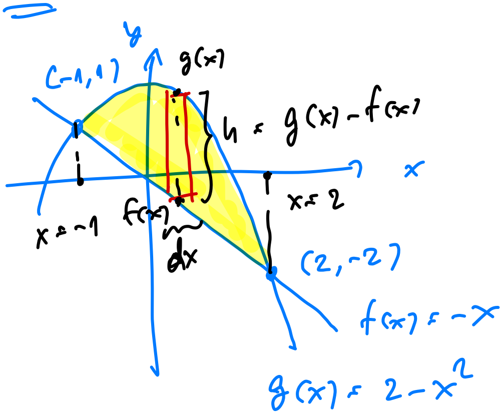
$$\Delta A_i = \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\Delta x_i}\left(f(x_i^*) - g(x_i^*)\right)$$

$$= \Delta x \cdot h$$

=> ดังนั้น พท. ระหว่างกราฟ $f(x), g(x)$ จาก $x=a$ ถึง $x=b$ มีค่าเป็น

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

Ex: หา พท. แรเงา



$$A = \int_{x=-1}^{x=2} g(x) - f(x)\,dx$$

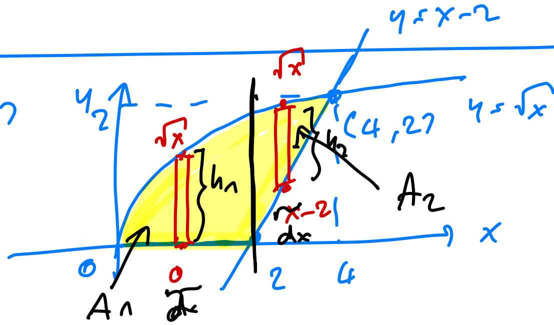
$$= \int_{x=-1}^{x=2} (2 - x^2) - (-x)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}} + 4\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right)$$

$$= \left(+\frac{10}{3}\right) - \left(\frac{+2 + 3 - 12}{6}\right) = \frac{20 - 7}{6} = \frac{13}{6} \blacksquare$$

Ex: หา พท. แรเงา



แบบ 1:

พท. $A = A_1 + A_2$

$$A = \int_{x=0}^{x=2} (\sqrt{x} - 0)\,dx + \int_{x=2}^{x=4} (\sqrt{x} - (x-2))\,dx \quad \text{——} \boxed{1}$$

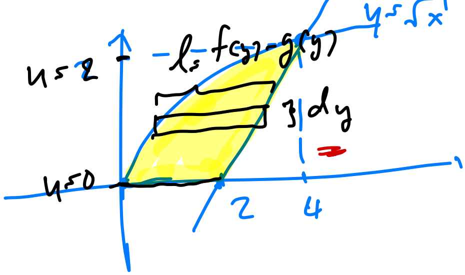
$(x = y+2)$

$y = (x-2) \Rightarrow f(y) = y + 2$

$y = \sqrt{x} \Rightarrow g(y) = y^2$

$(x = y^2)$

แบบที่ 2:



$$\Rightarrow \text{พท. } A = \int_{y=0}^{y=2} f(y) - g(y)\;dy$$

$$A = \int_{y=0}^{y=2} (y+2) - y^2\,dy \quad \text{——} \boxed{2}$$

พิจารณา ①:

$$A = \int_{x=0}^{x=2} (\sqrt{x} - 0)\,dx + \int_{x=2}^{x=4} (\sqrt{x} - (x-2))\,dx \quad \text{——} \boxed{1}$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{x=0}^{x=2} + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{x=2}^{x=4}$$

$$= \left[\cancel{\tfrac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} - 0}\right] + \left[\left(\tfrac{2}{3}\cdot 2^{3} - \tfrac{4^2}{2} + 2\cdot 4\right) - \cancel{\left(\tfrac{2}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{2} + 4\right)}\right]$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 8 + 8\right) + 2 = \frac{16-6}{3} = \frac{10}{3} \quad \checkmark$$

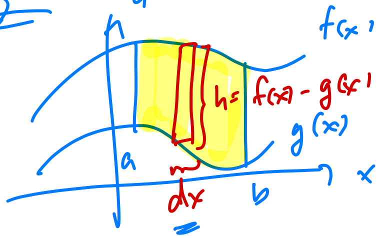
พิจารณา: แบบ $\boxed{2}$

$$A = \int_{y=0}^{y=2} (y+2) - y^2 \, dy \qquad \boxed{2}$$

$$= \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 2y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} = -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4$$

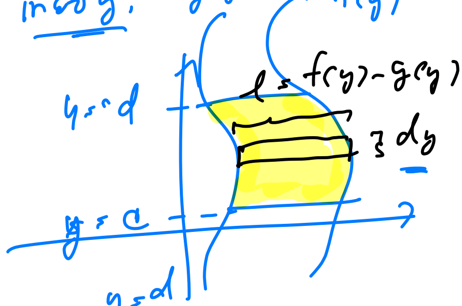
$$= -\frac{8}{3} + 6 = \frac{-8+18}{3} = \frac{10}{3} \quad \checkmark$$

สรุป: เทียบ x:



$$A = \int_{x=a}^{x=b} f(x) - g(x) \, dx$$

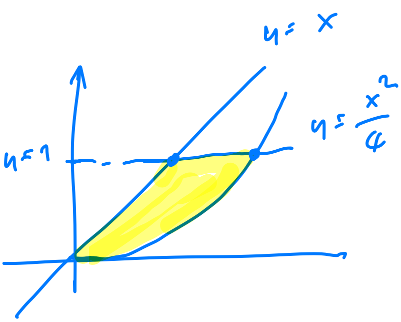
เทียบ y:



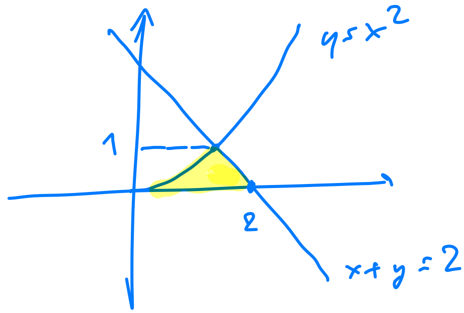
$$A = \int_{y=c}^{y=d} f(y) - g(y) \, dy.$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 5, 8 (ใช้ทั้ง dx และ dy)

5.) หาพท. แรเงา

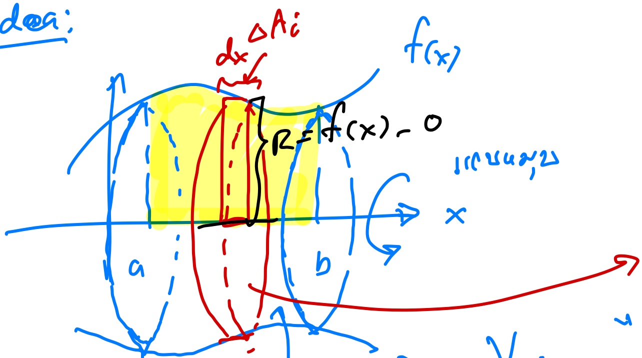


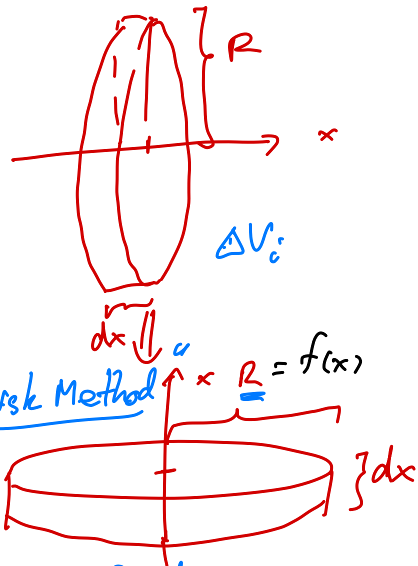
6.) หาพท. แรเงา.



=> การหาปริมาตรทรงตันที่เกิดจากการหมุน.

Idea:





ทรงตันปริมาตร V.

Disk Method

$$V \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i$$

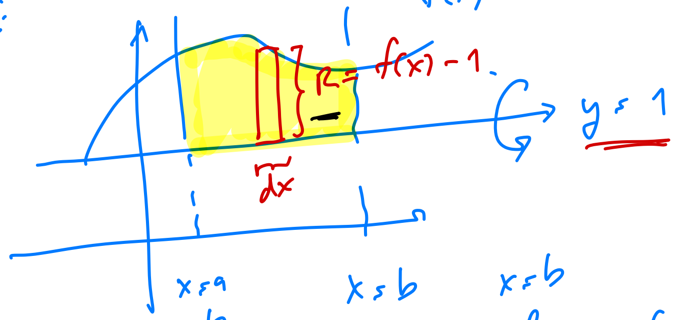
$$\Delta V_i = \underbrace{\pi R^2}_{\text{พท.วงกลม}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{หนา}}$$

$$\Rightarrow V = \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta x \to 0)}} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\pi f(x_i^*)^2 \Delta x_i}_{\Delta V_i}$$

เทค lim:

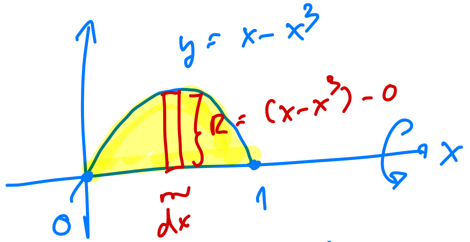
$$\boxed{V = \int_{x=a}^{x=b} \pi (f(x))^2 \, dx}$$

Ex:



$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi R^2 \, dx = \int_{x=a}^{x=b} \pi \left(f(x) - 1\right)^2 dx$$

Ex: หา ปริมาตร ทรงตัน ที่เกิดจากการหมุน พท. แรเงา รอบแกน x



$$\boxed{V = \int_{x=0}^{x=1} \pi (x - x^3)^2 \, dx}$$

$$\Rightarrow V = \pi \int_{x=0}^{x=1} x^2 - 2x^4 + x^6 \, dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=1} = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right)$$

การบ้าน: หา ปริมาตร จากการหมุน พท. แรเงา รอบแกน ที่กำหนด

①