ตัวอย่าง: แบบฝึกหัด 3.6

1.) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$

3.) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-49}}{x}\,dx$

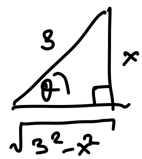
7.) $\displaystyle\int \frac{e^t}{(4-e^{2t})^{3/2}}\,dt$

8.) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2+(\ln x)^2}}\,dx$

1.) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$

① เขียนในรูป u. $\rightarrow \underline{u} = \underline{x}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{3^2-x^2}}\,dx$$



$\Rightarrow dx = 3\cos\theta\,d\theta$

- $x = 3\sin\theta$
- $\sqrt{3^2-x^2} = 3\cos\theta$

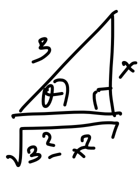
② เขียนในรูป θ.

จะได้ $\displaystyle = \int \frac{1}{(3\sin\theta)^2\,(\cancel{3\cos\theta})}\cdot\cancel{3\cos\theta}\,d\theta$

$$= \frac{1}{3^2}\int \csc^2\theta\,d\theta$$

③ อินทิเกรตในรูป θ

$$= -\frac{1}{3^2}\cot\theta + C.$$



- $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{3^2-x^2}}{x}$

④ เปลี่ยน $\theta \rightarrow x$

$$= -\frac{1}{3^2}\left(\frac{\sqrt{3^2-x^2}}{x}\right) + \underline{C}$$

7.) $\displaystyle\int \frac{e^t}{(4-e^{2t})^{3/2}}\,dt \Rightarrow \int \frac{e^t}{(2^2-(\underbrace{e^t}_{u})^2)^{3/2}}\,dt$

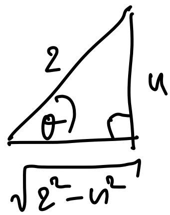
① เขียนในรูป u.

ให้ $u = e^t \Rightarrow du = e^t\,dt \Rightarrow dt = \dfrac{du}{e^t}$

จะได้

$$= \int \frac{\cancel{e^t}}{(2^2-u^2)^{3/2}} \cdot \frac{du}{\cancel{e^t}}$$

② เขียนในรูป θ.



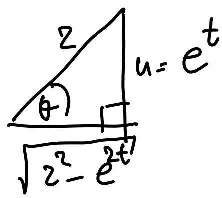
- $u = 2\sin\theta \Rightarrow du = 2\cos\theta\,d\theta$
- $\sqrt{2^2-u^2} = 2\cos\theta$

$$= \int \frac{1}{(2\cos\theta)^{\cancel{3}\,2}} \cdot \cancel{2\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \sec^2\theta\,d\theta$$

③ อินทิเกรตรูป θ

$$= \frac{1}{4}\tan\theta + C$$



- $\tan\theta = \dfrac{e^t}{\sqrt{2^2-e^{2t}}}$

④ เปลี่ยน $\theta \to t$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^t}{\sqrt{2^2-e^{2t}}}\right) + C \quad \blacksquare$$

8.) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2+(\underbrace{\ln x}_{=u})^2}}\,dx$

① เขียนในรูป u. ให้ $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \Rightarrow dx = x\,du$

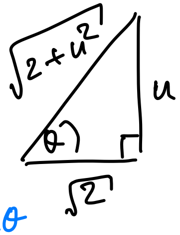
จะได้

$$= \int \frac{1}{\cancel{x}\sqrt{2+u^2}} \cdot \cancel{x}\,du$$

$\Rightarrow du = \sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta$

- $u = \sqrt{2}\tan\theta$
- $\sqrt{2+u^2} = \sqrt{2}\sec\theta$

② เขียนในรูป θ.

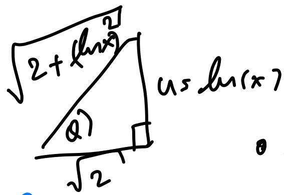


$$= \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\,\cancel{\sec\theta}} \cdot \cancel{\sqrt{2}}\sec^{\cancel{2}}\theta\, d\theta$$

③ อินทิเกรตรูป θ.

$$= \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + \underline{C}$$

④ เปลี่ยน $\theta \rightarrow x$



- $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{2+(\ln x)^2}}{\sqrt{2}}$
- $\tan\theta = \dfrac{\ln x}{\sqrt{2}}$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{2+(\ln x)^2}}{\sqrt{2}} + \frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right| + \underline{C}$$

$\Rightarrow$ การอินทิเกรตโดยแยกเศษส่วนย่อย :

รูปแบบ : $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่ $P(x), Q(x)$ เป็นโพลิโนเมียล.

ดีกรีของ $P(x)$ < ดีกรีของ $Q(x)$

([illegible])

Ex: 1) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{5x-3}{x^2-2x-3}$ ← $P(x)$ ดีกรี 1 ; ← $Q(x)$ ดีกรี 2

2.) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}$ ← ดีกรี 3 / ← ดีกรี 2

เปลี่ยนรูป หารยาว.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \boxed{2x} \leftarrow \text{ผลหาร.} \\
x^2-2x-3 & 2x^3-4x^2-x-3 \quad - \\
 & 2x^3-4x^2-6x \\ \hline
 & 0+0+\boxed{5x-3} \leftarrow \text{เศษ.}
\end{array}
$$

ดังนั้น จะสามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} = \boxed{2x} + \frac{\boxed{5x-3}}{x^2-2x-3}$$

← ดีกรี 1

← ดีกรี 2

เทคนิค: เศษส่วนย่อย. ถ้ามี $Q(x) = (x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdots(x-a_n)$

เขียน $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{(x-a_1)} + \dfrac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \dfrac{A_n}{(x-a_n)}$

Ex: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{5x-3}{\underbrace{x^2-2x-3}_{(x-3)(x+1)}} = \dfrac{5x-3}{(x-3)(x+1)} \overset{\text{เทคนิค}}{=} \dfrac{A_1}{(x-3)} + \dfrac{A_2}{(x+1)}$

สามารถเขียนได้เป็น

⇒ สิ่งที่ต้องหา คือค่าของ A_1 และ A_2 (คูณ $(x-3)(x+1)$ ตลอด)

ทำโดย. $\dfrac{5x-3}{\cancel{(x-3)(x+1)}} \cdot \cancel{(x-3)(x+1)} = \left[\dfrac{A_1}{(x-3)} + \dfrac{A_2}{(x+1)}\right] \cdot (x-3)(x+1)$

$$\Rightarrow \quad 5x-3 = A_1(x+1) + A_2(x-3)$$

จะสามารถหาค่า A_1 และ A_2 ได้ (2 แบบ.)

แบบที่ 1: เทียบสปส.

กระจาย $\quad 5x + (-3) = (A_1 + A_2)x + (A_1 - 3A_2)$

①: $A_1 + A_2 = 5$

②: $A_1 - 3A_2 = -3$

2 สมการ 2 ตัวแปร - สามารถแก้สมการได้.

① − ② $\Rightarrow 4A_2 = 8 \Rightarrow A_2 = 2$ ✓

แทนใน ① $\Rightarrow A_1 = 5 - A_2 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow A_1 = 3$ ✓

ดังนั้น:

$$\frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{A_1}{(x-3)} + \frac{A_2}{(x+1)} = \frac{3}{(x-3)} + \frac{2}{(x+1)}$$

(check! $\frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1} = \frac{3x+3+2x-6}{(x-3)(x+1)} = \frac{5x-3}{(x-3)(x+1)}$) ✓

แบบที่ 2: แทนค่าที่ตัวแปร

$$\frac{5x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{A_1}{(x-3)} + \frac{A_2}{(x+1)}$$

คูณตลอดด้วย $(x-3)(x+1)$ จะได้

$$5x-3 = A_1(x+1) + A_2(x-3) \quad \text{—— } \boxed{1}$$

เลือก

แทน $x = -1$: $5(-1) - 3 = A_1\cancelto{0}{((-1)+1)} + A_2((-1)-3)$

$\Rightarrow -8 = -4A_2 \Rightarrow A_2 = 2$

แทน $x = 3$: $5(3) - 3 = A_1(3+1) + \cancelto{0}{A_2(3-3)}$

$\Rightarrow 12 = 4A_1 \Rightarrow A_1 = 3$

ดังนั้น $\dfrac{5x-3}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{A_1}{(x-3)} + \dfrac{A_2}{(x+1)} = \dfrac{3}{(x-3)} + \dfrac{2}{(x+1)}$ ✓

สรุป ถ้า ตน. รากกรณีไม่ซ้ำ

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{P(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}dx$$

(เศษส่วนย่อย)

$$= \int \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}dx$$

$$= A_1\ln|x-a_1| + \cdots + A_n\ln|x-a_n| + \underline{C}$$

Ex: $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{5x-3}{(x-3)(x+1)}dx$

[*** เทคนิค ***] ① เขียนในรูปเศษส่วนย่อย.

$$= \int \frac{A_1}{(x-3)} + \frac{A_2}{(x+1)}dx$$

② หาค่า unknowns.

(หา A_1, A_2)

$A_1 = 3,\ A_2 = 2$

$$= \int \frac{3}{(x-3)} + \frac{2}{(x+1)}dx$$

$$= 3\ln|x-3| + 2\ln|x+1| + \underline{\underline{c}} \quad \blacksquare$$

⇒ เทคนิคการเขียนในรูปเศษส่วนย่อย:

① $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} = \boxed{\frac{A_1}{(x-a_1)}} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a_n)}$$

② กรณีที่ $Q(x) = (x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_n)^{m_n}$

จะสามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a_1)^{m_1}\cdots(x-a_n)^{m_n}}$$

$$= \boxed{\frac{A_{11}}{(x-a_1)^1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-a_1)^{m_1}}} + \boxed{\frac{A_{21}}{(x-a_2)^1} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2m_2}}{(x-a_2)^{m_2}}}$$

$$+ \cdots + \boxed{\frac{A_{n1}}{(x-a_n)^1} + \cdots + \frac{A_{nm_n}}{(x-a_n)^{m_n}}}$$

<u>Ex</u>: $$\frac{P(x)}{\underbrace{(x-1)^2}_{①}\underbrace{(x+2)^3}_{②}\cdot\underbrace{(x+3)}_{③}}$$

โดยจะมี unknowns 6 ตัวด้วย ($A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}$)

รวมกัน ทั้งหมดได้ 6 ตัว.

$$= \underbrace{\boxed{\frac{A_{11}}{(x-1)} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2}}}_{①} + \underbrace{\boxed{\frac{A_{21}}{(x+2)} + \frac{A_{22}}{(x+2)^2} + \frac{A_{23}}{(x+2)^3}}}_{②}$$

$$+ \frac{A_{31}}{(x+3)}$$

③: $Q(x)$ มีเทอมที่เป็นตัวประกอบกำลังสองซ้ำในรูป $(\underline{x^2+bx+c})^m$

จะสามารถ เขียน อยู่ในรูปผลรวมในรูป

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\cdots\underline{(x^2+bx+c)}} = \cdots + \boxed{\frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+bx+c)} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{B_{1m}x+C_{1m}}{(x^2+bx+c)^m}} + \cdots$$

(*)

Ex:
$$\frac{P(x)}{\underbrace{(x-1)^2}_{1}\underbrace{(x^2+x+1)^2}_{2}\underbrace{(x+2)}_{3}} = \underbrace{\boxed{\frac{A_{11}}{(x-1)} + \frac{A_{12}}{(x-1)^2}}}_{1} + \underbrace{\boxed{\frac{B_{21}x+C_{21}}{(x^2+x+1)} + \frac{B_{22}x+C_{22}}{(x^2+x+1)^2}}}_{2} + \underbrace{\boxed{\frac{A_{31}}{(x+2)}}}_{3}$$

Ex: จงหา $\displaystyle\int \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^4+x^2}\,dx$ ← ตัวเศษ 3 ← ตัวส่วน 4 ✓

วิธีทำ.
$$= \int \frac{5x^3-3x^2+2x-1}{x^2(x^2+1)}\,dx$$

① เขียนในรูป เศษส่วนย่อย.

พิจารณา

$$\frac{5x^3-3x^2+2x-1}{\underbrace{x^2}_{①}\underbrace{(x^2+1)}_{②}} = \underbrace{\frac{A_{11}}{x}+\frac{A_{12}}{x^2}}_{①} + \underbrace{\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+1}}_{②}$$

มี unknowns คือ $A_{11}, A_{12}, B_{21}, C_{21}$ (4 ตัว)

คูณตลอดด้วย $x^2(x^2+1)$ จะได้

$$5x^3-3x^2+2x-1 = \overbrace{A_{11}x(x^2+1)}^{A_{11}(x^3+x)} + A_{12}(x^2+1) + \underbrace{(B_{21}x+C_{21})x^2}_{B_{21}x^3+C_{21}x^2}$$

แทนค่าเพื่อหาบางตัว:

⇒ แทนค่า: $x=0$

⇒ $-1 = 0 + A_{12}(0+1) + 0$ ⇒ $A_{12} = -1$

⇒ แทนค่า: $x=$ (แทนค่าแล้วไม่สวย)

เทียบสปส:

② หา unknowns

$$\underline{5}x^3 \underline{-3}x^2 + \underline{2}x \underline{-1} = \underline{(A_{11}+B_{21})}x^3 + \underline{(A_{12}+C_{21})}x^2 + \underline{A_{11}}x + \underline{A_{12}}$$

① ② ③ ④

เทียบสปส: จะได้

① $A_{11}+B_{21} = 5$ ⇒ (แทน ③) $B_{21} = 5 - A_{11} = 5-2 = 3$

② $A_{12}+C_{21} = -3$ ⇒ (แทน ④) $C_{21} = -3 - A_{12} = -3-(-1) = -2$

③ $A_{11} = 2$

④ $A_{12} = -1$

ดังนั้น $A_{11} = 2$, $A_{12} = -1$, $B_{21} = 3$, $C_{21} = -2$

จะได้ว่า

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_{11}}{x} + \frac{A_{12}}{x^2} + \frac{B_{21}x + C_{21}}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{3x - 2}{x^2+1}$$

ดังนั้น
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{3x-2}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + 3\int \frac{x}{\underbrace{x^2+1}_{u}}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| - \left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{3}{2}\ln|x^2+1| - 2\arctan(x) + \underline{\underline{C}}$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 3.7

2.) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}\,dx$

3.) $\displaystyle\int \frac{9x^2 - 3x + 1}{x^3 - x^2}\,dx$