การบ้าน : แบบฝึกหัด 3.4 : Integration by parts

6.) $\int \sin x \ln(\cos x)\,dx$

8.) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

9.) $\int (\ln x)^2\,dx$

11). $\int \frac{x e^x}{(x+1)^2}\,dx$

By parts

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

6.) $\int \underbrace{\sin x \ln(\cos x)\,dx}_{dv}$, $\underbrace{\ln(\cos x)}_{u}$

$u = \ln(\cos x)$

$\int dv = \int \sin\,dx$

$v = -\cos x$

by parts

$= \ln(\cos x)(-\cos x) - \int(-\cos x)\,\underbrace{d\ln(\cos x)}_{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)\,dx}$

$= -\ln(\cos x)\cos x - \int \cancel{\cos x}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos x}}\cdot \sin x\,dx$

$= -\ln(\cos x)\cos x + \cos x + C$

8.) $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{x e^{x^2}\,dx}_{dv}$

$u = x^2$

$\int dv = \int x e^{x^2}\,dx$

$v = \frac{e^{x^2}}{2}$

by parts

$= (x^2)\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right) - \int\left(\frac{e^{u}}{2}\right)d\underbrace{x^2}_{u}$

$$= x^2\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right) - \int \frac{e^u}{2}\,du \qquad \Big|\; u = x^2$$

$$= \frac{x^2 \cdot e^{x^2}}{2} - \frac{1}{2}e^u + C = \frac{x^2 \cdot e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C \quad \blacksquare$$

[illegible]

9.) $$\int \underbrace{(\ln x)^2}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} \qquad \Bigg|\; \begin{array}{l} u = (\ln x)^2 \\ \int dv = \int dx \\ v = x \end{array}$$

by parts

$$= (\ln x)^2 \cdot x - \int x\, \underbrace{d(\ln(x))^2}_{2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx}$$

$$= (\ln x)^2 x - 2\int \cancel{x}\, \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,\underbrace{dx}_{dv} \qquad \Bigg|\; \begin{array}{l} u = \ln x \\ \int dv = \int dx \\ v = x \end{array}$$

by parts

$$= (\ln x)^2 \cdot x - 2\left[(\ln x)\cdot x - \int \cancel{x} \cdot \underbrace{d(\ln x)}_{\frac{1}{\cancel{x}}dx}\right]$$

$$= (\ln x)^2 \cdot x - 2\left[(\ln x)\cdot x - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx\right]$$

$$= (\ln x)^2 \cdot x - 2\left[(\ln x)\cdot x - x\right] + C \quad \blacksquare$$

11.) $$\int \frac{x e^x}{(x+1)^2}\,dx \qquad \Bigg|\; \begin{array}{l} u = \frac{x}{(x+1)^2} \\ \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array}$$

by parts

$$= \left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)\cdot e^x - \int e^x \, d\underbrace{\left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)}_{\frac{(x+1)^2 1 - x2(x+1)}{(x+1)^4}}$$

X

ลอง ใช้. $u = xe^x$

$$\int dv = \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{(x+1)}$$

by parts

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = (xe^x)\cdot\left(\frac{-1}{(x+1)}\right) - \int \frac{-1}{(x+1)}\,\underbrace{d(xe^x)}_{(xe^x+e^x)dx}$$

$$= (xe^x)\left(\frac{-1}{x+1}\right) + \int \frac{xe^x + e^x}{(x+1)}\,dx$$

$$= (xe^x)\left(\frac{-1}{x+1}\right) + \int \frac{e^x\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}\,dx$$

$$= -\frac{(xe^x)}{(x+1)} + e^x + C$$

$\Rightarrow$ การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ.

$\Rightarrow$ รูปแบบ. $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx \rightarrow$

① m เป็นคี่ (n อะไรก็ได้)

② n เป็นคี่ (m อะไรก็ได้)

③ m & n เป็นคู่

Ex: แบบ 1: จงหา $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

① ให้ $u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$dx = \dfrac{du}{-\sin x}$

จะได้ แทน u

เหลือ

$$\int \sin^2 x \cdot \cancel{\sin x} \cdot \cos^2 x \, \frac{du}{-\cancel{\sin x}}$$

② ใช้สูตร

$\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$

(เปลี่ยน sin → cos)

$$= -\int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \, du$$

$(u = \cos x)$

$$= -\int (1-u^2) \cdot u^2 \, du = -\int u^2 - u^4 \, du$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

แทน u กลับ.

Ex: (แบบ 1.)

$$\int \sin^5 x \cdot \cos x \, dx$$

① ให้ $u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$dx = \dfrac{du}{-\sin x}$

เหลือ

$$= \int \underbrace{\sin^4 x}_{(\sin^2 x)^2} \cdot \cancel{\sin x} \cdot \cos x \, \frac{du}{-\cancel{\sin x}}$$

② เปลี่ยน sin → cos

$\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$

$$= -\int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \cos x \, du$$

$(u = \cos x)$

$$= -\int (1-u^2)^2 \cdot u \, du$$

$$= -\int (1 - 2u^2 + u^4) \cdot u \, du$$

$$= -\left(\frac{u^2}{2} - \frac{2u^4}{4} + \frac{u^6}{6} \right) + C$$

แทน u กลับ. $= -\dfrac{\cos^2 x}{2} + \dfrac{\cos^4 x}{2} + \dfrac{\cos^6 x}{6} + C$

สรุป: แบบที่ 1: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, m เลขคี่

① ให้ $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\, dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{-\sin x}$

จะได้ $\int \sin^{m-1} x \cdot \cancel{\sin x} \cos^n x \dfrac{du}{\cancel{-\sin x}}$ ← เลขคู่

⇒ สามารถเขียน $\sin^{m-1} x$ ในรูป $(\sin^2 x)^k$, $k = \dfrac{m-1}{2}$

② แทน $\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}$ เปลี่ยน sin → cos.

จะได้ $\int (1-\underbrace{\cos^2 x}_{u})^{\left(\frac{m-1}{2}\right)} \cdot \underbrace{\cos^n x}_{u} \, du$

$= \int (1-u^2)^{\left(\frac{m-1}{2}\right)} u^n \cdot du$ (รูปแบบอินทิเกรตได้)

ใช้หลักการเดียวกับแบบที่ 2 :

Ex: จงหา $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

① ให้ $u = \sin x$
$du = \cos x \, dx$
$dx = \dfrac{du}{\cos x}$

จะได้ $= \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cancel{\cos x} \dfrac{du}{\cancel{\cos x}}$ ← เลขคู่

ให้ ② $\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$ $(u = \sin x)$

$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)\, du$

$= \int u^2 (1-u^2)\, du = \int u^2 - u^4 \, du$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$$

แทน u กลับ.

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C \quad \blacksquare$$

รูปแบบที่ 2: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, n เป็นเลขคี่.

เลขคู่.

① ใช้ $u = \sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$ ทำให้ $\cos^{n-1} x$

② ใช้ $\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$ เปลี่ยน $\cos x \to \sin x$

จะได้. $\int \sin^m x (\cos^2 x)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} dx = \int \underbrace{\sin^m x}_{u} \left(1 - \underbrace{\sin^2 x}_{u}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} dx$

สามารถอินทิเกรตได้.

รูปแบบที่ 3: m และ n เป็นเลขคู่.

ใช้สูตร.

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}} \quad — (*)$$

เปลี่ยนให้อยู่ในรูป $\cos(nx)$ แล้วอินทิเกรต.

Ex: จงหา $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$

ใช้ $(*)$ $= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) dx$

$$= \frac{1}{4}\int 1-\cos^2(2x)\,dx \qquad \Big| \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int 1-\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\cdot 4}\int \frac{1}{\cancel{2}} + \frac{\cos(4x)}{\cancel{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin(4x)}{4}\right) + C$$

$u = 4x$

$du = 4dx$

$$\int \cos(\underbrace{4x}_{u})\,dx$$

$$= \int \cos(u)\,\frac{du}{4}$$

$$= \frac{\sin(4x)}{4} + C$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถ ปรับ ใช้กับรูปแบบ.

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

โดยใช้ความสัมพันธ์ :

- $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$
- $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

และ

$$d\tan x = \sec^2 x\,dx$$

$$d\sec x = \sec x\tan x\,dx$$

Ex: $\displaystyle\int \sec^3 x \tan x\,dx$

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x\,dx$

$$dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$= \int \sec^{\cancel{3}\,2} x\,\cancel{\tan x}\,\frac{du}{\cancel{\sec x}\,\cancel{\tan x}}$$

แทนกลับ

$$= \int \underbrace{\sec^2 x}_{u^2}\,du = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sec^3 x}{3} + C$$

→ รูปแบบ

จำ

- $$\int \sin(mx)\cos(nx)\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right) dx$$
- $$\int \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right) dx$$
- $$\int \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \int \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right) dx$$

จาก. ⇒ $\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\sin((m-n)x) + \sin((m+n)x)$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b. \quad \text{——— (1)}$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos(-b) - \cos(a)\sin(-b)$$

$$= +\sin a\cos b + \cos(a)\sin b \quad \text{——— (2)}$$

$(\sin(-\theta) = -\sin\theta)$

$(\cos(-\theta) = +\cos\theta)$

(1) + (2) ⇒ $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$.

Ex: จงหา. $\int \sin 3x\cos 5x\,dx$

จาก. $\boxed{\sin(mx)\cdot\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\right)}$

จะได้ $= \frac{1}{2}\int \sin(3+5)x + \sin(3-5)x\,dx$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(8x)\, dx + \int \sin(-2x)\, dx$$

$$= \frac{-\cos(8x)}{2 \cdot 8} + \frac{-\cos(-2x)}{2 \cdot (-2)} + C \qquad \blacksquare$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 3.5.

2.) $\int \sin^5(2x) \cos(2x)\, dx$

4.) $\int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\, dx$

6.) $\int \sin^4(2\theta)\, dx$

10.) $\int (\sin x + \cos x)^2\, dx$