การบ้าน: แบบฝึกหัด 3.3: หาค่าอินทิกรัล.

3.) $\int \frac{1}{x}\operatorname{cosec}^2(\ln x)\,dx$

11.) $\int \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$

14.) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

แบบฝึกหัด: 3.2

อินทิกรัลที่จำกัดเขต

1.) $\int_1^4 \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$

5.) $\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx$

การบ้าน:

1.) $\int_1^4 \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt = \int_{t=1}^{t=4} t^{-\frac{3}{2}}\,dt = \left(\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{\left(-\frac{3}{2}+1\right)}\right)\Bigg|_{t=1}^{t=4}$

$= \left(-2t^{-\frac{1}{2}}\right)\Big|_{t=1}^{t=4} = \left(-2\cdot 4^{-\frac{1}{2}}\right) - \left(-2\cdot 1^{-\frac{1}{2}}\right)$

$= \frac{-2}{2} + 2 = -1+2 = 1$ ∎

5.) $\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx$, $(1-|x|) = \begin{cases} 1-(-x) & , x<0 \\ 1-x & , x\geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx = \int_{-1}^{0} 1+x\,dx + \int_{0}^{1} 1-x\,dx$

$= \left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=-1}^{x=0} + \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$

$= \left[(0)-\left(-1+\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-0\right] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$ ∎

3.) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\operatorname{cosec}^2(\underbrace{\ln x}_{u})\,dx$

$u = \ln x$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \boxed{dx = x\,du}$

แทน u $\Rightarrow$ $\displaystyle\int \frac{1}{\cancel{x}}\operatorname{cosec}^2(u)\,\cancel{x}\,du = -\cot(u) + C$

แทน u กลับ. $= -\cot(\ln x) + C$

11.) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx \overset{\text{จัดรูป}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{\underbrace{4-(2x-1)^2}}}\,dx$

$4-(4x^2-4x+1)$

$= 3+4x-4x^2$

สูตร $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

$\overset{\text{จัดรูป}}{=} \displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\underbrace{\frac{2x-1}{2}}_{=u}\right)^2}}\,dx$

ให้ $u = \dfrac{2x-1}{2}$

$\dfrac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$

แทน u $\displaystyle= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\arcsin(u) + C$

แทน u กลับ. $\displaystyle= \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{2}\right) + C$

14.) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

$u = \ln x$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$

แทน u $= \int \frac{u^2}{\cancel{x}} \cancel{x}\, du = \frac{u^3}{3} + C \underset{\text{แทน u กลับ.}}{=} \frac{(\ln x)^3}{3} + C$ ∎

⇒ การอินทิเกรตโดยการแบ่งส่วน (Integration by parts)

ดิฟ และ สูตร. $\int 1\, d(uv) = \int u\, dv + \int v\, du$

$$\Rightarrow \quad uv = \int u\, dv + \int v\, du$$

รูปนี้. เทคนิค by parts

$$\boxed{\int \underbrace{u}_{①} \underbrace{dv}_{②} = uv - \int v\, du}$$

เลือก u และ dv.

Ex: $\int \ln x\, dx$

① $u = \ln x$
② $\int dv = \int dx$
$v = x$

③ [by parts : $\int u\,dv = uv - \int v\,du$]

$$= (\ln x)(x) - \int x\, \underbrace{d(\ln x)}_{\frac{1}{x}dx}$$

$$= x\ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx = x\ln x - x + C$$ ∎

(check: $\frac{d}{dx}(x\ln x - x + C) = \cancel{x \cdot \frac{1}{x}} + \ln x\,(1) \cancel{- 1} + 0$
$= \ln x$ ∎ ✓)

Ex: Fun. $\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^{-x}\,dx}_{dv}.$

$u = x$

$\int dv = \int e^{-x}dx$

$v = -e^{-x}$

[by parts: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$]

$$= x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})\,dx$$

$$= -xe^{-x} + (-e^{-x}) + C \quad \boxtimes$$

check: $\frac{d}{dx}\left(-xe^{-x} + (-e^{-x}) + C\right)$

$$= (-x)e^{-x}(-1) + \cancel{e^{-x}(-1)} + \cancel{e^{-x}} + 0$$

$$= xe^{-x} \quad \checkmark \quad \boxtimes$$

Ex: Fun. $\int \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{e^{x}\,dx}_{dv}$

$u = x^2$

$\int dv = \int e^{x}dx$

$v = e^{x}$

by parts

$$= (x^2)(e^x) - \int e^x \underbrace{dx^2}_{2x\,dx}$$

$$= x^2e^x - 2\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv}$$

$u = x$

$\int dv = \int e^x dx$

$v = e^x$

by parts

$$= x^2e^x - 2\left[x\cdot e^x - \int e^x\,dx\right]$$

$$= x^2e^x - 2\left[xe^x - e^x\right] + C \quad \boxtimes$$

Ex: $\displaystyle\int \underbrace{e^{x}dx}_{dv}\,\underbrace{\cos(3x)}_{u}$

$$\begin{aligned} u &= \cos(3x) \\ \int dv &= \int e^{x}dx \\ v &= e^{x} \end{aligned}$$

[by parts: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$]

$$\underline{\int \cos(3x)e^{x}dx} = \cos(3x)e^{x} - \int e^{x}\,\underbrace{d\cos(3x)}_{= -3\sin(3x)\,dx}$$

$$= (\cos 3x)e^{x} + 3\int \underbrace{\sin(3x)}_{u}\,\underbrace{e^{x}dx}_{dv}$$

$$\begin{aligned} u &= \sin 3x \\ \int dv &= \int e^{x}dx \\ v &= e^{x} \end{aligned}$$

by parts.

$$= \cos(3x)e^{x} + 3\left[\sin(3x)e^{x} - \int e^{x}\,\underbrace{d\sin(3x)}_{=3\cos(3x)\,dx}\right]$$

$$= \cos(3x)e^{x} + 3\sin(3x)e^{x} - 9\underline{\int \cos(3x)e^{x}dx}$$

ดังนั้น.

$\Rightarrow$

$$\int \cos(3x)e^{x}dx = \frac{1}{10}\left[\cos(3x)e^{x} + 3\sin(3x)e^{x}\right] + C$$

แบบฝึกหัด 3.4)

3.) หา. $\displaystyle\int \underbrace{\arctan x}_{u}\;\underbrace{dx}_{dV}$

$$\begin{aligned} u &= \arctan x \\ \int dv &= \int dx \\ v &= x \end{aligned}$$

by parts.

$$= x\arctan x - \int x\,\underbrace{d\arctan x}_{\frac{1}{1+x^{2}}dx}$$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{\underbrace{1+x^2}_{u}}\,dx \qquad \left|\; u = 1+x^2,\quad \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}\right.$$

แทนu

$$= x\arctan x - \int \frac{\cancel{x}}{u}\,\frac{du}{2\cancel{x}}$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

แทน u กลับ.

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

<u>การบ้าน</u>: แบบฝึกหัด 3.4

6.) $\int \sin x \ln(\cos x)\,dx$

8.) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

10.) $\int e^x \arcsin(e^x)\,dx$

11.) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

⇒ การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติ..

ในรูป: $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, m,n เป็นจำนวนเต็ม ที่ไม่เป็นลบ.

แบ่งได้ 3 กรณี

1. m เป็นคี่, n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ.
2. n เป็นคี่, m เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ
3. m และ n เป็นจำนวนคู่.

Ex: แบบ 1: $\int \sin^{3} x \cos^2 x \, dx$ (m)

① $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$

② แล้วใช้ identity เปลี่ยน sin → cos

$\boxed{\sin^2 x = (1-\cos^2 x)}$

$$= \int \sin^2 x \cdot \cancel{\sin x} \cos^2 x \frac{du}{-\cancel{\sin x}}$$

$$= -\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, du$$

จาก. $\sin^2 x = (1-\cos^2 x)$

$$= -\int (1-\cos^2 x) \cdot \cos^2 x \, du$$

$u = \cos x$

$$= -\int (1-u^2) \cdot u^2 \, du = -\int u^2 - u^4 \, du$$

$$= -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C$$

แทน u กลับ

$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

⇒ สังเกต ใน แบบที่ ①: m เป็นเลขคี่ ใน $\int \sin^m x \cos^n x \cdot dx$

วิธีทำ:
- ใช้ $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx$, $dx = \frac{du}{-\sin x}$
- ใช้ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ เปลี่ยน sin เป็น cos ทั้งหมด

แบบที่ 2: n เป็นเลขคี่

Ex: $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

① $u = \sin x$

$du = \cos x \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx$$

แทน u

$$= \int u^2 \cos^2 x \, \cancel{\cos x} \frac{du}{\cancel{\cos x}}$$

เปลี่ยน $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$

$$= \int u^2(1-u^2)\,du = \int u^2 - u^4\,du$$

$$= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \underset{(\text{แทนค่ากลับ})}{=} \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

⇒ ส่วนนี้ใน <u>แบบที่ 2</u> : n เป็นจำนวนคี่ ใน $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

- ให้ $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$
- เปลี่ยน $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

<u>แบบที่ 3</u>: m และ n เป็นจำนวนคู่

⇒ เปลี่ยนให้อยู่ในรูป cos ทั้งหมด โดยใช้

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

<u>Ex</u>: จงห. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\,dx$

$$= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 - \cos^2(2x)\,dx \qquad \Bigg|\ \cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int 1 - \frac{1+\cos(4x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2} - \frac{\cos(4x)}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1 - \cos(4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\underbrace{\int 1\,dx}_{=x} - \int \cos(\underset{u}{4x})\,dx\right]$$

$u = 4x$
$du = 4\,dx$
$dx = \frac{du}{4}$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{\sin(4x)}{4}\right] + C$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 3.5.)

2.) $\int \sin^5(2x)\cos(2x)\,dx$

5.) $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$

6.) $\int \sin^4(2\theta)\,d\theta$.