⇒ อินทิกรัล

→ อินทิกรัลไม่จำกัดเขต — กำหนด $f(x)$ หา ...

(อินเวอร์สของการดิฟ.)

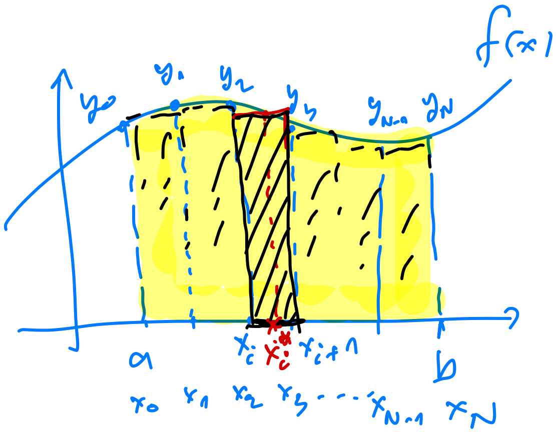
• $\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{อินทิกรัลไม่จำกัดเขต}} = F(x) + \underbrace{C}_{\text{ค่าคงที่}}$

→ อินทิกรัลจำกัดเขต

(พื้นที่ใต้กราฟ.)

• ปัญหาค่าเริ่มต้น หา $y(x)$ ที่

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



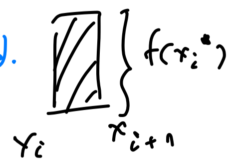
แบ่ง $[a,b]$ เป็น N ช่วง เท่าๆ กัน

ได้จุด $x_0, \dots, x_N$

พิจารณา บนช่วง $[x_i, x_{i+1}]$

เลือก $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$

⇒ จะได้พื้นที่ย่อย.



$$\Rightarrow \Delta A_i = \underbrace{(x_{i+1} - x_i)} f(x_i^*) = \Delta x_i f(x_i^*)$$

จะได้ พท. โดยประมาณ

$$A_{ab} \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

⇒ เมื่อ $\lim N \to \infty$ จะได้ $(h \to 0)$

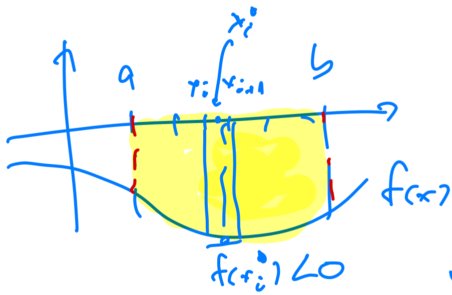
$$A_{ab} = \lim_{\substack{N \to \infty \\ (h \to 0)}} \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

(Riemann Sum)

สามารถเขียนได้เป็น: พท. ใต้กราฟ f(x) จาก a ถึง b ด้วย

$$\boxed{A_{ab} = \int_a^b f(x)\,dx} \quad , \; f(x) \geq 0$$

ถ้า: $f(x) \leq 0$. ค่าของ อินทิกรัล จะเป็น ลบ.



$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(x_i)\Delta x_i}_{<0}$$

ยังคงเป็นลบ.

หมายเหตุ: ถ้ากล่าวถึง พท. ใต้กราฟ (ต้องมีค่าเป็น +)

ดังนั้น ถ้า $f(x) \leq 0$ บน $[a,b]$ จะได้

พท. ใต้กราฟ. $A_{ab} = -\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{<0}$

ทบ: (ทบ. หลักมูลของแคลคูลัส.)

ถ้า f เป็น ฟ. ต่อเนื่อง บน $[a,b]$ และ F เป็น ปฏิยานุพันธ์ ของ f บน $[a,b]$ แล้ว

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

พท. ใต้กราฟ.

ได้จาก อินทิกรัล ไม่จำกัดเขต.

$\Rightarrow$ พท. $\int_a^b f(x)\,dx$ อินทิกรัลจำกัดเขต.

① หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต. $\Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x)+C$

② ใช้ ทบ.หลักมูล. $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)+C \Big|_a^b$

$$= (F(b)+\cancel{C}) - (F(a)+\cancel{C})$$

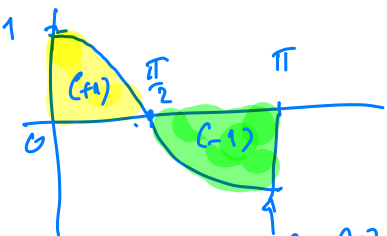
$$= F(b) - F(a) \quad \boxtimes$$

Ex: จงหาอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้.

1) $\int_0^\pi \cos(x)\,dx$

① หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

② ทบ.หลักมูล. $\int_0^\pi \cos(x)\,dx = \sin x + C \Big|_{x=0}^{x=\pi}$



$$= (\sin\pi + C) - (\sin(0) + C)$$

$$= (0+C) - (0+C) = 0. \quad \boxtimes$$

ถ้าแยกพิจารณา:

$$\int_0^\pi \cos(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,dx$$

$$= \sin x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}$$

$$= (\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{=1} - \underbrace{\sin 0}_{=0}) + (\underbrace{\sin\pi}_{=0} - \underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2}}_{=1})$$

$$= 1 + (-1) = 0$$

<u>สมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต:</u>

① $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

② $\displaystyle\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

③ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a<c<b$

④ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Ex: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = -\int_1^0 f(x)\,dx$

⑤ $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

⑥ ถ้า $f(x) \geq 0$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$
บน $[a,b]$

⑦ ถ้า $f(x) \geq g(x)$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$
บน $[a,b]$

Ex: จงหา $\int_1^4 \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\,dx$

① หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\int \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\,dx$

จะได้ $= \frac{3}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx - 4\int x^{-2}dx$

(สูตร) $= \cancel{\frac{3}{2}}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\cancel{\frac{3}{2}}} + 4\,\frac{x^{(-1)}}{\cancel{(-1)}} + C$

จะได้ $\int \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\,dx = \underbrace{x^{\frac{3}{2}} + 4x^{-1}}_{F(x)} + C$

② ทบ. หลักมูล จะได้

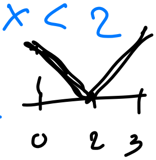
$$\int_1^4 \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\,dx = \left(x^{\frac{3}{2}} + 4x^{-1}\right)\Big|_{x=1}^{x=4}$$

$$= \left(4^{\frac{3}{2}} + 4\cdot 4^{-1}\right) - \left(1^{\frac{3}{2}} + 4\cdot 1^{-1}\right)$$

$$= (8+1) - (1+4) = 9 - 5 = 4 \quad \blacksquare$$

Ex: จงหา $\int_0^3 |x-2|\,dx$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$$



$$\to \int_0^3 |x-2|\,dx = \underbrace{\int_0^2 -(x-2)\,dx}_{①} + \underbrace{\int_2^3 (x-2)\,dx}_{②}$$

① $\displaystyle\int_0^2 -(x-2)\,dx = -\int_0^2 (x-2)\,dx$

② $\displaystyle\int_2^3 (x-2)\,dx$

⇒ พิจารณา อินทิกรัล ไม่จำกัดเขต.

$$\int (x-2)\,dx = \int x\,dx - \int 2\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2} - 2x}_{F(x)} + C$$

ดัง. $\displaystyle\int_0^3 |x-2|\,dx = -\int_0^2 (x-2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$

$$= -\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{x=2}^{x=3}$$

$$= -\left[\left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{2}} - 2\cdot 2\right) - \underbrace{\left(\frac{0}{2} - 2\cdot 0\right)}_{=0}\right] + \left[\left(\frac{3^2}{2} - 2\cdot 3\right) - \left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{2}} - 4\right)\right]$$

$$= -(-2) + \left[\left(\frac{9}{2} - 6\right) + 2\right]$$

$$= 2 + \left[\frac{9 - 12 + 4}{2}\right] = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

⇒ การอินทิเกรต โดยการเปลี่ยนตัวแปร:

$$\int f(g(x))\,\underbrace{g'(x)\,dx} = \int f(\overbrace{g(x)}^{u})\,d\overbrace{g(x)}^{u}$$

$$= \int f(u)\,du, \quad \underline{u = g(x)}$$

Ex: $\displaystyle\int (x^2+2x-3)^5 (x+1)\, dx$, $u(x) = x^2+2x-3$

u

[illegible] x [illegible] u.

[illegible]

$\dfrac{du}{dx} = 2x+2$

$\Rightarrow du = (2x+2)dx$

[illegible] $\boxed{dx = \dfrac{du}{(2x+2)}}$

[illegible] $u = x^2+2x-3$

$\Rightarrow \displaystyle\int u^5 \cancel{(x+1)} \frac{du}{2\cancel{(x+1)}}$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{u^5}{2} du = \frac{u^6}{6 \cdot 2} + C$

([illegible] $u = x^2+2x-3$) $= \dfrac{(x^2+2x-3)^6}{12} + C$

Ex: $\displaystyle\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$, $\cos x = u$

$u(x) = \cos(x)$

$\dfrac{du}{dx} = -\sin(x)$

$\boxed{dx = \dfrac{-du}{\sin x}}$

[illegible] $= \displaystyle\int \frac{\cancel{\sin x}}{u} \cdot \frac{-du}{\cancel{\sin x}}$

$= \displaystyle -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = \ln\left|\frac{1}{u}\right| + C$

$(u = \cos x)$ $= \ln\left|\dfrac{1}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x| + C$

Ex: $\displaystyle\int \sec x\, dx.$, $u(x) = \sec x + \tan x$

$\dfrac{du}{dx} = \sec x \tan x + \sec^2 x$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x \tan x + \sec^2 x}$$

$\Rightarrow$ [illegible]. $\int \sec x \, dx = \int \sec x \, \frac{du}{\sec x \tan x + \sec^2 x}$

$$= \int \frac{\cancel{\sec x} \, du}{\cancel{\sec x}(\underbrace{\tan x + \sec x}_{=u})} = \int \frac{1}{u} \, du$$

$$= \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$(u = \sec x + \tan x)$

Ex: $\int \frac{y}{\sqrt{1-y^4}} \, dy$, $u = y^2 \Rightarrow \frac{du}{dy} = 2y \Rightarrow dy = \frac{du}{2y}$

[illegible] $\Rightarrow \int \frac{\cancel{y}}{\sqrt{1-y^4}} \frac{du}{2\cancel{y}}$, $u = y^2 \Rightarrow y^4 = u^2$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \, du = \frac{1}{2} \arcsin(u) + C$$

[illegible] u. $= \frac{1}{2} \arcsin(y^2) + C$ ■

Ex: [illegible]. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$, $u = e^x$, $\frac{du}{dx} = e^x$

$dx = \frac{du}{e^x}$

แทน $\Rightarrow \displaystyle\int \frac{\cancel{e^x}}{1+e^{2x}} \frac{du}{\cancel{e^x}}$, ถ้า $u = e^x$

จะได้ $e^{2x} = u^2$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+u^2}\, du = \arctan(u) + C$$

(แทน u) $= \arctan(e^x) + C$ $\blacksquare$

Ex: หา. $\displaystyle\int \sqrt{2x-1}\, dx$

แบบ 1: $u = 2x-1$, $\dfrac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \dfrac{du}{2}$

แทน $\Rightarrow \displaystyle\int \sqrt{2x-1}\, dx = \int \sqrt{u}\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\, du$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}} + C = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

(แทน u) $= \dfrac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$ $\blacksquare$ ✓

แบบที่2: $u = \sqrt{2x-1}$, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} \cdot 2 \Rightarrow dx = \sqrt{2x-1}\, du$

แทน $\Rightarrow \displaystyle\int \underbrace{\sqrt{2x-1}}_{u} \cdot \underbrace{\sqrt{2x-1}}_{u}\, du = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C$

(แทน u) $= \dfrac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}{3} + C$ $\blacksquare$ ✓

การบ้าน: แบบฝึกหัด 3.3: หาอินทิกรัล.

3.) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\operatorname{cosec}^2(\ln x)\,dx$

11.) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$

14.) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

แบบฝึกหัด: 3.2

อินทิกรัลจำกัดเขต

1.) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$

5.) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx$