⇒ อินทิกรัล

→ อินทิกรัลแบบไม่จำกัดเขต. ⇒ ใช้ $f(x)$ หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

(อินเวอร์สของการดิฟ.)

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

(เรียนจากการดิฟ.)

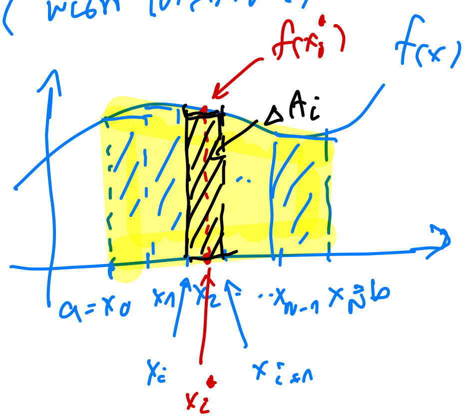
→ อินทิกรัลจำกัดเขต. ⇒ ปัญหาค่าเริ่มต้น.

หา $y(x)$ ที่รองรับเงื่อนไข

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \Rightarrow y(x) = F(x) + C \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

— (เงื่อนไขเริ่มต้น (หาค่า C.))

(พื้นที่ใต้กราฟ.)



• แบ่ง $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อย N ช่วง ด้วยจุด $x_0, x_1, \dots, x_N$

• พิจารณาช่วง $[x_i, x_{i+1}]$

เลือก $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$

จะได้ ▯ กว้าง $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ สูง $f(x_i^*)$

⇒ $\Delta A_i = f(x_i^*)\Delta x_i$

จะได้. $A_{ab} \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta A_i$

พท. จาก a ถึง b

$$= \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*)\Delta x_i \qquad \text{Riemann Sum.}$$

จะได้ (จาก lim.)

$$A_{ab} = \lim_{\substack{N \to \infty \\ (h \to 0)}} \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x_i$$

สัญลักษณ์.

$$\boxed{A_{ab} = \int_a^b f(x)\,dx}$$

ทบ: (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บน $[a,b]$ แล้ว

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,d(x)}_{\substack{\text{พื้นที่ใต้กราฟ}\\\text{(อินทิกรัลที่จำกัดเขต)}}} = \underbrace{F(x)}_{\substack{\text{อินทิกรัลของกราฟ}\\\text{(อินทิกรัลไม่จำกัดเขต)}}}\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ex: หาอินทิเกรตจำกัดเขต

1.) $\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx$

- หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\int \cos(x)\,dx$

$$\Rightarrow \int \cos x\,dx = \underbrace{\sin x}_{F(x)} + C$$

- ทบ. มูลฐาน.

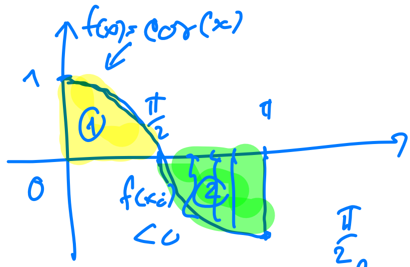
$$\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx = (\sin x + C)\Big|_0^{\pi}$$

$$= (\sin(\pi) + \cancel{C}) - (\sin(0) + \cancel{C})$$

$$= 0 - 0 = 0$$

ข้อสังเกต ถ้า $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ แล้ว $f(x)$ ไม่จำเป็นต้องเป็น 0.

พิจารณา.



⇒ พท.ใต้กราฟ.

พท จาก$[0,\pi]$ = พท.$[0,\frac{\pi}{2}]$ + พท.$[\frac{\pi}{2},\pi]$

แยกพิจารณา ① $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1-0 = 1$

ช่วง ②. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= \sin(\pi) - \sin(\frac{\pi}{2}) = 0-1 = -1$

<u>ข้อสังเกต</u>: ถ้า $f(x) < 0$ บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < 0 \Rightarrow$ พท. ใต้กราฟ $= \underline{\underline{-\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}}$

⇒ ถ้าใช้เป็น พท. ใต้กราฟของ. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,dx$

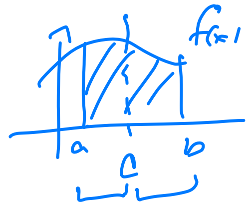
$$= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx}_{\text{พท. ①}} + \underbrace{-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x)\,dx}_{\text{พท. ②}} = 1 + (-(-1)) = 2 \quad \blacksquare$$

<u>สมบัติของอินทิกรัลแบบจำกัดเขต.</u>

1.) $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

2.) $\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3.) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \;,\; a<c<b$



4.) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

5.) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

6.) ถ้า $f(x) \geq 0$ บน $[a,b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

7.) ถ้า $f(x) \geq g(x)$ บน $[a,b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Ex: 1.) $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$

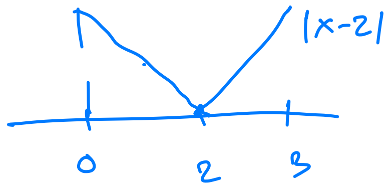
① หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตก่อน

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$$

② จาก ทบ. หลักมูลของแคล.

$$\int_{-1}^{2} x^3\,dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{2^4}{4}\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4}\right) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

2.) $\displaystyle\int_0^3 |x-2|\,dx \Rightarrow |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$



พิจ. $\displaystyle\int_0^3 |x-2|\,dx$

$$= \int_0^2 |x-2|\,dx + \int_2^3 |x-2|\,dx$$

$$= \int_0^2 -(x-2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

$$= -\int_0^2 (x-2)\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx$$

- หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $\displaystyle\int (x-2)\,dx$

$$= \underbrace{\frac{x^2}{2} - 2x}_{F(x)} + C$$

พิจ. $\displaystyle = -\left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]\Bigg|_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]\Bigg|_2^3$

$$= -\left[\underbrace{\left(\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right)}_{-2} - 0\right] + \left[\left(\frac{3^2}{2} - 2\cdot 3\right) - \underbrace{\left(\frac{2^2}{2} - 2\cdot 2\right)}_{-2}\right]$$

$$= -(-2) + \frac{9-12+4}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร

$$\left[\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int f(u)\,du\right]$$

ให้ $u = g(x)$

และ $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$

$\Rightarrow du = g'(x)dx$

Ex: $$\int (\overbrace{\underbrace{x^2+2x-3}_{=u}}^{=u(x)})(x+1)\,dx$$

① ให้ $u(x) = x^2+2x-3$

$$\frac{du}{dx} = 2x+2$$

$$\boxed{dx = \frac{1}{2(x+1)}\,du}$$

แทนค่า u

② $$= \int u\,\cancel{(x+1)}\,\frac{1}{2\cancel{(x+1)}}\,du$$

$$= \int \frac{u}{2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2} + C$$ ③

แทนค่า $u = x^2+2x-3$

④ $$= \frac{1}{4}(x^2+2x-3)^2 + C \quad \blacksquare$$

Ex: $$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\underbrace{\cos x}_{=u(x)}}\,dx$$

ให้ $u(x) = \cos(x)$

$$\frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\boxed{dx = \frac{1}{-\sin x}\,du}$$

แทนค่า u

$$= \int \frac{\cancel{\sin x}}{u}\,\frac{1}{-\cancel{\sin x}}\,dx$$

$$= -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = \ln\left|\frac{1}{u}\right| + C$$

แทนค่า $u = \cos x$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x| + C \quad \blacksquare$$

Ex: $\int \sec x \, dx$

กำหนด $u(x) = \sec x + \tan x$

$$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x + \sec^2 x$$

$$\boxed{dx = \frac{1}{\sec x(\tan x + \sec x)}\, du}$$

แทน u

$$= \int \cancel{\sec x} \, \frac{1}{\cancel{\sec x}(\underbrace{\tan x + \sec x}_{=u})}\, du$$

$$= \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C$$

แทน u

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C$$

Ex: จงหา $\int \sqrt{2x-1}\, dx$

วิธี 1: เลือก $u = 2x-1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

แทน u $\Rightarrow$

$$\int \sqrt{u}\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}} + C$$

แทน u กลับ

$$= \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C \quad ✓$$

วิธี 2: เลือก $u = (2x-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = (2x-1)^{\frac{1}{2}} du$

แทน u. $\Rightarrow$

$$\int u \cdot \underbrace{(2x-1)^{\frac{1}{2}}}_{=u} \cdot du = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

แทน u กลับ.

$$= \frac{\left((2x-1)^{\frac{1}{2}}\right)^3}{3} + C \quad ✓$$

Ex: หา. $\int \frac{y}{\sqrt{1-y^4}}\,dy$

เลือก $u = y^2$

$\frac{du}{dy} = 2y$

$\boxed{dy = \frac{du}{2y}}$

แทน u. $= \int \frac{\cancel{y}}{\sqrt{1-y^4}} \frac{du}{2\cancel{y}}$

จาก. $u = y^2$

$\Rightarrow y^4 = u^2$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

$= \frac{1}{2}\arcsin(u) + C$ แทนกลับ $= \frac{1}{2}\arcsin(y^2) + C$ ∎

Ex: $\int \frac{\sin t}{\underbrace{2+\cos t}_{=u}}\,dt$

$u = 2+\cos t$

$\frac{du}{dt} = -\sin t$

$\boxed{dt = \frac{1}{-\sin t}\,du}$

แทน u.

$= \int \frac{\cancel{\sin t}}{u} \frac{1}{-\cancel{\sin t}}\,du$

$= -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = \ln\left|\frac{1}{u}\right| + C$

แทนกลับ. $= \ln\left|\frac{1}{2+\cos(t)}\right| + C$ ∎

(เปลี่ยนตัวแปร.)

การบ้าน: แบบฝึกหัด 3.3

4.) $\int \frac{y}{\sqrt{2y^2+1}}\,dy$

11.) $\int \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$

14.) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

(อินทิกรัลจำกัดเขต.)

แบบฝึกหัด 3.2

1.) $\int_1^4 \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt$

5.) $\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx$