

ဥပမာ: ဝိကိရိဒါ (Integral)

=> ဝိကိရိဒါ ချိတ်ကိရိဒါ (ဝိကိရိဒါ ကို diff.)

=> ဝိကိရိဒါ ချိတ်ကိရိဒါ (အသွယ် ဟု. ချိတ်ကိရိဒါ.)

မေးခွန်း: မေးခွန်း F ချိတ်ကိရိဒါ ချိတ်ကိရိဒါ ကို f . ချိတ်ကိရိဒါ I
(anti-derivative)

မေးခွန်း $F'(x) = f(x)$ ဟု $x \in I$

Ex: 1.) $f(x) = \cos(x)$. မေးခွန်း $F(x)$ ကို $F'(x) = f(x) = \cos(x)$

• $F(x) = \sin(x) \Rightarrow F'(x) = \cos(x)$

• $F(x) = \sin(x) + C \Rightarrow F'(x) = \cos(x) + 0$

• $F(x) = \sin(x) + C$ မေးခွန်း $F'(x) = \cos(x) + 0$
(အသွယ်.)

=> မေးခွန်း $F(x) = \sin(x) + C$ (အသွယ်.)

2.) မေးခွန်း $F(x)$ ကို $F'(x) = 2x$

=> $F(x) = x^2 + C$ (အသွယ်.)

3.) မေးခွန်း $F(x)$ ကို $F'(x) = \frac{1}{x} + 2e^{2x}$

=> $F(x) = \ln(x) + e^{2x} + C$ (အသွယ်.)

⇒ นิยาม: ถ้า $f'(x) = f(x)$ สำหรับ $\forall x \in I$ แล้ว

ผล.
$$F(x) + C = \int f(x) dx$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ≥ 1 " อินทิกรัลของพหุนาม "

Ex: จงหา อินทิกรัลของพหุนาม $3x^2$

⇒ ให้ $f(x) = 3x^2$

⇒ $\int f(x) dx = \int 3x^2 dx = \underbrace{x^3}_{F(x)} + \underbrace{C}_{\text{ค่าคงที่ (const)!}}$

ดังนั้น อินทิกรัลของพหุนาม $3x^2$ คือ

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

สูตร: (อินทิกรัลของพหุนาม diff.)

$$f(x) \quad | \quad \int f(x) dx = F(x) + C$$

• $\int k dx = kx + C$

• $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

• $\int e^x dx = e^x + C$

$$\frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1) x^n$$

- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin(x) + C$
- $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$
- $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
- $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \underline{\ln|x|} + C \quad \square$

შედეგად: თუ f და g ნებისმიერია, C ნებისმიერი.

☞ $\int (f \pm g) \, dx = \int f \, dx \pm \int g \, dx + C$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \int c f(x) dx = c \int f(x) dx \\ \bullet \int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \end{array} \right]$$

Ex: Example of integration with

$$1.) f(x) = 10x^4 - 2 \sec^2 x$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int 10x^4 - 2 \sec^2 x dx$$

$$(\text{split } \pm) = \int 10x^4 dx - \int 2 \sec^2 x dx$$

$$(\text{split } \text{mu}) = 10 \int x^4 dx - 2 \int \sec^2 x dx$$

$$\text{Ans.} = 10 \left(\frac{x^5}{5} + C_1 \right) - 2 \left(\tan x + C_2 \right)$$

$$= 10 \left(\frac{x^5}{5} \right) - 2 \tan x + \frac{10C_1 - 2C_2}{C}$$

$$\int 10x^4 - 2 \sec^2 x dx = 10 \left(\frac{x^5}{5} \right) - 2 \tan x + \underline{C}$$

$$2.) \int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{sozl.} &= \int \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \cdot \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) d\theta. \\ &= \int \underset{\downarrow}{\csc \theta} \cdot \underset{\downarrow}{\cot \theta} d\theta = \underset{\text{gor}}{-\csc \theta} + \underline{C} \quad \square \end{aligned}$$

$$3.) \int (x^2 + 2^x + x^{\sqrt{2}-1}) dx$$

$$\text{sozl.} \\ (+) = \int x^2 dx + \int 2^x dx + \int x^{(\sqrt{2}-1)} dx$$

$$\text{gor} = \frac{x^3}{3} + \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \underline{C} \quad \square$$

$$4.) \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{y^{\frac{1}{4}}} dy.$$

$$\text{sozl.} \\ (+) = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy - \int y^{-\frac{1}{4}} dy$$

$$\text{sozl.} = \arcsin(y) - \frac{y}{\left(-\frac{1}{4}+1\right) = \frac{3}{4}} + \underline{C} \quad \square$$

ឧទាហរណ៍: ចំពោះ $f(x) = 2 + \tan^2 x$ រក $F(x)$

1.) $f(x) = 2 + \tan^2 x$

2.) $f(t) = \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2}$

⇒ ដំណើរការដោះស្រាយ ឬ ដំណើរការដោះស្រាយបញ្ហា.

• ដំណើរការដោះស្រាយបញ្ហា ឬ $f(x)$ គឺ $F(x) + C$

= បំណែក C \Rightarrow តំលៃថេរ ក្នុងលំហដោះស្រាយ

Initial value problem (IVP). $F(x_0) = a$

ឧទាហរណ៍: ចំពោះ $F(x)$ កំណត់

IVP. $\begin{cases} F'(x) = f(x) & \Rightarrow \text{រក } F(x) + C \\ F(x_0) = a & \Rightarrow \text{កំណត់ } C \text{ ឬ } C = a - F(x_0) \end{cases}$

ឬ $x_0 \Rightarrow F(x_0) + C = a$

$\Rightarrow C = a - F(x_0)$

Ex: ចំពោះ $f(x) = 3x^2$

កំណត់ $F(1) = -1$. (IVP.)

ដំណើរការដោះស្រាយ.

\Rightarrow ដំណើរការដោះស្រាយបញ្ហា ឬ $f(x) = 3x^2$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C =: F(x)$$

$$\text{Loc } \frac{F(1) = -1}{\text{(assumed value at } x=1 \text{)}} \Rightarrow F(1) = -1 = 1^3 + C$$

(assumed value at $x=1$):

$$F(1) = -1$$

$$\Rightarrow C = -1 - 1 = -2$$

එනිසා $\int 3x^2 dx$ හි $f(x) = 3x^2$ හි සමාන $F(1) = -1$

$$\text{නිසා } F(x) = x^3 + (-2) \quad \square$$

$$\underline{\text{check:}} \quad F'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + (-2)) = 3x^2 + 0 \quad \checkmark$$

$$F(1) = 1^3 - 2 = -1 \quad \checkmark \quad \square$$

\Rightarrow Gx : මෙම කාර්යය $y(x)$ හි සමාන අවදානම් සඳහා

$$(IVP) \quad \begin{cases} y'(x) = 2x \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

\Rightarrow ම. $y(x)$ මත. එනිසා මෙහි $y'(x) = 2x$ හි සමාන

$$y(x) = \int 2x dx = x^2 + C$$

හි. $y(1) = 4$ ($x=1, y=4$) මෙහි මෙහි

๖๓๑๑. $y(1) = 4 = 1^2 + C \Rightarrow C = 4 - 1 = 3.$

๖๓๑๒ $y(x) = x^2 + 3$ ■

ขอสหาค่า: หาหา ฟังก์ชัน $y(x)$ ที่มีอนุพันธ์ $y'(x)$ เป็น
ตามเงื่อนไข

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = x\sqrt{x} + \sqrt{x} \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$$

สรุป: ①. ปฏิบัตินิยาม ของ $f(x)$ แล้ว $F(x)$ มี $F'(x) = f(x)$
(ถ้าได้คำตอบแล้วจะเขียนว่า y' เป็น $f(x)$ ก็ได้.)

②. อินทิเกรต แยกไปจำกัดขอบเขต ของ $f(x)$ แล้วรวมค่าคงที่

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

③. ข้อควรระวัง: อินทิเกรตแล้วอย่าลืม:

④. สมบัติ: $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$

$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

$\int g(x) dx$

⑤. ปัญหาหาค่าเริ่มต้น: อินทิเกรตไปจำกัดขอบเขต

ใน $y(x)$ มี $\left. \begin{array}{l} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = a \end{array} \right\} + \text{ปัญหาค่าเริ่มต้น} \Rightarrow$ ปฏิบัตินิยาม (อย่าลืม C)