บทที่ 5: อินทิกรัล (Integral)

- อินทิกรัลไม่จำกัดเขต ⇒ อินเวอร์สของการ diff.
- อินทิกรัลจำกัดเขต ⇒ ความหมาย พื้นที่ใต้กราฟ.

นิยาม: เรียก F ว่าเป็น ปฏิยานุพันธ์ ของ f บนช่วง I ถ้า
(anti-derivative)

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ทุก } x \in I$$

Ex: 1.) $f(x) = \cos(x)$ จงหา $F(x)$ ที่ $F'(x) = f(x) = \cos(x)$

- $F(x) = \sin(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- ✓ $F(x) = \sin(x) + 2 \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}(\sin x + 2) = \cos x + 0$ ✓
- $F(x) = \sin(x) + e^{\pi} \ln(2)$

หมายเหตุ: $F(x)$ ที่เป็นปฏิยานุพันธ์ มีคำตอบได้หลายคำตอบ ขึ้นอยู่กับค่าคงที่.

2.) หา $F(x)$ ที่ $F'(x) = 2x$

$$\Rightarrow F(x) = x^2 + 5 \quad ✓$$

3.) หา $F(x)$ ที่ $F'(x) = \frac{1}{x} + 2e^{2x}$

$$\Rightarrow F(x) = \ln x + e^{2x} + \pi \quad ✓$$

นิยาม: ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in I$ แล้ว เรียน

$$\boxed{F(x) + C = \int f(x)\,dx}$$

, C คงที่.

เรียก ปริพันธ์ว่า "อินทิกรัลแบบไม่จำกัดเขต"

Ex: จงหาอินทิกรัลแบบไม่จำกัดเขต ของ $f(x) = 3x^2$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int 3x^2\,dx = \underbrace{x^3}_{F(x)} + C$$

ค่าคงตัว

สูตร: อินทิกรัลแบบไม่จำกัดเขต.

- $\int k\,dx = kx + C$, k ค่าคงตัว.
- $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
- $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$
- $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
- $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$

- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

<u>สมบัติของอินทิกรัล</u>

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน , c ค่าคงที่

- $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$
- $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

<u>Ex:</u> จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ

1.) $f(x) = 10x^4 - 2\sec^2 x$

$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int 10x^4 - 2\sec^2 x\,dx$

สมบัติ (±) $= \int 10x^4\,dx - \int 2\sec^2 x\,dx$

สมบัติ (·c) $= 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx$

สูตร $= 10\left(\frac{x^5}{5} + C_1\right) - 2\left(\tan x + C_2\right)$

$$= \frac{10x^5}{5} - 2\tan x + \underbrace{10C_1 - 2C_2}_{C}$$

$$= \frac{10x^5}{5} - 2\tan x + C \quad \blacksquare$$

2.) $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta.$

(ใช้สูตร) $\displaystyle = \int \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\cdot\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) d\theta$

$$= \int \operatorname{cosec}\theta \cdot \cot\theta \, d\theta = -\operatorname{cosec}\theta + \underline{\underline{C}} \quad \blacksquare$$

3.) $\displaystyle\int \left(x^2 + 2^x + x^{\sqrt{2}-1}\right) dx$

ระบบ (±) $\displaystyle = \int x^2 dx + \int 2^x dx + \int x^{\sqrt{2}-1} dx$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \underline{\underline{C}} \quad \blacksquare$$

4.) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{y^{\frac{1}{4}}}\, dy$

ระบบ (±) $\displaystyle = \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy - \int y^{-\frac{1}{4}} dy$

$$= \text{area of } y - \frac{y^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C$$

$-\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$ $\quad$ $-\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$

⇒ ถ้า $f(x)$ ⇒ หาอันทำให้ไม่จำกัดเขต.

คือ. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

ถ้าไม่ต้องการค่า C.
ต้องเพิ่มเงื่อนไข. ค่าเริ่มต้น.

ปัญหาค่าเริ่มต้น: ในหา $y(x)$ ที่.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

— หาอันทำให้ไม่จำเขต.
$y(x) = F(x) + C$

— เงื่อนไขค่าเริ่มต้น.
แทนค่า $y(x_0) = F(x_0) + C$
หาค่า C

Ex: จงหาฟังก์ชันที่ $y(x)$ ของ $f(x) = 3x^2$
ที่ทำให้ $y(1) = -1$

⇒ เขียนในรูป ปัญหาค่าเริ่มต้น

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) = 3x^2 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

หาอันทำให้ไม่จำกัดเขต $y(x) = \int f(x)\,dx = \int 3x^2\,dx$
$= x^3 + C$

$\Rightarrow y(x) = x^3 + C$ คำตอบทั่วไป

เงื่อนไขค่าเริ่มต้น. $y(1) = -1$ จะได้ว่า (หาค่า C.)

$$y(1) = -1 = 1^3 + C \Rightarrow C = -1 - 1 = -2$$

จะได้ว่า $\boxed{y(x) = x^3 - 2}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2$ ที่ $y(1) = -1$

Check: $y'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 2) = 3x^2$ ✓

$y(1) = 1^3 - 2 = -1$ ✓

Ex: จงหาฟังก์ชัน $y(x)$ ที่สอดคล้องกับปัญหาค่าเริ่มต้น

$$(*) \begin{cases} y'(x) = 2x \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ หาคำตอบทั่วไป. (อันที่จริงไม่จำเป็นเสมอ.)

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

$\Rightarrow$ หา C: โดยแทนเงื่อนไข. $y(1) = 4$,

จะได้. $y(1) = 4 = 1^2 + C \Rightarrow C = 4 - 1 = 3$

ดังนั้น $\boxed{y(x) = x^2 + 3}$ สอดคล้องกับปัญหาค่าเริ่มต้น (*) ☒

⇒ สรุป: • $\boxed{\text{ปฏิยานุพันธ์}}$ $F(x)$ ของ $f(x)$

คือฟังก์ชันที่ $F'(x) = f(x)$, ($F(x)$ ไม่มี C.)

• $\boxed{\text{อินทิกรัลไม่จำกัดเขต}}$ ของ $f(x)$ เขียนแทนด้วย.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

• รูป ⇒ อินทิกรัลของความต่าง.

• สมบัติ • $\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

• $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

• ปัญหาค่าเริ่มต้น: หา $y(x)$ ที่

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) & \longrightarrow \text{หาได้คำตอบทั่วไป. } y(x) = F(x) + C \\ y(x_0) = y_0 & \Rightarrow \text{เอาไปแทนค่าหา } C. \end{cases}$$

(คำตอบเป็น ปฏิยานุพันธ์. (ไม่มีค่า C))

ตัวอย่าง: หาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ.

1.) $f(x) = 2 + \tan^2 x$

2.) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2}$, หาปฏิยานุพันธ์ $y(x)$ ที่ทำให้.

$$\begin{cases} y'(x) = f(x) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$