Midterm 4 ต.ค. 62 , 8:00-11:00 น.
Room: RB3302

⇒ Implicit diff: มอง y เป็น f^n ของ x แล้วดิฟทั้งสองข้าง.

7.) กำหนด $y = \dfrac{\sqrt[2017]{x^2+3}}{2^x \sin x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ (อาจ)ใช้สมบัติ ln.

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(a\cdot b) &= \ln a + \ln b \\ \ln\left(\tfrac{a}{b}\right) &= \ln a - \ln b \\ \ln a^b &= b\ln a \end{aligned}}$$

ใส่ ln

$$\Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{(x^2+3)^{\frac{1}{2017}}}{2^x \sin x}\right)$$

$$= \ln(x^2+3)^{\frac{1}{2017}} - \ln(2^x \sin x)$$

$$\ln y = \frac{1}{2017}\ln(x^2+3) - x\ln 2^{\cancel{x}} - \ln(\sin x)$$

(Imp. diff:)

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2017}\ln(x^2+3) - x\ln 2^{\cancel{x}} - \ln(\sin x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2017}\cdot\frac{1}{(x^2+3)}\cdot 2x - \ln 2 - \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{2x}{2017\cdot(x^2+3)} - \ln 2 - \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$ #

8.) หาสมการเส้นสัมผัสที่ผ่านจุด (0,2) และตั้งฉากกับเส้นสัมผัสกราฟ.

$xy^2 = x^2 + y - 2$, ที่จุด $x = 0$.

Imp diff:
ดิฟสองข้าง $\Rightarrow \dfrac{d}{dx}(xy^2) = \dfrac{d}{dx}(x^2+y-2)$

$$x\,2y\frac{dy}{dx} + y^2 = 2x + \frac{dy}{dx}$$

จัดรูป $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}(2xy-1) = 2x - y^2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(2x-y^2)}{(2xy-1)}$$

ที่ $x=0$ จะได้ จาก $xy^2 = x^2+y-2$ แทน $x=0$

$$\Rightarrow 0 = 0 + y - 2 \Rightarrow y = 2$$

ที่จุด $x=0$ จะได้ $y=2$

ดังนั้น ความชันเส้นสัมผัสกราฟ เป็น $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=2}} = \dfrac{(2\cdot 0 - 2^2)}{(2\cdot 0\cdot 2 - 1)} = +4$

$\Rightarrow$ เส้นตั้งฉาก: มีความชันเป็น $m\cdot(+4) = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$

ผ่านจุด $(0,2)$ จะได้สมการ (หาค่า c)

$L(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)x + c$ ผ่านจุด $(0,2) \Rightarrow 2 = -\frac{1}{4}\cdot 0 + c$

$$\Rightarrow c = 2$$

ดังนั้น เส้นตรงตั้งฉากกับเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(0,2)$ คือ

$$L(x) = -\frac{1}{4}x + 2$$

6.) กำหนด. $f(x) = \ln(2x+1) + \sin(x)$ จงหา.

6.1) $f'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 + \cos(x)$

6.2) $f''(x) = -2(2x+1)^{-2} - \sin(x)$

6.3) $f'''(x) = +2 \cdot 2\,(2x+1)^{-3} - \cos(x)$

6.4) $f^{(4)}(x) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-3)}_{2 \cdot -3!}(2x+1)^{-4} + \sin(x)$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(2x+1)^{-n} + \begin{cases} \cos(x), & \frac{n}{4} \text{ เศษ } 1 \\ -\sin x, & \frac{n}{4} \text{ เศษ } 2 \\ -\cos x, & \frac{n}{4} \text{ เศษ } 3 \\ +\sin x, & \frac{n}{4} \text{ เศษ } 0 \end{cases}$$

6.5.) $f^{(100)}(x) = (-1) \cdot 99!\,(2x+1)^{-100} + \sin x$

5.) $V(h) = 18h + \frac{9}{2}(4+h)\cdot h$ จงหา $\left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=4}$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dh} = \frac{d}{dh}\left(18h + \frac{9}{2}(4h+h^2)\right)$$

$$= 18 + \frac{9}{2}(4+2h)$$

ที่ $h=4 \Rightarrow \left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=4} = 18 + \frac{9}{\cancel{2}} \cdot (\cancel{4} + \cancel{2} \cdot 4) = 18 + 54$

$= 72$ ft^3/ft

4.) หาอนุพันธ์ของ fn ต่อไปนี้:

4.1) $y = (\underbrace{\log_{10}(2x^3+4x+e)}_{99})^{100}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 100(\log_{10}(2x^3+4x+e)) \cdot \frac{1}{\ln 10\,(2x^3+4x+e)} \cdot (6x^2+4)$$

4.2) $y = \underbrace{\pi e^x}_{1} \underbrace{\sec(x^3+1)}_{2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pi e^x \cdot \sec(x^3+1)\tan(x^3+1)\cdot(3x^2) + \sec(x^3+1)(\pi e^x)$$

4.3) $y = (\arctan(x^2+1))^2 + 2^{\tan x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(\arctan(x^2+1)) \cdot \frac{1}{1+(x^2+1)^2} \cdot (2x) + (\ln 2) 2^{\tan x} \sec^2 x$$

4.4) $y = \sin(\ln(x^2+2)+\pi)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(\ln(x^2+2)+\pi) \cdot \frac{1}{x^2+2} \cdot 2x$$

4.5) $y = 4^x + \ln 4^x + x^4 + \cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) + \arcsin(e^{-4})$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\ln 4)4^x + \ln 4 + 4(x^3) + 0 + 0$$

$$\Rightarrow f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

จะมีค่าก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-}$

3.1 กำหนดให้: $f(x) = \begin{cases} x^2+28, & x \le 2 & \text{— ①} \\ 16\sqrt{x+2}, & x > 2 & \text{— ②} \end{cases}$

3.1) พจ. $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x^-) - f(2)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{①\,((2+\Delta x)^2 + 28) - ①\,(2^2+28)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(\cancel{4} + 4\cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{2}} + \cancel{28}) - (\cancel{4} + \cancel{28})}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} (4 + \Delta x) = 4. \quad \blacksquare$$

3.2) พจ. $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x^+) - f(2)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{②\,16\sqrt{(2+\Delta x)+2} - ①\,\underbrace{(4+28)}_{=32}}{\Delta x}$$

$$= 16 \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(\frac{\sqrt{\Delta x+4} - 2}{\Delta x}\right) \cdot \frac{(\sqrt{\Delta x+4} + 2)}{(\sqrt{\Delta x+4} + 2)}$$

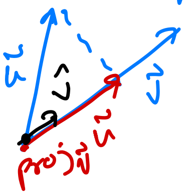
$$= 16 \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\cancel{\Delta x}^{\,1} \cancel{+4} - \cancel{4}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{\Delta x+4} + 2)} = 16 \cdot \frac{1}{4} = 4 \quad \blacksquare$$

3.3) $f'(2)$ หาค่าได้ เพราะ $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ มีค่า $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-}\right)$

แบบฝึกหัด Midterm ชุด 1!

1.) กำหนด $\vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$ จงหา, $\vec{u} = (2,3,0)$
$\vec{v} = (1,0,-1)$

1.1.) $\boxed{\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{v})}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}}$ $\left(\text{หรือ } (\vec{u}\cdot\hat{v})\hat{v},\ \hat{v} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$



หา $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,3,0)\cdot(1,0,-1) = 2 + 0 + 0) = 2$

$$\|\vec{v}\|^2 = \|(1,0,-1)\|^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$$

จะได้ $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \dfrac{2}{2}\vec{v} = \vec{v} = (1,0,-1)$ ∎

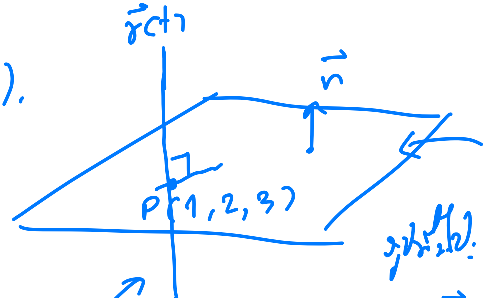
1.2). หา $\vec{u}\times\vec{v}$, $u = (2,3,0)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right| = \vec{i}(-3-0) + \vec{j}(0+2) + \vec{k}(0-3)$$

$$= -3\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = (-3, 2, -3)$ ∎

2.)



$2(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0$

รูปทั่วไป: $n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$

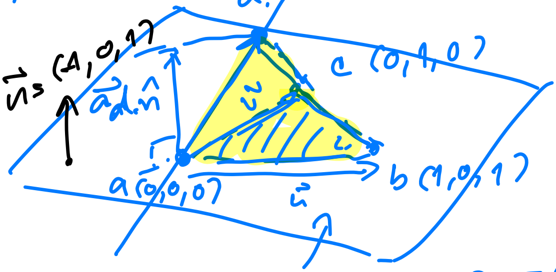
- $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = (2, 1, -2)$
- $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$

ต้องการ
- จุด 1 จุด ✓
- เวกเตอร์ที่ตั้งฉาก เส้นตั้งฉากระนาบ

$\vec{r}(t) = \vec{P} + \vec{v}t = (1,2,3) + (2,1,-2)t$ ☒

$\vec{r}(t) = (0,0,0) + (-1,1,1)t$

3.).



$V_{\text{พีระมิด}} = 4$ หน่วย^3

ต้องหา d. ที่ทำให้

ระนาบ: $-x+z=0$

(สูตร: $V = \frac{1}{3} \times$ พท.ฐาน $\times$ สูง)

$-1(x-0) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0$

$\vec{n} = (-1,0,1)$

พท.ฐาน: $\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$

สูง: $\vec{ad}\cdot\hat{n} = \vec{ad}\cdot\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$, $\vec{ad} \Rightarrow d = (-1,1,1)t$

$a = (0,0,0)$

จะได้ $\vec{ad} = (-t,t,t)$

สูง: $(-t,t,t)\cdot\frac{(-1,0,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{t+0+t}{\sqrt{2}} = \frac{2t}{\sqrt{2}}$

พท.ฐาน: $\frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\|$, $\vec{u} = \vec{ab} = (1,0,1)$

$\vec{v} = \vec{ac} = (0,1,0)$

$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = (-1)\vec{i} + 0\vec{j} + (1)\vec{k}$

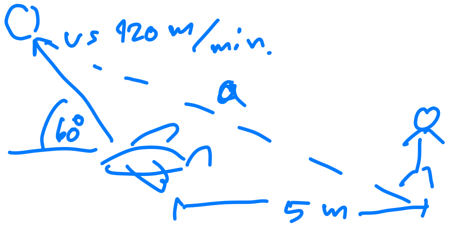
$= (-1,0,1)$

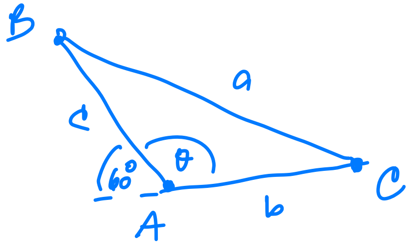
ดังนั้น พท.ฐาน $= \frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

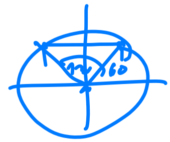
จะได้ $V = \frac{1}{3}\times\left(\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\sqrt{2}}\right)\times\left(\frac{\cancel{2}t}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) = \frac{t}{3} = 4 \Rightarrow t = 12$

$\therefore d = (-t,t,t) = (-12,12,12)$ ☒

15.7.







$$\frac{dc}{dt} = 120.$$

หา $\frac{da}{dt} = ?$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta \quad 120^\circ$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + \cancel{2}bc\,\frac{1}{\cancel{2}} \quad (b=5)$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 = 25 + c^2 + 5c}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{da}{dt}}_{①} = \underbrace{\frac{da}{dc}}_{②} \cdot \underbrace{\frac{dc}{dt}}_{③} \checkmark = \frac{d(25+c^2+5c)^{\frac{1}{2}}}{dc} \cdot 120$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}(c^2+5c+25)^{-\frac{1}{2}}(2c+5)\cdot 120.$$

ขณะที่ $c = 10$ m จะได้ $\left.\frac{da}{dt}\right|_{c=0} = \frac{1}{2}(100+50+25)^{-\frac{1}{2}}(25)\cdot 120$

$$= \dots$$