สอบ Midterm (Sec 005): ส. 4 ต.ค. 62 8.00-11.00 น.

ห้อง: RB5308 - 10.

แนวข้อสอบ Midterm .. ข้อที่ 3:

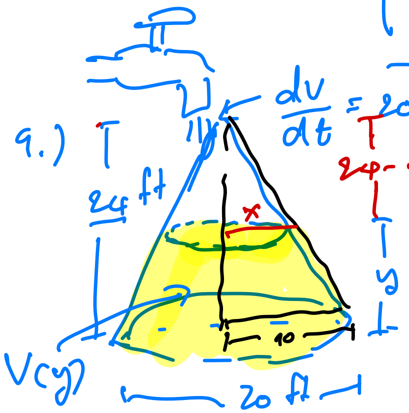
⇒ อัตราสัมพัทธ์: ประยุกต์ chain rule.

- ตัวแปร 3 ตัว: u, v, t
- chain rule:

$$\boxed{\underbrace{\frac{du}{dt}}_{①} = \underbrace{\frac{du}{dv}}_{②} \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{③}}$$

ปกติ ระบุ ① หรือ ③ ต้องหาความสัมพันธ์ $u(v)$ แล้ว $\frac{du}{dv}$ ② เพื่อหาเทอมที่เหลือ.

9.)



หา $\frac{dy}{dt}$ ที่ $y = 16$ ft.

- ตัวแปร. V, y, t

ความสัมพันธ์.

- chain rule: $\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{①} = \underbrace{\frac{dV}{dy}}_{②} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{③}$

① โจทย์ให้มา ③ ✓ ต้องหา

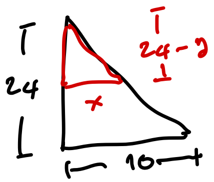
$\boxed{\text{ปริมาตรกรวย} = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h}$

⇒ หา $V(y) = ---$

$V(y) =$ ปริมาตรทั้งหมด − ปริมาตรที่ว่าง.

$= \frac{\pi}{3} \cdot 10^2 \cdot 24 - \frac{\pi}{3} x^2 (24-y)$

เขียนในรูป y.



Δ คล้าย ⇒ $\frac{x}{10} = \frac{24-y}{24} \Rightarrow x = \frac{10}{24}(24-y)$

$$= \frac{\pi}{3}10^2 \cdot 24 - \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{10}{24}(24-y)\right)^2\cdot(24-y)$$

จัดรูป. $$V(y) = \frac{\pi}{3}10^2\cdot 24 - \frac{\pi}{3}\left(\frac{10}{24}\right)^2\cdot(24-y)^3$$

กฎ. $$\overbrace{\frac{dV}{dt}}^{①} = \overbrace{\frac{dV}{dy}}^{②}\cdot\overbrace{\frac{dy}{dt}}^{③}$$ กฎโซ่

โจทย์. $$20 = \frac{dV}{dt} = \left(+\frac{\pi}{\cancel{3}}\left(\frac{10}{24}\right)^2\cdot\cancel{3}(24-y)^2\right)\cdot\frac{dy}{dt}$$

ดังนั้น $$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=16} = \frac{20}{\pi}\cdot\left(\frac{24}{10}\right)^2\cdot\left.\frac{1}{(24-y)^2}\right|_{y=16}$$

$$= \frac{\cancel{20}}{\pi}\cdot\frac{\cancel{24^2}^{\,9}}{\cancel{10^2}_{\,5}}\cdot\frac{1}{\cancel{8^2}} = \frac{9}{5\pi}\ \text{ft/min.}$$

⇒ Implicit diff: ถ้า ฟังก์ชัน อยู่ในรูป $f(x,y) = 0$

⇒ <u>ดิฟทั้งสองข้าง</u> (เจอ y แล้ว ต้องคูณ $\frac{dy}{dx}$) (มอง <u>y เป็น ฟังก์ชันของ x</u>)

⇒ <u>จัดรูป</u> แก้. $\frac{dy}{dx} = ---$

7.) กำหนด. $y = \dfrac{\sqrt[2017]{x^2+3}}{2^x \sin x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ โดยใช้ วิธี<u>ln.</u>

ใส่ ln: $\Rightarrow \ln y = \ln\left(\dfrac{(x^2+3)^{\frac{1}{2017}}}{2^x \sin x}\right)$

$$\boxed{\begin{aligned}\ln\left(\frac{a}{b}\right) &= \ln a - \ln b \\ \ln(a\cdot b) &= \ln a + \ln b\end{aligned}}$$

$$= \ln (x^2+3)^{\frac{1}{2017}} - \ln(2^x \sin x)$$

$$= \ln (x^2+3)^{\frac{1}{2017}} - \ln 2^x - \ln \sin x$$

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2017}\ln(x^2+3) - x\ln 2 - \ln(\sin x)$$

ใช้ Imp. diff: (ดิฟทั้งสองข้าง)

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2017}\ln(x^2+3) - x\ln 2 - \ln(\sin x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2017}\cdot\frac{1}{(x^2+3)}\cdot(2x) - \ln 2 - \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = y\cdot\left[\dfrac{2x}{2017(x^2+3)} - \ln 2 - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right]$ ◪

8.) หาสมการเส้นตรงผ่านจุด (0,2) และตั้งฉากกับเส้นสัมผัสกราฟ. $xy^2 = x^2+y-2$ ที่จุด $x=0$.

(ความชัน คูณกัน 90° $= -1$)

ความชัน
หาเส้นสัมผัส $xy^2 = x^2+y-2$ ที่จุด $x=0$

หา $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ $\xRightarrow{\text{Imp. diff}}$ $\frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}(x^2+y-2)$

$$\Rightarrow 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 2x + \frac{dy}{dx}$$

(จัดรูป) $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}(2xy-1) = 2x - y^2$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y^2}{2xy-1}$$

$\Rightarrow$ หา y ที่ $x=0$: จาก. $xy^2 = x^2+y-2$ จะได้ แทนค่า $x=0$

$$\Rightarrow 0 = 0 + y - 2 \Rightarrow y = 2.$$

ดังนั้น. $\frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=0\\y=2}} = \frac{2(0)-2^2}{2\cdot 0\cdot 2-1} = 4$

จะได้ว่า ความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสคือ

$$m\cdot 4 = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

หาเส้นตรง $L(x) = mx + c$ ผ่านจุด. $(0,2)$

จะได้. $L(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)x + c$ แทนค่า $x=0, y=2$

$$\Rightarrow 2 = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0 + c \Rightarrow c = 2$$

$\therefore$ เส้นตรง คือ $L(x) = -\frac{1}{4}x + 2$

$\perp$ กับเส้นสัมผัส
กราฟที่ $x=0$
และผ่าน $(0,2)$

- อนุพันธ์อันดับสูง : $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$

6.) กำหนด $f(x) = \ln(2x+1) + \sin(x)$ จงหา.

$$f'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 + \cos(x)$$

$$f''(x) = -2(2x+1)^{-2} \cdot 2 - \sin(x)$$

$$f'''(x) = (+2)(+2)(2x+1)^{-3} \cdot 2 \cdot 2 - \cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = 2 \cdot 2 \cdot (-3)(2x+1)^{-4} \, 2 \cdot 2 \cdot 2 + \sin(x)$$

$$2 \cdot (-1) \cdot \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}_{3!} (2x+1)^{-4} \cdot 2^{3}$$

$$f^{(n)}(x) = 2 \cdot (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \, (2x+1)^{-n} \cdot 2^{(n-1)}$$

$$+ \begin{cases} +\cos x & , \frac{n}{4} \text{ เศษ } 1 \\ -\sin x & , \frac{n}{4} \text{ เศษ } 2 \\ -\cos x & , \frac{n}{4} \text{ เศษ } 3 \\ +\sin x & , \frac{n}{4} \text{ เศษ } 0 \end{cases}$$

$$f^{(100)} = 2 \cdot (-1) \cdot (99)! \, (2x+1)^{-100} \cdot 2^{99} + \sin x$$

5.) กำหนด $V = 18h + \frac{9}{2}(4+h)h$ หา. $\left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=4}$

$$\Rightarrow \left.\frac{dV}{dh}\right|_{h=4} = 18 + \frac{9}{2}(4+2h)\Big|_{h=4}$$

$$= 18 + \frac{9}{\cancel{2}}\overset{6}{\cancel{(4+8)}} = 18 + 54 = 72$$

4.) หาอนุพันธ์ของ ฟังก์ชันต่อไปนี้

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{d}{dx}\frac{\ln u}{\ln a} = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$$

4.1) $y = \left(\log_{10}(2x^3 + 4x + e)\right)^{100}$

$$\frac{dy}{dx} = 100\left(\log_{10}(2x^3+4x+e)\right)^{99} \cdot \frac{1}{\ln 10 \cdot (2x^3+4x+e)} \cdot (6x^2+4)$$

4.2.) $y = \underbrace{\pi e^x}_{①}\underbrace{\sec(x^3+1)}_{②}$

$$\frac{dy}{dx} = \pi e^x \cdot \sec(x^3+1)\tan(x^3+1)\cdot(3x^2) + \sec(x^3+1)\,\pi e^x$$

4.3) $y = (\arctan(x^2+1))^2 + 2^{\tan x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\arctan(x^2+1)\cdot\frac{1}{1+(x^2+1)^2}\cdot(2x) + 2^{\tan x}\cdot\ln 2\cdot\sec^2 x \quad \blacksquare$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\arctan u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx} \\[2ex] \dfrac{d}{dx}a^u = a^u\ln a\,\dfrac{du}{dx} \end{array}\right]$$

4.4.) $y = \sin(\ln(x^2+2)+\pi)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(\ln(x^2+2)+\pi)\cdot\frac{1}{x^2+2}\cdot(2x) \quad \blacksquare$$

4.5.) $y = 4^x + \ln 4^x + x^4 + \cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) + \arctan(e^{-4})$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4^x\ln 4 + \frac{1}{4^x}4^x\ln 4 + 4x^3 + 0 + 0 \quad \blacksquare$$

⇒ หาอนุพันธ์โดยใช้บทนิยาม. $\dfrac{df}{dx} = \lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

3.) กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2+28, & x \le 2 \quad — ① \\ 16\sqrt{x+2}, & x > 2 \quad — ② \end{cases}$

3.1.) ทน. $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\left((2+\Delta x)^2 + 28\right) - (2^2+28)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\cancel{4} + 4\cancel{\Delta x} + (\Delta x)^2 + \cancel{28} - \cancel{4} - \cancel{28}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} (4 + \Delta x) = 4$$

3.2) ขว. $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\left(16\sqrt{(2+\Delta x)+2}\right) - (2^2+28)}{\Delta x}$$

$$= 16 \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(\frac{\sqrt{4+\Delta x} - 2}{\Delta x}\right) \cdot \frac{\sqrt{4+\Delta x}+2}{\sqrt{4+\Delta x}+2}$$

$$= 16 \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\cancel{4} + \cancel{\Delta x}) - \cancel{4}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{4+\Delta x}+2\right)} = 16 \cdot \frac{1}{2+2} = 4$$

3.3: $f'(2) = \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 4$ หาค่าได้