ແບບຝຶກຫັດ Midterm ຊຸດທີ 3

⟹ ລິມິດໃນຮູບ ອິນເດເທີມິເນດ.

ຕົວລິມິດຢູ່ໃນຮູບ. $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ ⟹ ແປງໃຫ້ຢູ່ໃນຮູບ $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ແລ້ວໃຊ້ໂລປິຕານ.

ໂລປິຕານ $$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

15.) ຈົ່ງຫາລິມິດ.

(ຈັດຮູບ)

15.1.) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\to\frac{1}{\infty}=0$$ ☒

15.2.) $$\lim_{x\to2^-}\frac{2x+4}{x^2-4}=\lim_{x\to2^-}\frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-2)}\to\frac{2}{-0}=-\infty$$ ☒

15.3.) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+1}\to\frac{\underbrace{e^{-\infty}}_{\to0}+\underbrace{e^{-(-\infty)}}_{\to\infty}}{\underbrace{e^{-\infty}}_{\to0}+1}=\frac{\infty}{1}=\infty$$ ☒

16.) ຈົ່ງຫາລິມິດຕໍ່ໄປນີ້.

16.1.) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{\ln(1-x)}\to\frac{0}{0}$$ ✓ ໂລປິຕານ.

(ໂລປິຕານ) $$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{d}{dx}(\sin(2x))}{\frac{d}{dx}\ln(1-x)}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos(2x)}{\frac{-1}{(1-x)}}$$

$$\to\frac{2}{-1}=-2$$ ☒

16.2.) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{(\ln x)-1}-\frac{x}{(\ln x)+1}\right)$$

(ຈັດຮູບ) $$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x(\cancel{\ln x}+1)-x(\cancel{\ln x}-1)}{(\ln x)^2-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{(\ln x)^2-1} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$ ✓ לופיטל.

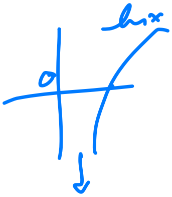
(לופיטל) $$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\frac{2\ln x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\ln x} \to \frac{\infty}{\infty}$$ ✓ לופיטל.

(לופיטל) $$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$$ ■

16.3.) $$\lim_{x\to 0} x^{x/(x^2-1)}$$

נפעיל. $$\ln\left(\lim_{x\to0} x^{x/(x^2-1)}\right) = \lim_{x\to0} \ln\left(x^{x/(x^2-1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{x\ln x}{(x^2-1)} \longrightarrow \frac{0\cdot(-\infty)}{(-1)}$$



(אלגברה) $$= \lim_{x\to0} \frac{\ln x}{\left(\frac{x^2-1}{x}\right)} \longrightarrow \frac{-\infty}{-\infty}$$ ✓ לופיטל, $-\infty$

(לופיטל) $$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(\underbrace{\frac{x^2-1}{x}}_{x-\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to \frac{\infty}{\infty}$$ ✓ לופיטל.

(לופיטל) $$= \lim_{x\to0} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to0} \frac{+\cancel{x^3}}{+\cancel{x^2}} = 0$$

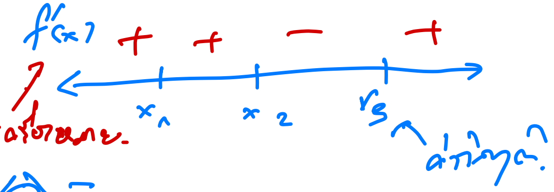
[illegible] $$\ln\left(\lim_{x\to0} x^{x/(x^2-1)}\right) = 0$$

ดังนั้น
(เทค e^{1}.)

$$\lim_{x\to 0} x^{x/(x^2-1)} = e^{0} = 1$$ ■

→ ค่าสูงสุด/ต่ำสุด สัมพัทธ์ ของ $f(x)$

- หาจุดวิกฤต คือจุดที่ $\underline{f'(x)=0}$ หรือ $\underline{f'(x) \text{ หาค่าไม่ได้}}$
- หาช่วงที่เป็น f^{n} เพิ่ม/ลด.



- สรุป: • จุดสูงสุด สัมพัทธ์: + ∩ −
  $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมาย + → −
  - จุดต่ำสุด สัมพัทธ์: − ∪ +
  $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมาย − → +

13.) กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ หาอนุพันธ์ได้ มีค่าวิกฤตที่ $x = 1, 5$.

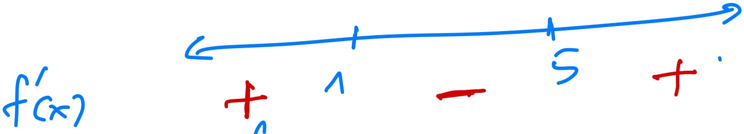
$f(x)$ เป็น f^{n} เพิ่ม บน $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$

$f(x)$ เป็น f^{n} ลด บน $[1, 5]$

ถ้าให้ $g(x) = e^{-f(x)+e}$ จงหาว่า $g(x)$ เป็น f^{n} เพิ่ม/ลด บนช่วงใด.

→ $f(x)$ มีจุดวิกฤต $x = 1, 5$.

- ช่วงที่ $f(x)$ เป็น f^{n} เพิ่ม/ลด.



พิจารณา $g(x) = e^{-f(x)+e}$.

- หาจุดวิกฤตของ $g(x)$ ต้องดูว่า $g'(x)=0$ หรือหาค่าไม่ได้

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-f(x)+e}\right) = \underbrace{e^{-f(x)+e}}_{>0}(-f'(x))$$

ดังนั้น $g'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $-f'(x)=0$.

ซึ่งคือ $x=1,5$ เป็นจุดวิกฤตของ $g'(x)$

- ช่วงที่ $g(x)$ เป็น ฟ.ก. เพิ่ม/ลด

$$\begin{array}{c|ccccc} f'(x) & + & 1 & - & 5 & + \\ \hline & - & & + & & - \end{array}$$

$$g'(x) = \underbrace{e^{\cdots}}_{>0}(-f'(x))$$

ดังนั้น $g(x)$ เป็น ฟ.ก. เพิ่มบน $[1,5]$

$g(x)$ เป็น ฟ.ก. ลดบน $(-\infty,1] \cup [5,\infty)$ ■

Ex.) จงหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)=e^{x^3}-ex^3$ (ถ้ามี)

- หาจุดวิกฤตของ $f(x)$: ต้องดูค่าที่ $f'(x)=0$ หรือ $f(x)$ หาค่าไม่ได้

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{x^3}-ex^3\right) = e^{x^3}(3x^2) - e(3x^2)$$

$$= \underbrace{3x^2}_{}\underbrace{(e^{x^3}-e)}_{} = 0$$

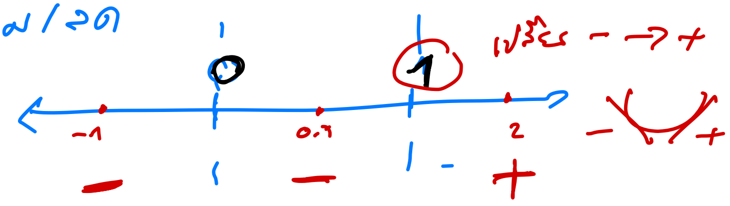
ก็ต่อเมื่อ $=0$ หรือ $=0$ → ก็ต่อเมื่อ $e^{x^3}-e=0$

$\Rightarrow x^3=1$

$x=1$

ดังนั้น $x=0,1$,

- หาช่วง f ที่ เพิ่ม/ลด



$$f'(x) = 3x^2(e^{x^3} - e)$$

- ดังนั้น จะได้ $f(x)$ มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ที่ $x = 1$

⇒ พหุนามเทย์เลอร์/แมคลอริน.

$$P_n^T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

(รอบจุด $x_0 = a$)

$$P_n^M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

รอบจุด $x_0 = 0$

12.) กำหนดให้: $f(x) = \ln(x+1)$

12.1) จงหา พหุนามเทย์เลอร์รอบจุด $x = 1$ ของ $f(x)$ (อันดับ 2)

$$P_2^T(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$$

(รอบจุด $x = 1$)

$$P_2^T(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

รอบจุด $x = 1$

12.2) หาสัมประสิทธิ์ของ $P_2^T(x)$, หา $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$ แล้วแทนค่า

จาก $f(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f(1) = \ln(2)$

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \Longrightarrow f''(1) = \frac{-1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}$$

ดังนั้น $\Rightarrow$ $P_2^T(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2!}\right)\cdot(x-1)^2$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 \quad \boxtimes$$

12.3) ใช้ $P_2^T(x)$ ประมาณ $\ln(2.1)$, $f(x) = \ln(x+1)$

ว. $\ln(2.1) = \ln(\underbrace{1.1}^{x} + 1) = f(1.1) \approx P_2^T(1.1)$ รอบจุด $x = 1$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(1.1-1) - \frac{1}{8}(1.1-1)^2$$

$(\ln 2 \approx 0.6931)$ $= \ldots$ $\boxtimes$ (ตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

12.4.) หาพหุนามแมคลอรินดีกรี n ของ $f(x)$

$$P_n^M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

(รอบจุด $x=0$)

ตย. $f(x) = \ln(x+1) \rightarrow f(0) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$

$f''(x) = -1(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(0) = \frac{-1}{1^2} = -1$

$f'''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3} \Rightarrow f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(x) = 1\cdot 2\cdot(-3)(x+1)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -3!$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(x+1)^{-k} \Rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

ดังนั้น $$P_n^M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} = 0 + 1x + \frac{(-1)x^2}{2!} \dots + \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cancel{(k-1)!}}{k\cancel{!}}\, x^k$$

ดังนั้น $$P_n^M(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k$$ ▨

$\Rightarrow$ การประมาณค่าเชิงเส้น : $L_{x_0} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x) \approx L_{x_0}(x)$

รอบจุด $x = x_0$

11.) จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้น ประมาณค่าของ $3\cos^2(44^\circ)$
(ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง , $\pi = 3.14$)

กำหนด $f(x) = 3\cos^2(x)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

จะได้ $L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

จาก $f(x) = 3\cos^2(x) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$

$f'(x) = -3 \cdot 2\cos(x)\sin(x) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3 \cdot 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= -3$

ดังนั้น $L_{x_0}(x) = \frac{3}{2} + (-3)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

ประมาณค่า

$$3\cos^2(44^\circ) = 3\cos^2\left(\frac{44\cdot\pi}{180}\right) = f\left(\frac{44\cdot\pi}{180}\right) \approx L_{x_0}\left(\frac{44\pi}{180}\right)$$

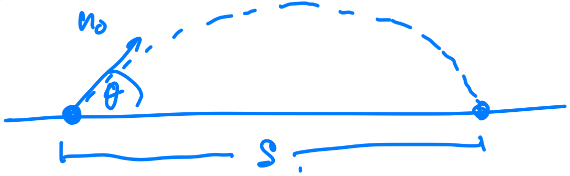
$$= \frac{3}{2} + (-3)\left(\frac{44\pi}{180} - \frac{45\cdot\pi}{180}\right) = \frac{3}{2} + (-3)\cdot\left(\frac{-\pi}{180}\right)$$

$(\pi = 3.14) = \ldots\ldots$ (ทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

⇒ ดิฟเฟอเรนเชียล: ประมาณค่า $\Delta y \approx dy$.

- ดิฟเฟอเรนเชียล $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$
- ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์. $\frac{dy}{y(x_0)}$
- ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละ $\frac{dy}{y(x_0)} \times 100$

10.)



$s(\theta) = \frac{u_0^2 \sin(2\theta)}{g}$ ← ค่าคงที่โน้มถ่วง

ถ้า θ ผิดพลาด 5%.

จงหาค่าคลาดเคลื่อนร้อยละของ s เมื่อใช้ $\theta = \frac{\pi}{6}$

⇒ ดิฟเฟอเรนเชียล: $ds = s'(\theta)\,d\theta$.

$$\Rightarrow ds = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{u_0^2 \sin(2\theta)}{g}\right) d\theta = \frac{2u_0^2}{g}\cos(2\theta)\cdot d\theta$$

ค่าผิดพลาดร้อยละ.

$$\Rightarrow \frac{ds}{s}\times 100 = \frac{\frac{2\cancel{u_0^2}}{\cancel{g}}\cos(2\theta)\cdot d\theta}{\frac{\cancel{u_0^2}}{\cancel{g}}\sin(2\theta)}\times 100 = 2\,\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}\cdot\theta\cdot\underbrace{\left[\frac{d\theta}{\theta}\times 100\right]}_{=5}$$

$$= 2\,\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}\cdot\theta\cdot 5$$

ที่ $\theta = \frac{\pi}{6}$ จะได้ $\frac{ds}{s}\times 100 = \frac{2\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\frac{\pi}{6}\cdot 5$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}\cdot\frac{\pi}{\cancel{6}_{3}}\cdot 5 = \frac{5\pi}{3\sqrt{3}}\ \%$$ ▨

⇒ อัตราสัมพัทธ์: ตัวแปร. u, v, t

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{du}{dt}}_{①} = \underbrace{\frac{du}{dv}}_{②}\cdot\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{③}$$

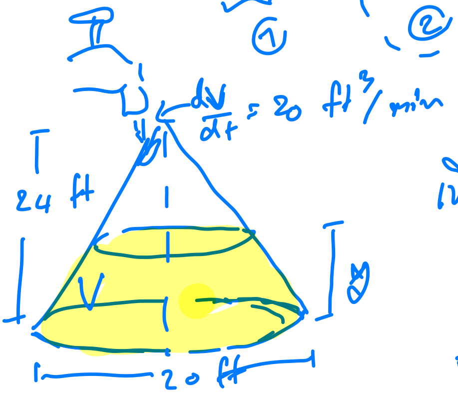
ปกติจะให้ ① หรือ ③.

แล้วต้องหา ความสัมพันธ์.

$u(v) \to \frac{du}{dv}$ ②

แสดงสัมพันธ์ในรูป.

9.1



เปิดน้ำ $\frac{dv}{dt} = 20\ ft^3/min$

จงหาขณะที่ $y = 16\ ft$

จงหา $\frac{dy}{dt} = ?$

ปริมาตรกรวย.

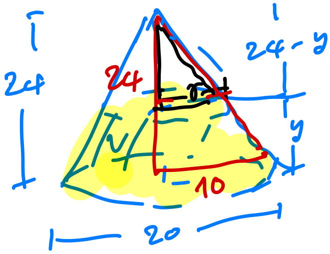
$V = \frac{\pi}{3} r^2 \times h$

⇒ ตัวแปร: V, y, t

→ chain rule:
$$\underbrace{\frac{dv}{dt}}_{① \text{ ให้มา.}} = \left(\frac{dv}{dy}\right) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\text{หา } ③.}$$

↗ หาความสัมพันธ์.

⇒ ความสัมพันธ์. $V(y) =$



$V =$ ปริมาตรทั้งหมด − ที่ว่าง.

$$\frac{\pi}{3}\cdot(10)^2\cdot 24 - \frac{\pi}{3}\cdot r^2\cdot(24-y)$$

△คล้าย. $\dfrac{24-y}{24} = \dfrac{r}{10}$

$\Rightarrow r = \dfrac{10}{24}(24-y)$

ดังนั้น.

$$V = \frac{\pi}{3}\left(10^2\cdot 24 - \left(\frac{10}{24}(24-y)\right)^2\cdot(24-y)\right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}\left(10^2\cdot 24 - \left(\frac{10}{24}\right)^2(24-y)^3\right)$$

จะได้ $\dfrac{dV}{dy} = +\dfrac{\pi}{\cancel{3}}\cdot\left(\dfrac{10}{24}\right)^2\cdot\cancel{3}(24-y)^2$

ดังนั้น. $\dfrac{dv}{dt} = \left(\dfrac{dv}{dy}\right)\cdot\dfrac{dy}{dt}$

$$\Rightarrow 20 = \left(+\pi\cdot\left(\frac{10}{24}\right)^2\cdot(24-y)^2\right)\frac{dy}{dt}$$

ที่ $y = 16$ จะได้. $20 = +\pi\cdot\dfrac{10^2}{\cancel{24^2}\,9}\cdot\cancel{8^2}\cdot\dfrac{dy}{dt} \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{9\cdot\cancel{20}}{\cancel{100}\,5\,\pi}$

$= \dfrac{9}{5\pi}$