แนวข้อสอบ Midterm ชุดที่ 3:

① lim ในรูป อินดีเทอร์มิเนต $\xrightarrow{\text{เปรียบ}}$ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ใช้โลปิตาล.

โลปิตาล. $\boxed{\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$

15. จงหาลิมิตต่อไปนี้.

15.1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}} = 0$

15.2) $\lim_{x\to 2^-}\frac{2x+4}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-}\frac{2\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$

$= \lim_{x\to 2^-}\frac{2}{\underbrace{x-2}_{\to 0 \text{ ทางลบ}}} = -\infty$

15.3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+1} \to \frac{\underbrace{e^{-\infty}}_{\to 0}+\underbrace{e^{-(-\infty)}}_{\to\infty}}{\underbrace{e^{-\infty}}_{\to 0}+1} = \frac{\infty}{1} = \infty$

16. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้.

16.1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\ln(1-x)} \to \frac{0}{0}$ ✓ โลปิตาล.

(โลปิตาล) $= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\sin(2x))}{\frac{d}{dx}(\ln(1-x))} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{\frac{-1}{(1-x)}}$

$$= \lim_{x \to 0} -2\cos(2x)(1-x) = -2 \quad \blacksquare$$

16.2) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{\ln x - 1} - \frac{x}{\ln x + 1} \right)$

(จัดรูป) $= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{(\cancel{x \ln x} + x) - (\cancel{x \ln x} - x)}{(\ln x)^2 - 1} \right)$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{(\ln x)^2 - 1} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$ ✓ โลปิตาล.

(โลปิตาล) $= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{2}}{\frac{\cancel{2} \ln x}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln x} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$ ✓

(โลปิตาล) $= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} x = \infty \quad \blacksquare$

16.3) $\lim_{x \to 0} x^{x/(x^2-1)}$

พิจารณา. $\ln \left(\lim_{x \to 0} x^{x/(x^2-1)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\ln x^{\frac{x}{(x^2-1)}} \right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x \ln x}{(x^2-1)} \longrightarrow \frac{0 \cdot (-\infty)}{-1}$ ✗

(จัดรูป). $= \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{(x^2-1)/x} \longrightarrow \frac{-\infty}{-\infty}$ ✓ (โลปิตาล.

(ใช้โลปิตาล) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{x(2x)-(x^2-1)}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{x^2+1} \to \frac{0}{0+1} = 0$$

จะได้ $\ln\left(\lim_{x\to 0} x^{x/(x^2-1)}\right) = 0$

ดังนั้น (ยก e ขึ้น) $\lim_{x\to 0} x^{x/(x^2-1)} = e^0 = 1$ ∎

---

② ค่าสูงสุด/ต่ำสุด สัมพัทธ์ ของ $f(x)$

- หาจุดวิกฤต: คือจุดที่ $f'(x)=0$ หรือ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้
- หาช่วง f^n เพิ่ม/ลด. $\quad + \;\; x_1 \;\; - \;\; x_2 \;\; - \;\; x_3 \;\; +$ ← ค่าวิกฤต
- สรุป ค่าสูงสุด $+ / -$ คือจุดวิกฤตที่เปลี่ยน $f'(x)$ $+ \to -$

  ค่าต่ำสุด $- \setminus / +$ คือจุดวิกฤตที่เปลี่ยน $f'(x)$ $- \to +$

13. กำหนด $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ หาอนุพันธ์ได้ โดยค่าวิกฤตทั้งหมดของ $f(x)$ คือ $x = 1, 5$. สมมุติว่า $f(x)$ เพิ่มบน $(-\infty,1] \cup [5,\infty)$ และลดบน $[1,5]$ ถ้าให้ $g(x) = e^{-f(x)+e}$ จงหาว่า $g(x)$ เป็น f^n เพิ่มและลดบนช่วงใดบ้าง.

→ $f(x)$: ค่าวิกฤต $x = 1, 5.$

ช่วง f^n เพิ่ม/ลด :

		1		5	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$

ให้ $g(x) = e^{-f(x)+e}$ จงหาช่วง f^n เพิ่ม/ลด ของ $g(x)$

→ หาจุดวิกฤต $g(x)$ ⇒ $g'(x) = e^{-f(x)+e} \dfrac{d}{dx}(-f(x)+e)$

$$= -f'(x)\underbrace{e^{-f(x)+e}}_{>0}$$

ดังนั้น จุดวิกฤตของ

$g(x)$ คือ $x = 1, 5.$ $(g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=0)$

→ หา ช่วง f^n เพิ่ม/ลด ของ $g(x)$.

		1		5	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$g'(x) = -f'(x)\underbrace{e^{(\;)}}_{>0}$	$-$		$+$		$-$

ดังนั้น $g(x)$ เป็น f^n เพิ่ม บน $[1, 5]$

และ เป็น f^n ลด บน $(-\infty, 1] \cup [5, \infty)$

14. หาค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x) = e^{x^3} - ex^3$

- หาจุดวิกฤติของ $f(x)$: คือจุดที่ $f'(x) = 0$ หรือ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้

$$f'(x) = e^{x^3}\cdot(3x^2) - e(3x^2) = \underbrace{3x^2}_{=0}(\underbrace{e^{x^3} - e}_{=0}) = 0$$

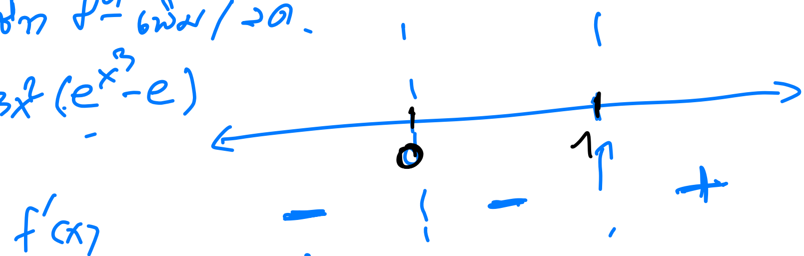
$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $3x^2 = 0$ หรือ $(e^{x^3} - e) = 0$

$x = 0$ $\qquad$ $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

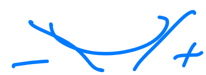
ดังนั้น จุดวิกฤติของ $f(x)$ คือ $x = 0, 1$.

- หาช่วง f^{n} เพิ่ม/ลด.

$f'(x) = 3x^2(e^{x^3} - e)$



$$\underbrace{3x^2}_{>0}\,(\underbrace{e^{x^3} - e}_{<0})$$



- ดังนั้น จุด $x = 1$ เปลี่ยนเครื่องหมาย $f'(x)$ $- \to +$

สรุปว่า $x = 1$ เป็น จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$

(ไม่มี จุดสูงสุดสัมพัทธ์)

ฐ. พหุนามเทย์เลอร์ + พหุนามแมคลอริน.

$$P_n^T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \text{รอบจุด } x = a, \qquad P_n^M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \quad \text{รอบจุด } x = 0$$

ทบทวน. $f(x)$ รอบจุด $x=a$ $\approx P_n^T(x)$ | $f(x)$ รอบจุด $x=0$ $\approx P_n^M(x)$

$\boxed{12}$ ตัวอย่าง $f(x)=\ln(x+1)$.

(12.1) จงหา $P_2^T(x)$ ของ $f(x)$ รอบจุด $x=1$
& 12.2

$$P_2^T(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$$
รอบจุด $x=1$
$$= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

หาค่า $f(1), f'(1), f''(1)$

จาก $f(x)=\ln(x+1) \Rightarrow f(1)=\ln(2)$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(1)=-\frac{1}{4}$$

ดังนั้น $P_2^T(x) = \ln(2) + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1) + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2!}(x-1)^2$
รอบจุด $x=1$

12.3) ใช้ $f(x)=\ln(x+1)$ ประมาณค่า $\ln(2.1)$
(กำหนด $\ln 2 = 0.6931$)

$\ln(2.1)=\ln(1.1+1) = f(1.1) \leftarrow$ อยู่ใกล้ $f(x)$ รอบ $x=1$

ดังนั้น เราสามารถประมาณ $f(x) \approx P_2^T(x)$ รอบจุด $x=1$

จะได้. $\ln(2.1) = f(1.1) \approx \underset{\text{รอบจุด } 1}{P_2^T(1.1)}$

$$= \left(\ln(2) + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1) + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2!}(x-1)^2 \right)\Bigg|_{x=1.1}$$

$$= \underset{\approx 0.6931}{\ln 2} + \frac{1}{2}\cdot\underbrace{(1.1-1)}_{0.1} + -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{(1.1-1)}_{0.1}{}^2$$

$= \ldots$

ทบ.4.3) จง $P_n^M(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^n$

จาก. $f(x) = \ln(x+1) \Rightarrow f(0) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{1}{0+1} = 1$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \dfrac{(-1)\cdot(-2)}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{2\cdot(-3)}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -3!$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{(k-1)}(k-1)!}{(x+1)^k} \Rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{(k-1)}(k-1)!$

ดังนั้น. $P_n^M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\cancel{(k-1)!}}{k\cancel{!}} \cdot x^k$

เนื่องจากที่ $k=0$, $f(0)=0$

สรุปได้. $P_n^M(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}}{k} \cdot x^k$ ■

⇒ การประมาณค่าเชิงเส้น : ของ $f(x)$ รอบจุด $x=x_0$

$f(x)$ รอบจุด $x=x_0$ $\approx L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

(เทย์เลอร์ดีกรี 1.)

$\boxed{\text{ตย}}$ จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้น ประมาณ $3\cos^2(44^\circ)$

กำหนด $\pi = 3.14$

⇒ เลือก $f(x) = 3\cos^2(x)$

และ $x_0 = \frac{\pi}{4}$

จาก. $L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

หา. $f(x_0)$ และ $f'(x_0)$ โดยที่ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ จะได้

$f(x) = 3\cos^2(x) \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = 3\cdot\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}$

$f'(x) = 6\cos(x)(-\sin x) \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = 6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -3$

ดังนั้น $L_{x_0}(x) = \frac{3}{2} + (-3)(x - x_0)$

จะได้ว่า. $3\cos^2(44^\circ) = f(\underbrace{44^\circ}_{=\frac{44\cdot\pi}{180}}) \approx L_{x_0}(\underbrace{44^\circ}_{=\frac{44\pi}{180}})$

โดย $x_0 = \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{3}{2} + (-3)\left(\frac{44\pi}{180} - \underbrace{\frac{45\pi}{180}}_{\frac{\pi}{4}}\right)$$

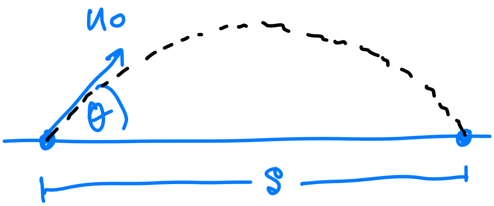
$$= \frac{3}{2} + (-3)\left(\frac{-\pi}{180}\right)$$

$(\pi = 3.14)$. $\approx \frac{3}{2} + \frac{3\cdot(3.14)}{180} = \dots$

$\Rightarrow$ ค่าเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น : $\Delta y \approx dy = y'(x)\,dx$

- ค่าเปลี่ยนแปลงเชิงเส้น $dy \approx \Delta y = y(x_0 + \underbrace{\Delta x}_{= dx}) - y(x_0)$
- ค่าผิดพลาดสัมพัทธ์. $\frac{dy}{y|_{x_0}}$
- ค่าผิดพลาดร้อยละ. $\frac{dy}{y|_{x_0}} \times 100$

$\boxed{10.}$



$$S = \frac{u_0^2 \sin(2\theta)}{g}.$$

ถ้าค่าผิดพลาดร้อยละของ $\theta = 5\%$ จงหาค่าผิดพลาดร้อยละของ S. ที่ $\theta = \frac{\pi}{6}$.

ค่าเปลี่ยนแปลงร้อยละของ S $= \dfrac{ds}{S} \times 100$, $ds = S'(\theta)\,d\theta$

$$= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{u_0^2 \sin(2\theta)}{g}\right) d\theta$$

$$ds = \frac{2u_0^2 \cos(2\theta)}{g}\, d\theta$$

จะได้: ค่าเปลี่ยนแปลงร้อยละของ S เป็น

$$\frac{ds}{S} \times 100 = \frac{\dfrac{2u_0^2 \cos(2\theta)\, d\theta}{g}}{S(\theta)} \times 100 = \frac{\dfrac{2\cancel{u_0^2} \cos(2\theta)}{\cancel{g}}\, d\theta}{\dfrac{\cancel{u_0^2} \sin(2\theta)}{\cancel{g}}} \times 100$$

(ข้อมูล: $\dfrac{d\theta}{\theta} \times 100 = 5$, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$)

$$= \frac{2\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}\, \theta \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{\theta} \times 100}_{=5}$$

ที่ $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 5$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} \cdot \frac{\pi}{\cancel{6}\,3} \cdot 5 = \frac{5\pi}{3\sqrt{3}}$$