⇒ ลิมิตในรูปอินดีเทอร์มิเนต.

เวลาเราหาค่า $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ในกรณีนี้ จะไม่สามารถหาค่าได้โดยตรง.

Ex: $f(x)=2x$, $g(x)=3x$ จะเห็นได้ว่า $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0} g(x)=0$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 0} g(x)} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}\right) = \frac{2}{3}$$

รูปอินดีเทอร์มิเนต. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ (กฎโลปิตาล.)

กฎโลปิตาล: ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ $g'(x)\neq 0$ ที่บริเวณรอบจุด a ยกเว้น.

$\lim_{x\to a} f(x)=0$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=0$. $\rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f}{g}\to\frac{0}{0}$

(หรือ) $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ และ $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ $\rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f}{g}\to\frac{\infty}{\infty}$

แล้ว
$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$
กฎโลปิตาล.

Ex: 1.) หา $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{3x}\right) \rightarrow \frac{0}{0}$ ✓ โลปิตาล.

(โลปิตาล) $= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(2x)}{\frac{d}{dx}(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ ■

2.) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} \to \dfrac{0}{0}$ ✓ โลปิตาล.

(โลปิตาล) $= \lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$ ■

3.) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2} \to \dfrac{\infty}{\infty}$ ✓ โลปิตาล.

(โลปิตาล) $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2x} \to \dfrac{\infty}{\infty}$ - โลปิตาล

(โลปิตาล) $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{d}{dx}(e^x)}{\frac{d}{dx}(2x)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{2} \to \infty$ ■

สรุป: $\boxed{\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}.}$

อธ. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)\to 0}{g(x)\to 0} \cdot 1 \leftarrow \dfrac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{h}}$

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$

$\lim_{x\to a} g(x) = g(a) = 0$

(พิสูจน์) $= \lim_{x\to a} \lim_{\substack{x\to a \\ (h\to 0)}} \dfrac{\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{h}\right)}{\left(\dfrac{g(x)-g(a)}{h}\right)}$, เมื่อ $h = x-a$.

$= \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}.$

⇒ อินดีเทอร์มิเนต: $\infty \cdot 0,\ \infty \pm \infty,\ 0^{0},\ \infty^{0},\ 1^{\infty} \Rightarrow \left(\frac{0}{0} \text{ หรือ } \frac{\infty}{\infty}\right)$

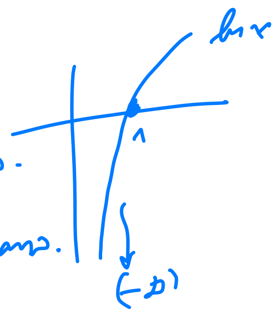
ในรูปแบบอื่น: แปลงเป็น:

Ex: $\lim_{x\to\infty}\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \to \infty \cdot 0$ ✗ โลปิตาล.

$(\text{จัดรูป}) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) \to \frac{0}{0}$ ✓ โลปิตาล.

$$(\text{โลปิตาล}) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cancel{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}}{\cancel{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}} \to \cos(0) = 1 \quad \blacksquare$$



Ex: $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}(\ln x) \to 0\cdot(-\infty)$ ✗ โลปิตาล.

$(\text{จัดรูป}) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \to \frac{-\infty}{\infty}$ ✓ โลปิตาล.

$$(\text{โลปิตาล}) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(-2)x^{-1}\cdot x^{+\frac{3}{2}} = \lim_{x\to 0}(-2)x^{\frac{1}{2}} = 0. \quad \blacksquare$$

Ex: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) \to \dfrac{1}{\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0}} - \dfrac{\cancelto{1}{\sin(\frac{\pi}{2})}}{\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0}}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$(\infty - \infty)$ ✗ לופיטל.

([illegible]) $= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1 - \sin x}{\cos x} \right) \to \dfrac{0}{0}$ ✓ לופיטל.

(לופיטל) $= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{d}{dx}(1 - \sin x)}{\frac{d}{dx}(\cos x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \dfrac{0}{1} = 0$ ■

Ex: $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{1 - e^{-x}} - \dfrac{1}{x} \right) \to \infty - \infty$ ✗ לופיטל.

([illegible]) $= \lim_{x \to 0} \dfrac{x - 1 + e^{-x}}{x(1 - e^{-x})} \to \dfrac{0 - 1 + 1}{0 \cdot (1 - 1)} = \dfrac{0}{0}$ ✓ לופיטל.

(לופיטל) $= \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{d}{dx}(x - 1 + e^{-x})}{\frac{d}{dx}(x - xe^{-x})}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - (-xe^{-x} + e^{-x})} \to \dfrac{0}{0}$ ✓ לופיטל.

([illegible]) $= \lim_{x \to 0} \dfrac{+e^{-x}}{+e^{-x} + (-xe^{-x} + e^{-x})} \to \dfrac{1}{1 + (0 + 1)} = \dfrac{1}{2}$ ■

Ex: $\lim\limits_{x\to 0} x^x \to 0^0$

ระวัง! $\lim\limits_{x\to a}\left(\ln y(x)\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to a} y(x)\right)$

พิจารณา. $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0} x^x\right) = \lim\limits_{x\to 0} \ln\left(x^x\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x \to 0\cdot(-\infty)$

(จัดรูป) $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) \to \dfrac{-\infty}{\infty}$ ✓ โลปิตาล.

(โลปิตาล) $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = 0$

ดังนั้น. $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0} x^x\right) = 0$

จะได้ว่า. (ใส่ $e^\wedge$) $\lim\limits_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$ ■

Ex: $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \to 1^\infty$ ✗ โลปิตาล.

พิจารณา. $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \to \frac{0}{0}$$ ✓ โลปิตาล.

(โลปิตาล)
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\ln(1+x))}{\frac{d}{dx}(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)}}{1} = 1$$

ดังนั้น. $\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$

จะได้: (Ina e^{1}) $\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1} = e$ ∎

รูปแบบอินดีเทอร์มิเนต: โลปิตาล. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

อื่นๆ : $0\cdot(\pm\infty)$, $\infty-\infty$, 0^{0}, ∞^{0}, 1^{∞}. เปลี่ยน

การบ้าน: แบบฝึกหัด Midterm ชุดที่ 3:

15.) จงหาลิมิตต่อไปนี้:

1.) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} \to \frac{\infty}{\infty}$ ✓

2.) $\lim_{x\to 2^-} \frac{2x+4}{x^2-4}$

3.) $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}+1}$

16.) จงหาลิมิต ของ.

1.) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\ln(1-x)} \to \frac{0}{0}$ ✓

2.) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{\ln(x)-1} - \frac{x}{\ln x+1}\right)$

3.) $\lim_{x\to 0} x^{x/(x^2-1)}$