⇒ พิจารณาในรูป อินดีเทอร์มิเนต.

Ex: $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) = 2x$, $g(x) = 3x$.

จะเห็นได้ว่า $F(x) = \dfrac{2x}{3x}$ ไม่นิยามที่ $x = 0$.

แต่ $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}}\right) = \dfrac{2}{3}$

- กรณีไม่นิยามเนื่องจาก $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ที่ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ ที่จุด $x = a$ หรือ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

จะหาค่า $\lim\limits_{x\to a} F(x)$ ได้.

รูปแบบของ $F(x)$ ที่ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ นี้เรียกว่า "อินดีเทอร์มิเนต"

(หมายเหตุ: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) \to \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\right) \to \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

เราจะหาค่าของลิมิต $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ กรณีที่ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{0}{0}$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

กฎโลปิตาล: (กรณี $\to \dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$)

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Ex: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{3x}\right) \to \dfrac{0}{0}$ ✓

(โลปิตาล) $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{d}{dx}(2x)}{\frac{d}{dx}(3x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$ ∎

พิสูจน์: แสดงว่า $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

เพราะ. $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

พิจารณา: $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{f(x)-\overset{f(a)}{0}}{g(x)-\underset{g(a)}{0}}\times 1$, $\displaystyle 1 = \frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{x-a}}$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)}{\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\boxed{Ex:}$ หา. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \to \frac{0}{0}$ ✓ โลปิตาล.

วิธีทำ $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1 \quad \blacksquare$$

$\boxed{Ex:}$ หา. $\displaystyle \lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{1+\cos x} \to \frac{\sin\pi}{1+\cos\pi} = \frac{0}{0}$ ✓ โลปิตาล

วิธีทำ $\displaystyle \lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi}\frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}(1+\cos x)}$

$$= \lim_{x\to\pi}\frac{\cos x}{-\sin x} \to \frac{\cos\pi}{-\sin\pi} \to \frac{1}{-0} = -\infty \quad \blacksquare$$

รูปแบบอื่น: $\infty \pm \infty$, $\infty\cdot 0$, 0^0, ∞^0, 1^∞ $\overset{\text{จัดรูป}}{\Longrightarrow} \left(\frac{0}{0} \text{ หรือ } \frac{\infty}{\infty}\right)$

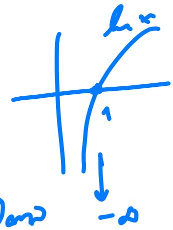
ต้องจัดรูปก่อน เพื่อใช้โลปิตาล.

$\boxed{Ex:}$ $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \to \infty\cdot 0$ ✗ ใช้โลปิตาลไม่ได้.

[illegible] $= \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right) \to \dfrac{0}{0}$ ✓ [illegible]

([illegible]) $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)}$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cancel{(-1)\frac{1}{x^2}}}{\cancel{(-1)\left(\frac{1}{x^2}\right)}} \to \cos(0) = 1$ ∎



Ex: $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\,\ln x \to \underline{0\cdot(-\infty)}$ ✗ [illegible]

([illegible]) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \to \dfrac{-\infty}{\infty}$ ✓ [illegible]

([illegible]) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}}}$

$= \lim_{x\to 0} (-2)x^{-1}\cdot x^{+\frac{3}{2}} = \lim_{x\to 0} (-2)x^{\frac{1}{2}} = 0$ ∎

Ex: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) \to \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$\sec x \downarrow \dfrac{1}{\cos x}$, $\tan x \downarrow \dfrac{\sin x}{\cos x}$: $\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\to (\infty - \infty)$ ✗ [illegible]

([illegible]) $= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{1-\sin x}{\cos x} \right) \to \dfrac{0}{0}$ ✓ [illegible]

$$(\text{โลปิตาล}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{\frac{d}{dx}(\cos x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Ex:}}$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) \to (\infty - \infty)$ อินดีเทอร์มิเนต แต่ใช้โลปิตาลไม่ได้

$$(\text{รวมฟ}) = \lim_{x \to 0} \frac{x - (1-e^{-x})}{x(1-e^{-x})} \to \frac{0}{0} \checkmark$$

โลปิตาล ✓

$$(\text{โลปิตาล}) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(x - (1-e^{-x}))}{\frac{d}{dx}(x(1-e^{-x}))}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-e^{-x}}{1-(-xe^{-x}+e^{-x})} \to \frac{0}{0} \checkmark \text{ โลปิตาล.}$$

$$(\text{โลปิตาล}) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(1-e^{-x})}{\frac{d}{dx}(1-e^{-x}+xe^{-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{+e^{-x}}{+e^{-x}+(-xe^{-x}+e^{-x})} \to \frac{1}{1+0+1} = \frac{1}{2} \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Ex:}}$ $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^{x} \to 0^{0}$ อินดีเทอร์มิเนต แต่ใช้โลปิตาลไม่ได้.

ข้อสรุป: ใช้ระบบนี้. $\lim_{x\to a} \ln y(x) = \ln \lim_{x\to a} y(x)$

จะได้. $\ln\left(\lim_{x\to 0} x^{x}\right) = \lim_{x\to 0} \ln(x^{x})$

$= \lim_{x\to 0} x \ln(x) \to 0\cdot(-\infty)$

(ข้อสรุป.) $= \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) \to \dfrac{-\infty}{\infty}$ ✓ โลปิตาล

(โลปิตาล) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0$

จะได้ $\ln\left(\lim_{x\to 0} x^{x}\right) = 0$

ดังนั้น (เทอม e^1) $\lim_{x\to 0} x^{x} = e^{0} = 1$ ∎

$\boxed{Ex:}$ $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow 1^{\infty}$ ✗ อันดับรูปแบบไม่กำหนด แต่ใช้โลปิตาลไม่ได้

ข้อสรุป: ใช้ระบบนี้. $\ln \lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} \ln(y(x))$

พิจารณา. $\ln\left(\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} \to \dfrac{0}{0}$ ✓ โลปิตาล

(โลปิตาล) $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{(1+x)}}{1} = 1$

จะได้: $\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$

(แทน e^1)

ดังนั้น. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$ $\blacksquare$

การบ้าน: แบบฝึกหัด Midterm ชุด 3.

15.) จงหาลิมิตของ.

1.) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1}$

2.) $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{(2x+4)}{x^2-4}$

3.) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x+1}$

16.) จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้.

1.) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{\ln(1-x)}$

2.) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x-1}-\dfrac{x}{\ln x+1}\right)$

3.) $\lim_{x\to 0}x^{(x/(x^2-1))}$