ตัวอย่าง: แบบฝึกหัด Midterm ชุด 1: ข้อ 15.

จงหาจุดสูงสุด/ต่ำสุดของฟังก์ชัน. $f(x) = (x^2-2x-3)^{\frac{1}{3}}$

⇒ หาจุดวิกฤต: คือจุดที่ $f'(x)=0$ หรือ หาค่าไม่ได้.

จาก $f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2-2x-3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\frac{2x-2}{(x^2-2x-3)^{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{1}{3}\frac{2(x-1)}{((x-3)(x+1))^{\frac{2}{3}}} = 0.$

ดังนั้น: จุดที่ทำให้ $f'(x)=0$ คือ. $x=1$

จุดที่ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ คือ $x=3, -1$

หมายความว่า จุดวิกฤต คือ $x=1, 3, -1$.

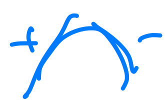
⇒ พิจารณา ฟังก์ชันเพิ่ม/ลด.

$f'(x) = \frac{2}{3}\frac{(x-1)}{((x-3)(x+1))^{\frac{2}{3}}}$

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |

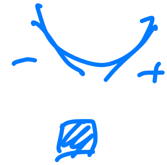
→ สรุป:

• จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือ $f'(x)$ เปลี่ยน $+ \rightarrow -$
ไม่มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์.



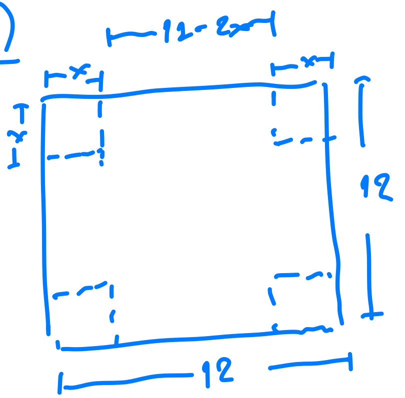
• จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือ $f'(x)$ เปลี่ยน $- \to +$

ดังนั้น จุด $x = 1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์.




---

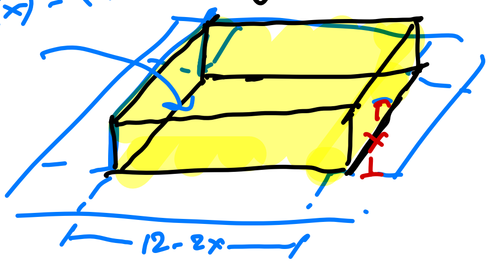
Ex:




$\Rightarrow$

$V(x) = (12-2x)^2 \cdot x$

กล่องฝาเปิด




หาว่าต้องตัด x ออกกี่หน่วย จึงจะได้กล่องฝาเปิด ที่มีปริมาตร <u>มากที่สุด</u>.

จากปริมาตร $V(x) = x(12-2x)^2$

หาค่าสูงสุดของปริมาตร:

① หาจุดวิกฤต: จุดที่ $V'(x) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้.

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{x}_{①}\underbrace{(12-2x)^2}_{②}\right) = x \cdot 2(12-2x)(-2) + (12-2x)^2 \cdot 1$$

$$= (12-2x)\underbrace{\left(-4x + (12-2x)\right)}_{(12-6x)}$$

$$= 12(6-x)(2-x)$$

ดังนั้น จุดวิกฤต คือ $x = 6, 2$

พิจารณาค่ามากสุด. $V(x) = x\cdot(12-2x)^2$

- $x = 6$ จะได้ $V(6) = 6\cdot(12-2\cdot 6)^2 = 0$.
- $x = 2$ จะได้ $V(2) = 2\cdot(12-2\cdot 2)^2 = 2\cdot 64 = 128$

ดังนั้น $x = 2$ จะได้ปริมาตรมากสุดเป็น 128 หน่วย$^3$ ▨

---

⇒ อนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอริน.

<u>นิยาม</u>: ให้ $f(x)$ มีอนุพันธ์ทุกอันดับ ที่ $x_0 = a$ แล้ว "<u>อนุกรมเทย์เลอร์</u>" ของ $f$ รอบจุด $x_0 = a$ จะได้เป็น

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots}$$

ถ้าให้ $x_0 = 0$ แล้วจะเรียกอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด 0 นี้ว่า "<u>อนุกรมแมคลอริน</u>" นั่นคือ

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots}$$

นิยาม: พหุนามเทย์เลอร์ ดีกรี $n$ ของ $f$ รอบจุด $x_0 = a$ คือ

$$P_n^T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(โพลิโนเมียล ดีกรี $n$.)

- พหุนามแมคลอริน ดีกรี $n$ ของ $f$ คือ

$$P_n^M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

หมายเหตุ: $P_n^T(x)$ เมื่อ $n = 1$ จะได้เป็นสมการประมาณค่าเชิงเส้น รอบจุด $x_0 = a$

นั่นคือ $\boxed{P_1^T(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = L_{x_0}(x)}$ ✓

$\Rightarrow$ ในการประมาณค่า $f(x)$ รอบจุด $x_0 = a$ สามารถใช้ $P_n^T(x)$ หรือ ($P_n^M(x)$ รอบจุด $x_0 = 0$) ได้ นั่นคือ

$$\boxed{\underset{\text{รอบจุด } x_0}{f(x) \approx P_n^T(x)}} \quad \text{หรือ} \quad \boxed{\underset{\text{รอบจุด } x_0 = 0}{f(x) \approx P_n^M(x)}}$$

(**)

**Ex:** จงหาพหุนามเทย์เลอร์อันดับ 4 เพื่อประมาณค่าฟังก์ชัน

$f(x) = \ln(3+2x)$ และประมาณค่า $f(0.1)$

- เลือก $x_0 = 0$ จะได้ $P_4^T(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)(x-0)^k}{k!}$

ซึ่ง $P_4^T(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!}$

(รอบจุด $x_0=0$)

ดังนั้น เราต้องหาค่า $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), f^{(4)}(0)$

จาก. $f(x) = \ln(3+2x) \Rightarrow f(0) = \ln(3)$

$f'(x) = \frac{1}{(3+2x)} \cdot 2 \Rightarrow f'(0) = \frac{2}{3}$

$f''(x) = \frac{-2 \cdot 2}{(3+2x)^{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{4}{9}$

$f'''(x) = \frac{(-4)\cdot(-2)}{(3+2x)^3} \cdot 2 \Rightarrow f'''(0) = \frac{16}{27}$

$f^{(4)}(x) = \frac{16 \cdot (-3)}{(3+2x)^4} \cdot 2 \Rightarrow f^{(4)}(0) = \frac{-96}{81}$

แทนค่าใน $P_4^T(x)$ จะได้

$$P_4^T(x) = \ln(3) + \left(\frac{2}{3}\right)\cdot x + \left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{2!}\cdot x^2$$

(รอบจุด $x_0=0$)

$$+ \left(\frac{16}{27}\right)\cdot\frac{1}{3!}\cdot x^3 + \left(-\frac{96}{81}\right)\cdot\frac{1}{4!}\cdot x^4$$

ประมาณค่า $f(0.1) \approx P_4^T(0.1)$

(รอบจุด $x_0=0$)

$$= \ln 3 + \frac{2}{3}\cdot(0.1) + \frac{-2}{9}\cdot(0.1)^2$$

$$+ \frac{16}{27\cdot 3!}\cdot(0.1)^3 + \left(-\frac{96}{81}\right)\cdot\frac{1}{4!}\cdot(0.1)^4$$

---

$\boxed{\text{Ex:}}$ จงประมาณค่าของ $\arctan(1.01)$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ ดีกรี 3.

ให้ $f(x) = \arctan(x)$ , $x_0 = 1$.

หาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 ก่อน.

พหุนามแมคลอริน. ($x_0=0$)

$f(x) = \arctan(x+1)$ ($x_0=0$)

$$P_3^T(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}\cdot(x-1)$$

(รอบจุด $x_0=1$)

$$+ \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

หาค่าของ $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, $f'''(1)$ จะได้ว่า.

$$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{(-1)\cdot(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1) = \frac{-2\cdot 1}{(1+1^2)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f'''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2) - (-2x)2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$\Rightarrow f'''(1) = \frac{-8+16}{16} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น. $P_3^T(x) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)(x-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2!}\cdot(x-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3!}(x-1)^3$

(รอบจุด $x_0 = 1$)

ดังนั้น. $\arctan(1.01) = f(1.01) \approx P_3^T(1.01)$

(รอบจุด $x_0 = 1$)

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(1.01-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2!}\cdot(1.01-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3!}\cdot(1.01-1)^3$$

**การบ้าน**: (แนวข้อสอบ Midterm ชุด 1 ข้อ 17.) จงใช้พหุนามเทย์เลอร์อันดับ 3 ประมาณ $f(x) = xe^x$ รอบจุด $x = 0$ และประมาณค่า $0.01\cdot e^{0.01}$