การบ้าน: 1.) จงหาจุดสูงสุด/ต่ำสุดของ $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-4)$.

2.) $f(x) = (x^2-2x+3)^{\frac{1}{3}}$.

1.) หาจุดสูงสุด/ต่ำสุดของ $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x-4)$

• หาจุดวิกฤต: ต้องดูที่ $f'(x) = 0$ หรือ หาค่าไม่ได้.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{x^{\frac{1}{3}}}_{1}\underbrace{(x-4)}_{2}\right) = \frac{x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} + (x-4)\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\left(x^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} + \frac{(x-4)}{3}\right)$$

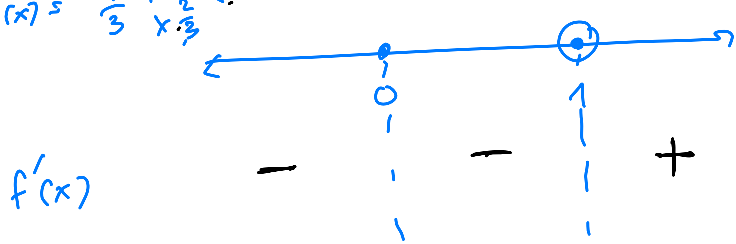
$$= \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{4x-4}{3}\right) = 0.$$

ดังนั้น. $x = 1$ เป็นจุดวิกฤต. : $f'(1) = 0$.

$x = 0$ เป็นจุดวิกฤต. : $f'(0)$ หาค่าไม่ได้

• พิจารณา ฟังก์ชันเพิ่ม/ลด.

$$f'(x) = \frac{4}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}(x-1)$$



จุดสูงสุดสัมพัทธ์ : $f'(x)$ เปลี่ยนจาก $+ \rightarrow -$

ไม่มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์.

จุดต่ำสุดสัมพัทธ์: $f'(x)$ เปลี่ยนจาก $- \rightarrow +$ ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์.

2.7 $f(x) = (x^2-2x+3)^{\frac{1}{3}}$

⇒ หาจุดวิกฤต : จุดที่ $f'(x)=0$ หรือ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2-2x+3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(x^2-2x+3)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}(x^2-2x+3)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(2x-2)}{(x^2-2x+3)^{2/3}} = \frac{2}{3}\frac{(x-1)}{(x^2-2x+3)^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

$= 0$

$(x^2-2x+3) = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$ $<0.$

ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

ดังนั้น จุด $x = 1$ เป็นจุดวิกฤต $\because f'(1) = 0$

⇒ พิจารณา ค่า f' เพิ่ม/ลด.

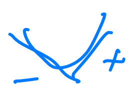
$f'(x) = \frac{2}{3}\frac{(x-1)}{(x^2-2x+3)^{\frac{2}{3}}}$

		1	
$f'(x)$	$-$		$+$

ดังนั้น • จุดสูงสุดสัมพัทธ์ คือจุดที่เปลี่ยน $f'(x)$ จาก $+ \rightarrow -$

(ไม่มีจุดสูงสุดสัมพัทธ์.)

• จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ คือจุดที่เปลี่ยน $f'(x)$ จาก $- \rightarrow +$



ดังนั้น $x = 1$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ☒

⇒ อนุกรมเทย์เลอร์ และอนุกรมแมคลอริน

⇒ ประมาณค่าเชิงเส้น. $f(x)$ รอบจุด x_0

ประมาณค่าด้วย $L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

ถ้าอยากได้ค่าประมาณที่ดีขึ้น?

<u>นิยาม</u>: (อนุกรมเทย์เลอร์ + อนุกรมแมคลอริน).

ถ้า $f(x)$ มีอนุพันธ์ทุกอันดับ ที่ $x_0 = a$ แล้ว.

อนุกรมเทย์เลอร์ ของ $f(x)$ รอบจุด $x_0 = a$ นิยามโดย.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k} = \frac{f^{(0)}(a)\overbrace{(x-a)^0}^{=1}}{\underbrace{0!}_{=1}} + \frac{f^{(1)}(a_0)(x-a)^1}{1!} + \frac{f^{(2)}(a)(x-a)^2}{2!} + \dots$$

$$\underset{(\text{รอบจุด } x_0 = a)}{f(x)} = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{L_{x_0}(x)=} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

และ อนุกรมแมคลอริน คือ อนุกรมเทย์เลอร์ รอบจุด $x_0 = 0$

นั่นคือ

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots$$

หมายเหตุ:

- การประมาณค่าเชิงเส้น คือ อนุกรมเทย์เลอร์ <u>อันดับ 1</u>. ← <u>ตัวที่สองของอนุกรม</u>

$$L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- การประมาณค่าโดยใช้โพลิโนเมียล ของอนุกรมเทย์เลอร์ ตัวที่ n คือ.

$$\boxed{P_n^T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n}$$

- โพลิโนเมียล ของอนุกรมแมคลอริน ตัวที่ n คือ.

$$\boxed{P_n^M(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^n}$$

Ex: จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ และแมคลอรินของ.

$f(x) = \sin(\pi x)$ รอบจุด $x_0 = -\frac{1}{3}$.

จากอนุกรมเทย์เลอร์: $f(x) = \sin(\pi x)$ รอบจุด $x_0 = -\frac{1}{3}$

คือ $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

พิจารณา ที่ $x_0 = -\frac{1}{3}$:

$f(x) = \sin(\pi x) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$f'(x) = \pi\cos(\pi x) \Rightarrow f'\left(-\frac{1}{3}\right) = \pi\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$f''(x) = -\pi^2\sin(\pi x) \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{3}\right) = -\pi^2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$f'''(x) = -\pi^3\cos(\pi x) \Rightarrow f'''\left(-\frac{1}{3}\right) = -\pi^3\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$f^{(4)}(x) = +\pi^4\sin(\pi x) \Rightarrow f^{(4)}\left(-\frac{1}{3}\right) = +\pi^4\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

ดังนั้น. $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}\left(-\frac{1}{3}\right)}{k!}\left(x+\frac{1}{3}\right)^k = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)^1$$

$$+\frac{(-\pi)^2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{(-\pi)^3 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x+\frac{1}{3}\right)^3$$

$$+\ \cdots$$

(ต่อ.)
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}\left(-\frac{1}{3}\right)}{k!}\left(x+\frac{1}{3}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{cases}\dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}}\pi^k\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{k!}\left(x+\frac{1}{3}\right)^k, & k\ \text{คู่} \\[2ex] \dfrac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}\pi^k\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{k!}\left(x+\frac{1}{3}\right)^k, & k\ \text{คี่}\end{cases}$$

การประมาณค่าโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ + แมคลอริน.

ทบ! ถ้าเลือก x ที่อยู่ใกล้จุด a จะสามารถประมาณค่าได้เป็น.

- $f(x) \approx P_n^T(x)$ —— พหุนามเทย์เลอร์ ดีกรี n.
- $f(x) \approx P_n^M(x)$ —— พหุนามแมคลอรินดีกรี n.

Ex: จงหาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 5 ของ $f(x) = \cos(x)$ รอบจุด $x=0$.

จก. $$P_5^T(x) = \sum_{k=0}^{5}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k$$

(กระจาย.) $$= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)(x)^2}{2!} + \frac{f'''(0)\cdot x^3}{3!}$$

$$+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)\,x^5}{5!}$$

พิจารณาที่ $x_0 = 0$:

$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f(0) = \cos(0) = 1$

$f'(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'(0) = -\sin(0) = 0.$

$$f''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f''(0) = -\cos(0) = -1$$

$$f'''(x) = +\sin(x) \Rightarrow f'''(0) = +\sin(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin(x) \Rightarrow f^{(5)}(0) = -\sin(0) = 0.$$

ดังนั้น $$P_5^T(x) = 1 + 0\cdot x + \frac{(-1)\cdot x^2}{2!} + \frac{0\cdot x^3}{3!} + \frac{1\cdot x^4}{4!} + \frac{0\cdot x^5}{5!}$$
(รอบจุด $x_0=0$)

$$P_5^T(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \qquad \blacksquare$$
(รอบจุด $x_0=0$)

Ex: จงหาพหุนามแมคลอรินดีกรี $\underline{4}$ เพื่อประมาณค่า $f(x) = \ln(3+2x)$ และใช้ในการประมาณ $f(0.5)$

วท. $$P_4^M(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)\cdot x}{1!} + \frac{f''(0)\cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0)\cdot x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)\cdot x^4}{4!}$$

พิจารณาที่ $x_0=0$:

$$f(x) = \ln(3+2x) \Rightarrow f(0) = \ln(3)$$

$$\frac{d}{dx} 2\cdot(3+2x)^{-1} = -2(3+2x)^{-2}\cdot 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{(3+2x)}\cdot(2) \Rightarrow f'(0) = \frac{2}{3}$$

$$f''(x) = \frac{-2\cdot 2}{(3+2x)^{+2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{4}{3^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-4\cdot(-2)\cdot 2}{(3+2x)^3} = \frac{16}{(3+2x)^3} \Rightarrow f'''(0) = \frac{16}{3^3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{16\cdot(-3)\cdot 2}{(3+2x)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = \frac{-32\cdot\cancel{3}}{3^{\cancel{4}3}} = \frac{-32}{3^3}$$

ดังนั้น $\Rightarrow P_4^M(x) = \ln 3 + \frac{2}{3}x + \left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{x^2}{2!} + \left(\frac{16}{27}\right)\cdot\frac{x^3}{3!} + \left(\frac{-32}{27}\right)\cdot\frac{x^4}{4!}$

เป็นพหุนามแมคลอรินดีกรีที่ 4 ของ $f(x) = \ln(3+2x)$

ประมาณค่า $f(0.5) \approx P_4^M(0.5)$

$$= \ln 3 + \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) + \left(\frac{-\cancel{4}^{1}}{9}\right)\cdot\frac{1}{2!}\cdot\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$+ \frac{\cancel{8}\cdot 2}{27}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{-\cancel{16}\cdot 2}{27}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$$

$$= \ln 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{18} + \frac{1}{27\cdot 3} - \frac{1}{27\cdot 12} \quad \blacksquare$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.13 (3.3)

จงใช้พหุนามเทย์เลอร์ และ แมคลอรินดีกรีที่ 3 ประมาณค่าของ

$\arctan(1.01)$

[$\Rightarrow$ ต้องกำหนด $f(x)$ เอง.]