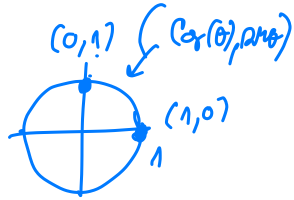
การบ้าน: แบบฝึกหัดชุด 1. ข้อ 11.

จงใช้การประมาณค่าเชิงเส้นประมาณค่าของ $\cos\left(\frac{3}{2}\right)$ เมื่อกำหนด $\pi \approx 3.14$



$\Rightarrow$ ประมาณค่า $f(x+\Delta x) \approx L_{x_0}(x+\Delta x)$.

ให้ $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, $x_0 = \pi$

ให้ $L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

หา $f(x_0)$ จาก $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$f'(x_0)$ จาก $f'(x) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow f'(\pi) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $L_{x_0}(x) = 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - \pi)$

ประมาณค่า $\cos\left(\frac{3}{2}\right) = f(\overbrace{\underset{\pi}{x_0} + \Delta x}^{x}) = \cos\left(\frac{\overbrace{\pi + \Delta x}^{x}}{2}\right)$

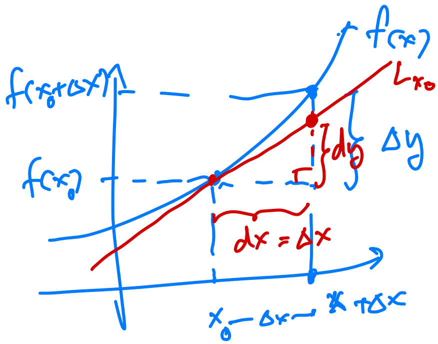
ดังนั้น $\frac{3}{\cancel{2}} = \frac{\overset{3.14}{\pi} + \Delta x}{\cancel{2}}$ ดังนั้น $\Delta x = 3 - 3.14 = -0.14$

จาก $f(x_0+\Delta x) \approx L_{x_0}(x_0+\Delta x) = L_{x_0}(\pi + (-0.14))$

$= 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)(\cancel{\pi} + (-0.14) - \cancel{\pi})$

$= +0.07 \approx \cos\left(\frac{3}{2}\right)$

⇒ สรุป การประมาณค่าด้วยดิฟเฟอเรนเชียล.



$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ เราต้องการประมาณค่า Δy โดยไม่ต้องคำนวณตรง.

$$\frac{dy}{dx} = \text{ความชันของ } L_{x_0} = f'(x_0)$$

ดังนั้น เรียก $\boxed{dy = f'(x_0)dx}$ ว่าเป็นดิฟเฟอเรนเชียล.

โดย $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ สามารถประมาณค่าด้วย dy

Ex: ให้ $y = x^5 + 3x$ จงหา ดิฟเฟอเรนเชียลของ y (dy) และประมาณค่าของ Δy เมื่อ $x_0 = 1$, $dx = 0.1$

• หาดิฟเฟอเรนเชียล.

$$dy = f'(x)dx = \frac{d}{dx}(x^5+5x)dx$$

$$= (5x^4+3)dx$$

• ประมาณค่า Δy ด้วย dy เมื่อ $x_0 = 1$, $\underbrace{dx}_{} = 0.1$

$$\Delta y \approx dy = (5x^4+3)\Big|_{x=1} \cdot \overbrace{0.1}^{dx}$$

$$= (5+3)\cdot 0.1 = 0.8 \longleftrightarrow \approx 0.91$$

(เทียบกับค่าจริง $\Delta y = f(\underset{1+0.1}{x_0+\Delta x}) - f(\underset{1}{x_0}) = ((1.1)^5 + 3(1.1)) - (1^5 + 3\cdot 1)$)

นิยาม:

- ดิฟเฟอเรนเชียล ของ f คือ $df = f'(x)\,dx$
- ค่าผิดพลาดสัมพัทธ์ $\frac{df}{f(x_0)}$
- ค่าผิดพลาดร้อยละ $\frac{df}{f(x_0)} \times 100$.

⇒ Ex: ในการวัดรัศมี r สามารถคำนวณปริมาตรได้เป็น ลบ.ม.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ถ้าวัดรัศมี $r = 5$ เมตร โดยที่มีค่าความผิดพลาดจากการวัดรัศมี เป็น 0.1 ม. ΔV . (dr) ①

จงหา, ค่าผิดพลาดจากการคำนวณ โดยใช้ดิฟเฟอเรนเชียล

และหาค่าความผิดพลาดร้อยละจากการคำนวณ.

$\left(\frac{dV}{V}\times 100\right)$ ②

⇒ หาดิฟเฟอเรนเชียล.

$$dV = \frac{dV}{dr}\cdot dr = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\cdot dr$$

$$\Rightarrow \quad dV = (4\pi r^2)\cdot dr$$

⇒ ประมาณ ΔV ด้วย dV ที่ $r = 5$, $dr = 0.1$ จะได้

$$\Delta V \approx dV = (4\pi r^2)\Big|_{r=5}\cdot 0.1 = 4\pi\cdot 25\cdot 0.1 = 10\pi$$

ดังนั้น ความผิดพลาดของ V จากวิธีดิฟเฟอเรนเชียล เป็น $\pm 10\pi\ m^3$

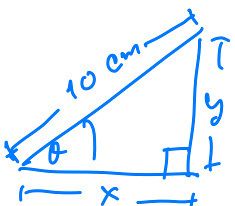
⇒ หาค่าผิดพลาดร้อยละ. $\frac{dV}{V(r_0)}\times 100$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{4\pi r^2}\cdot dr}{\cancel{\frac{4}{3}\pi r^3}}\times 100 = \frac{3}{r}\cdot dr \times 100 = \frac{3\cdot 0.1}{5}\times 100$$

$$= 0.06 \times 100 = 6 \text{ เปอร์เซ็นต์.}$$

∴ ค่าผิดพลาดร้อยละเป็น $\pm 6\%$

Ex: แบบฝึกหัด 2.11 (5.)



วัด θ ได้ 30° ความผิดพลาดจากการวัดเป็น 1°.

จงใช้ดิฟเฟอเรนเชียลประมาณค่าความผิดพลาดด้านที่เหลือทั้งสองด้าน.

ประมาณค่าความผิดพลาด x : หาความสัมพันธ์. $x = 10\cos\theta$

ในแคลคูลัส มุมเป็น rad.

$30^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{6}$

$1^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{180}$

จาก $\Delta x \approx dx = \frac{d}{d\theta}(10\cos\theta)\cdot d\theta$

$$\Rightarrow dx = 10(-\sin\theta)\cdot d\theta.$$

ที่ $\theta = \frac{\pi}{6}$, $d\theta = \frac{\pi}{180}$ จะได้

$$dx = -10\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{180} = -10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}$$

ประมาณค่าความผิดพลาด y : หาความสัมพันธ์. $y = 10\sin\theta$.

มุมเป็น rad!

$\theta = 30^\circ \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$d\theta = 1^\circ \Rightarrow d\theta = \frac{\pi}{180}$

จาก $\Delta y \approx dy = \frac{d}{d\theta}(10\sin\theta)\cdot d\theta$

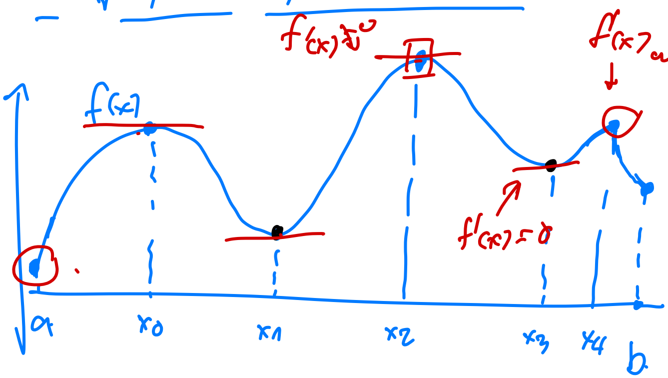
$$\Rightarrow dy = 10\cos\theta\cdot d\theta$$

สำหรับที่ $\theta = \frac{\pi}{6}$, $d\theta = \frac{\pi}{180}$ จะได้

$$dy = 10\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\pi}{180} = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \quad \blacksquare$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.11 (4.)

⇒ ค่าสูงสุด/ต่ำสุด ของฟังก์ชัน..



- ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (local maximum.)

  จุด x_0, x_2, x_4

- ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (local minimum.)

  จุด a, x_1, x_3, b.

- สูงสุดสัมบูรณ์ (Global Max.)

  x_2

- ต่ำสุดสัมบูรณ์.

  a.

$f(x)$ มีโดเมน $[a,b]$.

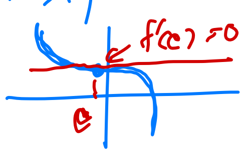
นิยาม: (จุดวิกฤต.)

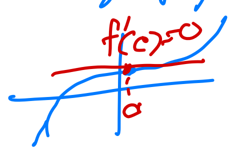
จะเรียกจุด c ที่ทำให้

$f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้ ว่าเป็นจุดวิกฤต

หมายเหตุ: จุดวิกฤต ไม่จำเป็นต้องเป็นจุดสูงสุด/ต่ำสุด สัมพัทธ์.

Ex:

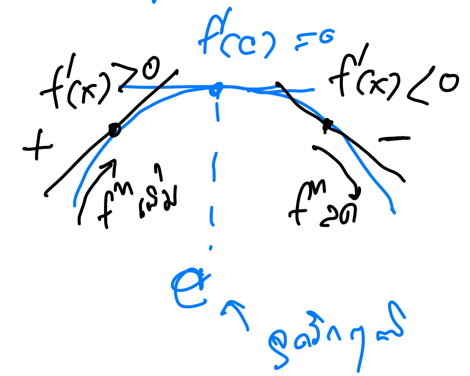




จุด c ไม่เป็นจุดสูงสุด/ต่ำสุด แต่เป็นจุดวิกฤต.

⇒ การ check ค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ (ใช้ฟังก์ชันเพิ่ม/ลด.)

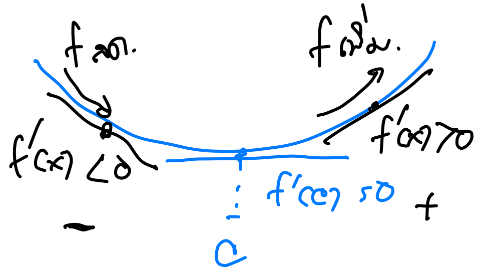
จุดสูงสุดสัมพัทธ์:



คือ จุดวิกฤต c ที่ f^n เปลี่ยน จาก เพิ่ม → ลด.

$f'(x)$ + → −

จุดต่ำสุดสัมพัทธ์.



คือ จุดวิกฤต c ที่ f^n เปลี่ยน จาก ลด → เพิ่ม

$f'(x)$ − → +

Ex: หาจุดสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ของ

$$f(x) = x^3 - 12x - 5$$

• หาจุดวิกฤตของ $f(x)$ คือ จุดที่ทำให้ $f'(x) = 0$ หรือหาค่าไม่ได้

พิจารณา $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^3 - 12x - 5) = 3x^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{12}{3} = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ เป็นจุดวิกฤตของ $f(x)$

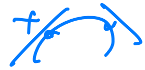
• หาช่วง f^n เพิ่ม/ลด.

$f'(x) = 3x^2 - 12$

	−3	−2	0	2	3
$f'(x)$	+		−		+

• ສະຫຼຸບ: ຈຸດຕ່ຳສຸດສົມພັດ: ຄືຈຸດວິກິດທີ່ເປັ່ຽນ $f'(x)\ - \rightarrow +$ 

ທີ່ຈຸດ $x=2$. ເປັນຈຸດຕ່ຳສຸດສົມພັດ.

ຈຸດສູງສຸດສົມພັດ: ຈຸດວິກິດທີ່ເປັ່ຽນ $f'(x)\ + \rightarrow -$ 

ທີ່ຈຸດ $x=-2$ ເປັນຈຸດສູງສຸດສົມພັດ

$\boxed{\text{Ex:}}$ ຈົ່ງຫາ ຄ່າສູງສຸດ/ຕ່ຳສຸດ ສົມພັດ(ຖ້າມີ) ຂອງ

$$f(x) = x^{3/5}(4-x)$$

• ຫາຈຸດວິກິດ: ທີ່ຈຸດທີ່ໃຫ້ $f'(x)=0$ ຫຼື $f'(x)$ ຫາຄ່າບໍ່ໄດ້.

ພິຈາລະນາ $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{5}}(4-x)\right) = \frac{d}{dx}\left(4\cdot x^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{8}{5}}\right) = 0$

$$\Rightarrow 4\cdot\frac{3}{5}x^{\left(\frac{3}{5}-1\right)} - \frac{8}{5}x^{\frac{8}{5}-1} = \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{8}{5}\cdot x^{\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow x^{-\frac{2}{5}}\left(\frac{12}{5} - \frac{8}{5}\cdot x^{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}}\right) = \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}\left(\frac{12}{5} - \frac{8}{5}x\right) = 0 \quad \leftarrow (x \neq 0)$$

ຈຸດວິກິດ: ຈຸດທີ່ $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{12}{\cancel{5}} - \frac{8}{\cancel{5}}x = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \checkmark$$

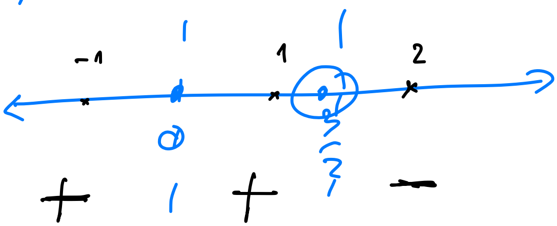
ຈຸດທີ່ $f'(x)$ ຫາຄ່າບໍ່ໄດ້.

$\Rightarrow x=0$, ເປັນຈຸດວິກິດ.

ດັ່ງນັ້ນ $x = 0, \frac{3}{2}$ ເປັນຈຸດວິກິດຂອງ $f(x)$

• ພິຈາລະນາ f^n ເພີ່ມ / ລົດ.

$$f'(x) = \frac{4}{5 \cdot x^{\frac{2}{3}}}(3-2x)$$



$f'(x)$

• ສະຫຼຸບ: ▪ ຈຸດຕໍ່າສຸດສຳພັດ ຄື ຈຸດທີ່ກາຟ ປ່ຽນ $f'(x)$ $- \to +$ $-$ $+$

: ບໍ່ມີຈຸດ ຕໍ່າສຸດສຳພັດ.

▪ ຈຸດສູງສຸດສຳພັດ ຄື ຈຸດທີ່ກາຟ ປ່ຽນ $f'(x)$ $+ \to -$

: ຈຸດ $x = \frac{3}{2}$ ເປັນຈຸດສູງສຸດ ສຳພັດ:

ການບ້ານ: ແບບຝຶກຫັດ Midterm ຊຸດ 1: ຂໍ້ 15.

ຊອກຫາຈຸດ ສູງສຸດ/ຕໍ່າສຸດ ຂອງ ສຳພັດ. $f(x) = (x^2-2x-3)^{\frac{1}{3}}$