=> การบ้าน: 1.) ลูกโป่ง ทรงกลม.

a.) ต้องการให้ลูกโป่ง ขยายตัว ด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี คงที่ เป็น 1 cm/วินาที. $\frac{dr}{dt} = 1$

จงหาว่า จะต้อง สูบลม ด้วย อัตรา เท่าใด.?

$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

b.) ในทางกลับกัน ถ้าให้อัตราการสูบลมคงที่ เป็น 1 cm^3/วินาที. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี ลูกโป่ง.

=> หาความสัมพันธ์: ① หาตัวแปรที่เกี่ยวข้อง V, r, t

② chain rule: $\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{①} = \underbrace{\frac{dV}{dr}}_{②} \cdot \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{③}$

a.) โจทย์ให้มา $\frac{dr}{dt} = 1$ (③) หา $\frac{dV}{dt} = ?$ (①)

=> หาความสัมพันธ์ $V(r)$ เพื่อหา $\frac{dV}{dr}$

จาก $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ ดิฟ => $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

ดังนั้น จาก chain rule: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$

(แทนค่า) $= (4\pi r^2) \cdot 1$

ดังนั้น จะต้องสูบลมด้วยอัตรา $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2$ cm^3/วินาที

b.) ในทางกลับกัน กำหนด $\frac{dV}{dt} = 1$ cm^3/วินาที หา $\frac{dr}{dt}$

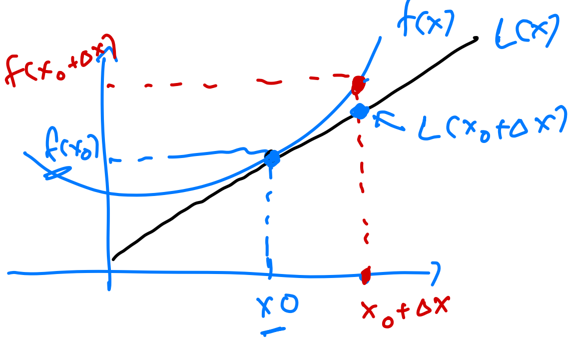
จากความรู้มัธยมปลาย $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

chain rule: $$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

(แทนค่า) $\Rightarrow$ $$1 = (4\pi r^2)\cdot \frac{dr}{dt}$$

ดังนั้น $$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}$$ cm/วินาที. ∎

$\Rightarrow$ การประมาณค่าเชิงเส้น และ ดิฟเฟอเรนเชียล.



$f(x)$ หาค่าได้ยาก. แต่เรามีข้อมูลของ $f(x_0)$.

ต้องการ: ประมาณค่า $f(x_0+\Delta x)$ $\boxed{\approx L_{x_0}(x_0+\Delta x)}$

$\Rightarrow$ สร้าง $L_{x_0}(x) = \underset{\uparrow\, f'(x_0)}{m}x + c = f'(x_0)x + c$

ผ่านจุด $(x_0, f(x_0)) \Rightarrow f(x_0) = L_{x_0}(x_0) = f'(x_0)x_0 + c$

$\Rightarrow c = f(x_0) - f'(x_0)x_0$

ดังนั้น $L_{x_0}(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$

$$\boxed{L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

ดังนั้น $\Rightarrow f(x_0+\Delta x) \approx L_{x_0}(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)(\cancel{x_0}+\Delta x - \cancel{x_0})$
$= f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

$$\Rightarrow \boxed{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}$$

Ex: จงหาการประมาณค่าเชิงเส้นของ $f(x) = \sqrt{x+1}$ รอบจุด $x_0 = 0$

หา $L_{x_0}(x) = ??$

จาก. $L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

แต่. $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\right) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $L_{x_0}(x) = \sqrt{x_0+1} + \frac{1}{2}(x_0+1)^{-\frac{1}{2}}(x - x_0)$

รอบจุด $x_0 = 0$: $\Rightarrow L_{x_0}(x) = 1 + \frac{1}{2}(x)$

ดังนั้น. $f(x) = \sqrt{x+1} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ รอบจุด $x_0 = 0$.

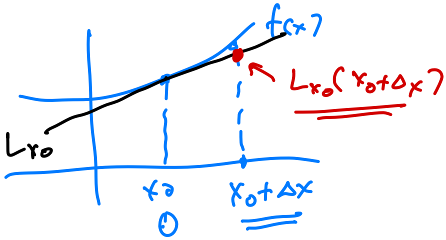
อาจนำไปใช้ ถ้าต้องการประมาณค่า.

$\sqrt{1.2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.2$

เพราะ $\sqrt{1.2} = f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{1 + (\underbrace{x_0}_{=0} + \underbrace{\Delta x}_{=0.2})}$

ดังนั้น $\sqrt{1.2} = f(0 + 0.2) \approx L_{x_0}(0 + 0.2) = 1 + \frac{1}{2}(0 + 0.2)$

$= 1 + 0.1 = 1.1$



Ex: หาประมาณค่า $\sqrt{2.02}$ ด้วย $f(x)$ ที่เหมาะสมหาค่านี้:

① $f_1(x) = \sqrt{2+x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.02$

② $f_2(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.02$.

③ $f_3(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.02$

$\Rightarrow$ เลือก. ① $\Rightarrow$ หา $L_{①}(x) = f_1(x_0) + f_1'(x_0)(x-x_0)$

จาก. $f_1'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{2+x} = \frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $L_{①}(x) = \sqrt{2+0} + \frac{1}{2}(2+0)^{-\frac{1}{2}}(x-0)$

$(x_0 = 0)$

$\Rightarrow L_{①}(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x)$

ค่าของ. $\sqrt{2.02} = f(0+0.02) \approx L_{①}(0+0.02)$

$= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(0.02)$

$\Rightarrow$ เลือก ② $\Rightarrow$ หา $L_{②}(x) = f_2(x_0) + f_2'(x_0)(x-x_0)$

โดยที่ $f_2(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 2$.

$f_2'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

ดังนั้น. $L_{②}(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x-2)$

$= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)$

และค่า $\sqrt{2.02} = f_2(2+0.02) \approx L_{②}(2+0.02)$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cancel{2}+0.02-\cancel{2}\right)$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 0.02$$

Ex: จงหาการประมาณค่าเชิงเส้นของ $f(x) = \sqrt{x+3}$ ที่ $x_0 = 1$ และใช้ในการประมาณค่า $\sqrt{3.98}$, $\sqrt{4.05}$

จาก $L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

จาก $f(x) = \sqrt{x+3} \implies f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}$

ดังนั้น $L_{x_0}(x) = \sqrt{x_0+3} + \frac{1}{2}(x_0+3)^{-\frac{1}{2}}(x - x_0)$

$(x_0 = 1)$ $\quad = \sqrt{1+3} + \frac{1}{2}(1+3)^{-\frac{1}{2}}(x-1)$

① $\implies \boxed{L_{x_0}(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1)}$

จะได้ $f(x) \approx L_{x_0}(x)$ รอบจุด $x_0 = 1$.

- ประมาณค่า $\sqrt{3.98}$ จาก $f(x) = \sqrt{x+3}$, $x_0 = 1$

จะได้ว่า $f(x_0 + \Delta x) = f(1+\Delta x) = \sqrt{1+\Delta x+3} = \sqrt{3.98}$

ดังนั้น $\Delta x + 4 = 3.98 \implies \boxed{\Delta x = -0.02}$ ②

③

จะได้ว่า $\sqrt{3.98} = f(1+(-0.02)) = \boxed{f(0.98) \approx L_{x_0}(0.98)}$

$= 2 + \frac{1}{4}(0.98 - 1)$

$$= 2 - \frac{0.02}{4}$$

- ประมาณค่า $\sqrt{4.05}$ จาก $f(x) = \sqrt{x+3}$, $x_0 = 1$

หาได้ $f(x_0+\Delta x) = f(1+\Delta x) = \sqrt{\underline{1+\Delta x+3}} = \sqrt{\underline{4.05}}$

ดังนั้น $\Delta x + 4 = 4.05 \Rightarrow \Delta x = 4.05 - 4 = 0.05$

จะได้ $\sqrt{4.05} = f(\underbrace{1+(0.05)}_{(x_0+\Delta x)}) = f(1.05) \approx L_{x_0}(1.05)$

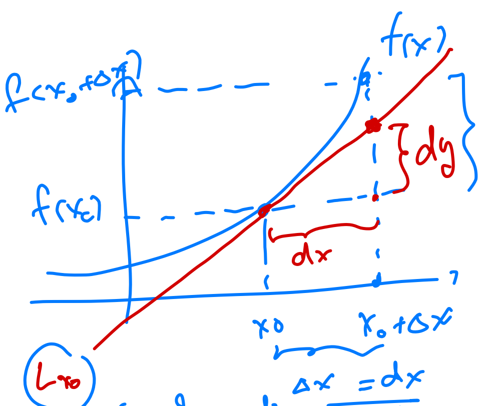
$$= 2 + \frac{1}{4}(1.05 - 1) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0.05$$

$$\Rightarrow f(x) \approx L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x) \approx L_{x_0}(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)(\cancel{x_0}+\Delta x-\cancel{x_0})$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x} \quad \text{—} (**)$$

$\Rightarrow$ การประมาณค่าด้วย ดิฟเฟอเรนเชียล



$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

ประมาณค่า $\Delta y \approx dy$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{dy = f'(x_0)\,dx}$$

ดิฟเฟอเรนเชียล

หรือ การหาค่าประมาณค่าของ

$$\boxed{\Delta y \approx dy = f'(x_0)\,dx = f'(x_0)\,\Delta x}$$

Ex: ให้ $y = x^5 + 3x$ จง.

a.) ดิฟเฟอเรนเชียลของ y. $\Rightarrow dy = y'(x)\,dx$

ดังนั้น $dy = \frac{d}{dx}(x^5 + 3x)\,dx$

$\Rightarrow dy = (5x^4 + 3)\,dx$ ดิฟเฟอเรนเชียล.

b.) หาค่าของ dy เมื่อ $x = 1$ และ $dx = 0.1$.

$dy = (5(1)^4 + 3)\cdot 0.1 = 0.8$.

c.) หาค่าของ $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ เมื่อ $x = 1$, และ $\Delta x = 0.1$

$\Delta y = y(1.1) - y(1) = (1.1^5 + 3\cdot(1.1)) - (1^5 + 3\cdot 1)$

≈ 0.91 ค่าที่แท้จริงได้จาก.

จะเห็นได้ว่า,

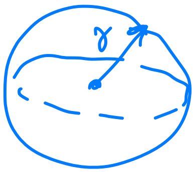
$\underline{0.91} = \Delta y \approx dy = \underline{0.8}$

$\Rightarrow$ นิยาม: เรียก $dy = f'(x)\,dx$ ว่า ดิฟเฟอเรนเชียล

เรียก $\frac{dy}{y(x_0)}$ ว่า ความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์.

เรียก $\dfrac{dy}{y\text{ จริง}} \times 100$ ว่า ความผิดพลาดร้อยละ

⇒ **Ex:**



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

ถ้าทรงกลมมีรัศมี 5 เมตร
โดยที่ความผิดพลาดจากการวัด เป็น 0.1 m
จงประมาณค่าความผิดพลาด ของปริมาตร จากการคำนวณ (โดยใช้ดิฟเฟอเรนเชียล)
และหาค่าผิดพลาดร้อยละ?

⇒ จากดิฟเฟอเรนเชียล จะได้ว่า ค่าความคลาดเคลื่อน $\Delta V \approx dV$

$$dV = \frac{dV}{dr}\cdot dr = \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{dr}\cdot dr$$

⇒ $dV = 4\pi r^2 \cdot dr$, dr ค่าผิดพลาดจากการวัดรัศมี $= 0.1$

จะได้ว่า $dV = 4\pi r^2 \cdot 0.1 = 0.4\pi r^2$

⇒ หาความผิดพลาดร้อยละ

⇒ $$\frac{dV}{V}\times 100 = \frac{0.4\cancel{\pi r^2}}{\frac{4}{3}\cancel{\pi r^{3}}\,r} = \frac{0.3}{r}\times 100$$

เช่นที่ $r = 5$ m. จะได้ ความผิดพลาดร้อยละ $= \frac{0.3}{\cancel{5}}\times \cancel{100}^{20}$

$= 6\%$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.11 (4 + 5.)