การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.9. (1.6 + 1.8 + 1.14 + 1.16)

หา y' เช่อ.

$\boxed{1.6}$ $y = e^{-2x}\cos(2x)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{e^{-2x}}_{1}\cdot\underbrace{\cos(2x)}_{2}\right)$$

$$= e^{-2x}\frac{d}{dx}\cos(2x) + \cos(2x)\frac{d}{dx}\left(e^{-2x}\right)$$

(chain rule) $$= e^{-2x}(-\sin(2x))\frac{d\,2x}{dx} + \cos(2x)\,e^{-2x}\frac{d(-2x)}{dx}$$

$$= -2e^{-2x}\sin(2x) + (-2)e^{-2x}\cos(2x)$$

$\boxed{1.8}$ $y = 2^{\sec x}$ ($u = \sec x$)

$$\frac{d}{du}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2^{\sec x}\frac{d\sec x}{dx}$$

$$= \ln 2\; 2^{\sec x}\sec x\tan x$$

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

$$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$$

$\boxed{1.14}$ $y = 3^{\log_2 x}$ ($u = \log_2 x$)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{\log_2 x}\ln 3\,\frac{d(\log_2 x)}{dx} = (\ln 3)\,3^{\log_2 x}\cdot\frac{1}{x\ln 2}$$

$\boxed{1.16}$ $y = \log_3(e^x+1)$ ($u = e^x+1$)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(e^x+1)\ln 3}\cdot\frac{d(e^x+1)}{dx} = \frac{1}{(e^x+1)\ln 3}(e^x)$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.8 (1.3 + 3.3). Implicit diff.

$\boxed{1.3}$ หา $\dfrac{dy}{dx}$ ของ $\sin(x^2y^2) = x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\sin(x^2y^2)\right) = \frac{d}{dx}x$$

(chain rule)

$$\Rightarrow \cos(x^2y^2)\frac{d}{dx}(\underbrace{x^2}_{①}\underbrace{y^2}_{②}) = 1$$

(กฎผลคูณ.)

$$\Rightarrow \cos(x^2y^2)\left[x^2(2y)\frac{dy}{dx} + y^2(2x)\right] = 1$$

จัดรูป.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left[1 - y^2(2x)\cdot\cos(x^2y^2)\right]}{x^2(2y)\cos(x^2y^2)}$$

3.3) หาความชันของเส้นโค้งที่จุดที่กำหนด.

$(x^2+y^2)^2 = (x-y)^2$ ที่จุด $(1,-1)$

ความชันเส้นโค้ง $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)} \leftarrow$ ความชันที่ $(x=1, y=-1)$

ก่อนหา $\dfrac{dy}{dx}$ จาก $(x^2+y^2)^2 = (x-y)^2$

(Imp. diff) $\Rightarrow \dfrac{d}{dx}(x^2+y^2)^2 = \dfrac{d}{dx}(x-y)^2$.

$$\Rightarrow 2(x^2+y^2)\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = 2(x-y)\frac{d}{dx}(x-y)$$

$$\Rightarrow \cancel{2}(x^2+y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = \cancel{2}(x-y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)$$

(ต่อ) $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}\left[2y(x^2+y^2)+(x-y)\right] = (x-y)-2x(x^2+y^2)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left[(x-y)-2x(x^2+y^2)\right]}{2y(x^2+y^2)+(x-y)}$$

ดังนั้น $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)} = \frac{\left[(1-(-1))-2(1)(1+(-1)^2)\right]}{\left[2\cdot(-1)(1^2+(-1)^2)+(1-(-1))\right]}$$

$$= \frac{2-4}{-4+2} = 1 \quad ◼$$

$\Rightarrow$ อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน $(\arcsin(x), \arccos(x))$

- $f(x) = \arcsin(x)$ จงหา $\dfrac{d}{dx}(\arcsin x) = \ldots ?$

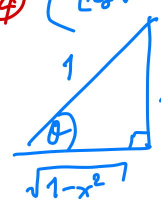
ให้ $\underline{\theta} = \underline{\arcsin(x)}$

take sin $\Rightarrow \sin\theta = \sin(\arcsin(x))$

$\Rightarrow$ ① $\boxed{\sin\theta = x}$ $(*)$

$\dfrac{d}{dx}\arcsin x = \dfrac{d}{dx}\theta$ = ต้องหา $\dfrac{d}{dx}\theta$.

④ $\left(\cos\theta = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1}\right)$



Imp. diff; ② $\dfrac{d}{dx}(\sin\theta) = \dfrac{d}{dx}(x)$

$$\Rightarrow \cos\theta\,\frac{d\theta}{dx} = 1$$

ดังนั้น ③ $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \dfrac{d\arcsin x}{dx} = \dfrac{1}{\cos(\theta)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Sjos. $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{d \arcsin x}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

chain rule: $\boxed{\dfrac{d \arcsin(u)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \dfrac{du}{dx}}$

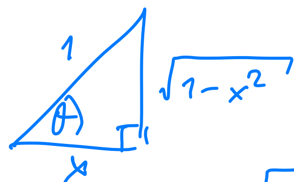
$\Rightarrow$ $f(x) = \arccos(x)$ ur. $\dfrac{d \arccos(x)}{dx} = \dots$?

Let $\theta = \arccos(x) \Rightarrow \dfrac{d \arccos(x)}{dx} = \underline{\dfrac{d\theta}{dx}}$

Ina cos(·) $\Rightarrow$ $\boxed{\cos\theta = x}$

Imp. diff $\Rightarrow$ $\dfrac{d}{dx}(\cos\theta) = \dfrac{d}{dx}(x)$

$\Rightarrow -\sin\theta \dfrac{d\theta}{dx} = 1$



$\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$

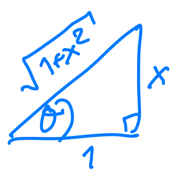
Sa gl. $\Rightarrow$ $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{-1}{\sin\theta}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{d}{dx} \arccos(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$ Sar.

chain rule: $\boxed{\dfrac{d}{dx} \arccos(u) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \dfrac{du}{dx}}$

$\Rightarrow$ $f(x) = \arctan(x) \Rightarrow \dfrac{d}{dx} \arctan(x) = \dots$?

Let $\theta = \arctan(x)$

ina tan(·) $\Rightarrow$ $\boxed{\tan(\theta) = x}$ $\rightarrow$



$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Imp. diff: $\Rightarrow \dfrac{d}{dx}(\tan\theta) = \dfrac{d}{dx}(x)$

$$\sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = 1$$

สูตร.

สรุป $\Rightarrow \dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta \Rightarrow \boxed{\dfrac{d\arctan x}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}}$

chain rule: $\boxed{\dfrac{d}{dx}\arctan(u) = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}}$

สูตร: $\boxed{\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}}$, $(|x|>1)$ $\Rightarrow$ chain rule $\boxed{\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(u) = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}}$

สูตร: $\boxed{\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccosec}(x) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}}$ $(|x|>1)$ $\Rightarrow$ chain rule: $\boxed{\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccosec}(u) = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}}$

สูตร $\boxed{\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}}$ $\Rightarrow$ chain rule $\boxed{\dfrac{d}{dx}\operatorname{arccot}(u) = \dfrac{-1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}}$

Ex: แบบฝึกหัด. $\boxed{2.10}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ

1.) $y = \arcsin(2x^2)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\arcsin\underbrace{(2x^2)}_{u}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2)^2}}\frac{d(2x^2)}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(2x^2)^2}}\cdot(4x) \qquad \blacksquare$$

2.) $y = 5\arctan(3x)$

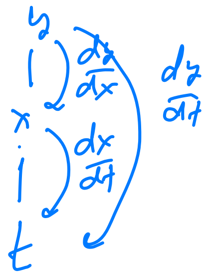
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(5\arctan(\overset{u}{3x})\right)$$

$$= 5\,\frac{1}{1+(3x)^2}\cdot\frac{d(3x)}{dx} = \frac{15}{1+(3x)^2}$$

<u>การบ้าน</u>: แบบฝึกหัด 2.10 (8 + 10).

$\Rightarrow$ อัตราสัมพัทธ์ (Related Rates). ประยุกต์ของ chain rule:

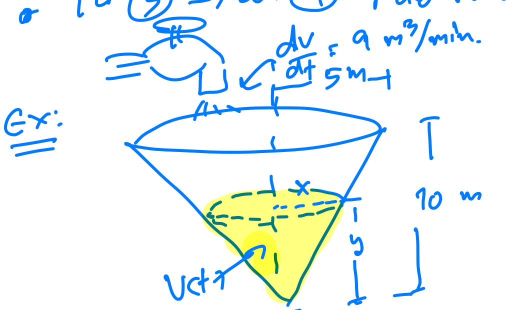
ตัวแปร: y, x, t



chainrule: $$\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{①} = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{②}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{③}$$

- ใช้ ① หา ③ โดยใช้ความสัมพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ เข้าช่วย.
- ใช้ ③ หา ① โดยใช้ความสัมพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ เข้าช่วย.

Ex:



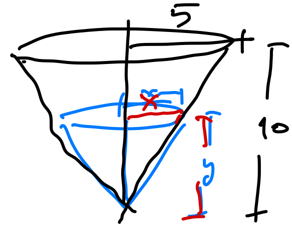
โจทย์ให้อัตราการเติมน้ำลงไป $\frac{dV}{dt} = 9\ m^3/min$

โจทย์ให้หา อัตราการเปลี่ยนแปลงความสูงของระดับน้ำ ต่อเวลา $\frac{dy}{dt} = ?$

ตัวแปร: V, y, t
(ปริมาตร) (ความสูง) (เวลา)

$\Rightarrow$ chain rule $$\underbrace{\frac{dV}{dt}}_{①} = \underbrace{\frac{dV}{dy}}_{②}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{3}$$

ตัวอย่าง 1. ① : $\frac{dV}{dt} = 9$ ต้องการ $\frac{dy}{dt}$



ต้องการ $\frac{dV}{dy}$ (โดยหา ความสัมพันธ์ระหว่าง $V(y)$)

$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot y$

จาก $V(y) = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot y = \frac{1}{3}\cdot\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 \cdot y$

จาก Δ คล้าย $\frac{x}{y} = \cancel{\frac{5}{10}}\ \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{y}{2}$

$\Rightarrow V(y) = \frac{\pi y^3}{12}$

ดังนั้น $\frac{dV}{dy} = \frac{\cancel{3}\pi y^2}{\cancel{12}\,4} = \frac{\pi y^2}{4}$

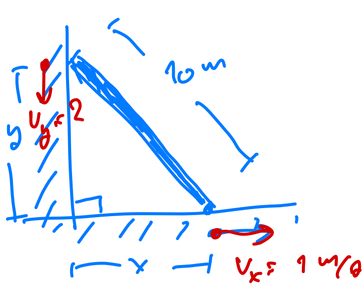
จาก $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} \xRightarrow{\text{แทนค่า}} 9 = \frac{\pi y^2}{4}\cdot\frac{dy}{dt}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dt} = \frac{9\cdot 4}{\pi y^2}$

Ex. ถ้าพิจารณา อัตราการเปลี่ยนแปลงความสูงที่ $y = 6$ m จะได้

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=6} = \frac{9\cdot 4}{\pi\cdot 6^2} = \frac{1}{\pi} \quad \blacksquare$$

Ex:-



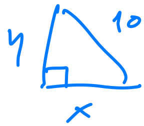
ถ้าบันได ปลายด้านพื้นออก ด้วย $v_x = 1$ m/s.
จงหา อัตราการเลื่อนลง ของปลายด้านพิงผนัง
เป็นเท่าใด ? $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ?$

ตัวแปร: x, y, t

chain rule: $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}$

(ต่อ) $\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{①} = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{②} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{③}$ โจทย์ $\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{③} = 1$ ม./วิ. หา ① $\frac{dy}{dt}$

ต้องหา $\frac{dy}{dx}$ โดย หาความสัมพันธ์ $y(x) = ?$



$\Rightarrow$ ความสัมพันธ์ $y^2 + x^2 = 10^2$ หา $\frac{dy}{dx}$

วิธีคิด. $y = \sqrt{100 - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(100-x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(100-x^2)$

$$= \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}(100-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ดังนั้น. $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{(100-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

แทนค่าใน chain rule: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

จะได้ $\frac{dy}{dt} = \left(\frac{-x}{(100-x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$

ถ้าหา $\frac{dy}{dt}$ เมื่อ $x = 6$ ม. จะได้. $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=6} = \frac{-6}{(100-36)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$ ม./วิ

ตัวอย่าง:

ลูกโป่ง ทรงกลมรัศมี r.

a.) ถ้าเป่าลมด้วยอัตราเร็วคงที่ หา $\frac{dr}{dt}$

b.) ถ้าในทางกลับกัน อยากให้ลูกโป่งโตด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลงรัศมี $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ คงที่ หาอัตราการเป่าลม. $\frac{dV}{dt}$