การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.9 (1.6 + 1.8)

1. หา $\frac{dy}{dx}$ ของ

1.6) $y = e^{-2x}\cos(2x)$

1.8.) $y = 2^{\sec x}$

1.12) $y = \ln(\ln x)$

1.14) $y = 3^{\log_2 x}$

แบบฝึกหัด 2.8:

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของ 1.3). $\sin(x^2y^2) = x$

3. จงหา สมการเส้นสัมผัส ของเส้นโค้ง 3.3) $(x^2+y^2)^2 = (x-y)^2$ ที่จุด $(1,-1)$

1.6). $y = e^{-2x}\cos(2x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\underbrace{e^{-2x}}_{1}\underbrace{\cos(2x)}_{2}\right)$$

(อนุพันธ์ผลคูณ) $= e^{-2x}\frac{d}{dx}\cos(2x) + \cos(2x)\frac{d}{dx}(e^{-2x})$

$$= e^{-2x}(-\sin(2x))\frac{d}{dx}(2x) + \cos(2x)\cdot e^{-2x}\frac{d(-2x)}{dx}$$

$$= -e^{-2x}\sin(2x)\cdot 2 + \cos(2x)\cdot e^{-2x}\cdot(-2)$$

1.8.) $y = 2^{\sec x}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^u) = a^u\ln a\,\frac{du}{dx}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2^{\sec x}\right)$$

$$= 2^{\sec x} \ln 2 \frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$= 2^{\sec x} \ln 2 \cdot \sec x \tan x \qquad \blacksquare$$

1.12) $y = \ln(\ln x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \ln(\ln x)$$

(chain rule) $$= \frac{1}{\ln(x)} \frac{d}{dx}(\ln x)$$

$$= \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \qquad \blacksquare$$

1.14) $y = 3^{\log_2 x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3^{\overbrace{\log_2 x}^{u}}\right)$$

(chain rule) $$= 3^{\log_2 x} \ln 3 \cdot \frac{d}{dx} \log_2 x$$

$$= 3^{\log_2 x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{x \ln 2} \qquad \blacksquare$$

แบบฝึกหัด 2.8 :

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของ 1.3). $\sin(x^2y^2) = x$

3. จงหา ความชัน ของเส้นโค้ง 3.2) $(x^2+y^2)^2 = (x-y)^2$ ที่จุด $(1,-1)$

1.3) หา $\frac{dy}{dx}$ ของ $\sin(x^2y^2) = x$

(Imp. diff.) $$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\sin(x^2y^2)\right) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\Rightarrow \cos(x^2y^2) \frac{d}{dx}(x^2y^2) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x^2y^2)\left[x^2\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x^2)\right] = 1$$

$$\Rightarrow \cos(x^2y^2)\left[x^2 2y\cdot\frac{dy}{dx} + y^2(2x)\right] = 1$$

(จัดรูป) $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\left[1 - \cos(x^2y^2)\,y^2(2x)\right]}{\left[\cos(x^2y^2)\cdot x^2\cdot 2y\right]}$ $\boxtimes$

ข้อ 2) จง หา $\dfrac{dy}{dx}$ ของ $(x^2+y^2)^2 = (x-y)^2$ ที่จุด $(1,-1)$

(Imp. diff.) $\Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left((x^2+y^2)^2\right) = \dfrac{d}{dx}(x-y)^2$

$$\Rightarrow 2(x^2+y^2)\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = 2(x-y)\frac{d}{dx}(x-y)$$

$$\Rightarrow 2(x^2+y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 2(x-y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right)$$

(จัดรูป) $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}\left[4y(x^2+y^2) + 2(x-y)\right] = 2(x-y) - 4x(x^2+y^2)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left[2(x-y) - 4x(x^2+y^2)\right]}{\left[4y(x^2+y^2) + 2(x-y)\right]}$$

ที่จุด $(1,-1)$ จะได้.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)} = \frac{[2(1-(-1)) - 4(1)(1+1)]}{[4(-1)(1+1) + 2(1-(-1))]}$$

(แทน $x=1$, $y=-1$)

$$= \frac{4-8}{-8+4} = 1$$

⇒ อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน. (inverse fn.) ($\arcsin x$, $\arccos x$)

- $\theta = \arcsin x \Rightarrow \sin\theta = \underline{\sin(\arcsin x)} = x$
- $\boxed{x = \sin\theta}$

$\cancel{\sin^{-1}(x)}$, $\underline{\arcsin x}$

⇒ จะได้ว่า $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \ldots ?$

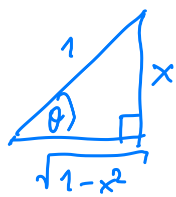
1. ใช้ Imp. diff: $\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\sin\theta)$, $\frac{d}{dx}\overbrace{\arcsin x}^{=\theta} = \frac{d}{dx}\theta$.

$\Rightarrow 1 = \cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dx}$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos\theta}$

อยากได้อยู่ในรูป x

2. ความสัมพันธ์ $\underline{\theta, x}$



($\underline{x = \sin\theta}$) $\Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$

ดังนั้น. $\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{d\theta}{dx} = \boxed{\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$ จำ

⇒ พิ. $\frac{d}{dx}\arccos x$

กำหนดให้. $\theta = \arccos x \Rightarrow \boxed{\cos\theta = x}$

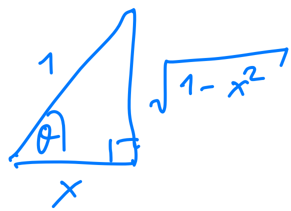
① Imp.diff $\Rightarrow \frac{d}{dx}\cos\theta = \frac{d}{dx}x.$

$$\Rightarrow -\sin\theta\frac{d\theta}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{\sin\theta}$$

กำหนดให้ $\cos\theta = x$

②.



$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1}$

ดังนั้น. $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

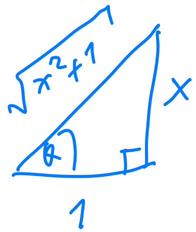
⇒ สรุป. $\frac{d\theta}{dx} = \boxed{\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$

หา $\frac{d}{dx}\arctan(x)$

• กำหนดให้ $\theta = \arctan(x) \Rightarrow \tan\theta = x$

- Imp. diff: $\Rightarrow \dfrac{d}{dx}(\tan\theta) = \dfrac{d}{dx}(x)$

ความสัมพันธ์: $\tan\theta = x$



$$\Rightarrow \sec^2\theta \, \frac{d\theta}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta.$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 = \frac{1}{x^2+1}$$

สูตร $\Rightarrow \dfrac{d\theta}{dx} = \boxed{\dfrac{d \arctan x}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1}}$

<u>สรุปสูตร</u>: (chain rule.)

① $$\frac{d}{dx}\arcsin(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

② $$\frac{d}{dx}\arccos(u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

③ $$\frac{d}{dx}\arctan(u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

④ $$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(u) = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

⑤ $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad |u|>1$

⑥. $\frac{d}{dx}\operatorname{arccosec}(u). = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, \quad |u|>1$

$\boxed{\text{Ex:}}$ 1.) m. $\frac{dy}{dx}$ vo> $y = \arcsin(x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\arcsin(\underbrace{x^2}_{u})\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

2.) m. $\frac{dy}{dx}$ vo>. $y = \arctan(\underbrace{\sqrt{x+1}}_{u.})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\arctan(\sqrt{x+1})\right)$$

$$= \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{x+1})$$

$$= \frac{1}{1+(x+1)} \cdot \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x+1) = \frac{1}{(x+2)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

3.) $y = \arccos(2x^2)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\arccos(\underbrace{2x^2}_{u})\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-(2x^2)^2}}\,\frac{d}{dx}(2x^2) = \frac{-4x}{\sqrt{1-4x^4}}$$

<u>การบ้าน</u>: แบบฝึกหัด 2.10. (6 + 9 + 10.)

⇒ อัตราสัมพัทธ์ (Related rates).

การประยุกต์ของกฎลูกโซ่. (ตัวแปร y, x, t.)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt}} = \boxed{\frac{dy}{dx}} \cdot \boxed{\frac{dx}{dt}}$$

① ② ③

<u>ข้อสังเกต</u>: ถ้ารู้ข้อมูล 2 ส่วน สามารถหาส่วนที่เหลือได้.

Ex: หา ① โดยที่ รู้ข้อมูล ② + ③.

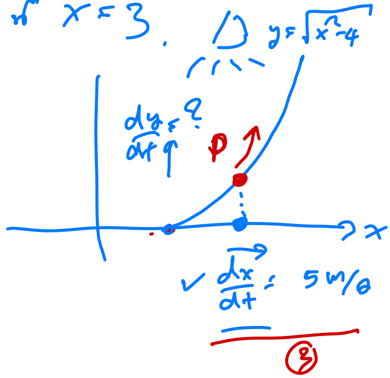
(หรือ) หา ② " ① + ③

(หรือ) หา ③ " ① + ②

$\boxed{\text{Ex:}}$ อนุภาค P เคลื่อนที่ตามเส้นโค้ง $y = \sqrt{x^2-4}$, $x \geq 2$

ถ้า P เคลื่อนที่ในแนวแกน x เป็น 5 หน่วย/วิ.

ถาม: P ที่เคลื่อนที่ในแนวแกน y ที่ตำแหน่ง ที่ $x = 3$.



→ ตัวแปรที่เกี่ยวข้อง (x, y, t)

→ chain rule:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

หา ① ② ③

จากความสัมพันธ์ $y = \sqrt{x^2-4}$ $\xRightarrow{\text{ระหว่างกรณี}}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2-4}$

$$= \frac{1}{2}(x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x^2-4)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^2-4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x) \quad — ②$$

ดังนั้น. $\frac{dy}{dt} = \left(\frac{1}{2}(x^2-4)^{-\frac{1}{2}}(2x)\right) \cdot \frac{dx}{dt}$

ต้องการหา. $\frac{dy}{dt}$ ที่ $x = 3$ จึงได้.

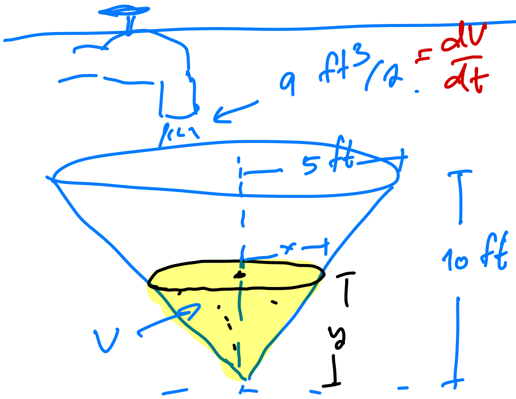
$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=3} = \left.\left[\frac{1}{2}(x^2-4)^{-\frac{1}{2}}(2x) \cdot \frac{dx}{dt}\right]\right|_{x=3}$$

$$= \left.\left[\frac{1}{2}(x^2-4)^{-\frac{1}{2}}(2x)\right]\right|_{x=3} \cdot \underbrace{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}}_{=5}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{9-4}} \cdot (\cancel{2} \cdot 3) \cdot 5$$

$$= \frac{3\cdot 5}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} \text{ ม/ว.}$$

Ex:



หา. อัตราการเพิ่มขึ้นของระดับน้ำ ที่ความสูง 6 ฟุต.

ตัวแปร: V, y, t, x

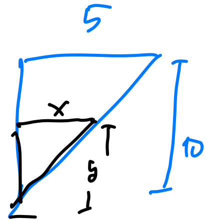
ต้องการหา: $\frac{dy}{dt}$

ตั้งสมการ chain rule: $\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}}$

9 หาความสัมพันธ์. ต้องการหา.

หาความสัมพันธ์ของ $V(y)$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot y \qquad \Rightarrow \text{จากสามเหลี่ยมคล้าย.}$$



$$\left(\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \Rightarrow x = \frac{5y}{10} = \frac{y}{2}\right)$$

ดังนั้น. $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y$

$$V = \frac{1}{12}\pi y^3 \Rightarrow \text{จะได้ } \frac{dV}{dy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{12}\pi y^3\right) = \frac{3}{\cancel{12}_4}\pi y^2$$

$$= \frac{\pi y^2}{4}$$

ดังนั้น. จาก. $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$

$$\Rightarrow 9 = \left(\frac{\pi y^2}{4}\right) \cdot \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{9\cdot 4}{\pi y^2}$$

∴ ที่ความสูง y = 6 ft จะได้ $\frac{dy}{dt} = \frac{9 \cdot 4}{\pi (6)^2} = \frac{36}{\pi \cdot 36} = \frac{1}{\pi}$.

→ **สรุป**: อัตราสัมพัทธ์,

①. หาตัวแปร. y, x, t

② : **chain rule**: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ — $\boxed{1}$

$\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{①}$, $\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{②}$, $\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{③}$

③ : ปกติ จะรู้เทอม ① หรือ ③ ต้องหาอีกตัว เทอม ②.

→ ต้องหาความสัมพันธ์. $\boxed{y(x)} \rightarrow \frac{dy}{dx}$ แทน $\boxed{1}$.

④ : ดิฟ แทนข้อมูลของโจทย์.

→ **การบ้าน**: 1.) ลูกโป่ง ทรงกลม.

a.) ต้องการให้ลูกโป่ง ขยายตัว ด้วยอัตราการเปลี่ยนแปลง ของรัศมี คงที่ เป็น 1 cm/วินาที

จงหาว่า จะต้อง สูบลม ด้วยอัตราเท่าใด?

b.) ในทางกลับกัน ถ้าได้อัตราการสูบลมคงที่ เป็น 1 cm^3/วินาที.

จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของรัศมี ลูกโป่ง.