การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.5 (1.8 + 2.2)

การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.6

2.8 + 2.11 + 3.3

1.8.) จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของ

$$y = \sqrt{4-3\sqrt{x}} \Rightarrow y(u) = \sqrt{u}, \quad u = 4-3\sqrt{x}$$

$$\begin{tikzcd} y \arrow[d, "\frac{dy}{du}"] \arrow[dd, bend left, "\frac{dy}{dx}"] \\ u \arrow[d, "\frac{du}{dx}"] \\ x \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{d u^{\frac{1}{2}}}{du} \cdot \frac{d(4-3x^{\frac{1}{2}})}{dx}$$

$$= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot -\frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$(u = 4-3\sqrt{x})$ $$= \frac{1}{2}(4-3\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4-3\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(4-3\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(4-3\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2}(4-3\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}}\left(0 - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \quad \checkmark$$

Ex: 2.2). จงหา $f'(x)$ ของ $f(x) = \underbrace{(5x+8)^{14}}_{1} \cdot \underbrace{(x^3+7x)^{12}}_{2}$

$$\frac{df}{dx} = (5x+8)^{14} \frac{d}{dx}(x^3+7x)^{12} + (x^3+7x)^{12} \frac{d}{dx}(5x+8)^{14}$$

$$= (5x+8)^{14} \cdot 12 \cdot (x^3+7x)^{11} \frac{d}{dx}(x^3+7x)$$

$$+ (x^3+7x)^{12} \cdot 14(5x+8)^{13} \frac{d}{dx}(5x+8)$$

$$= 12(5x+8)^{14}(x^3+7x)^{11}(3x^2+7)$$

$$+ 70(x^3+7x)^{12} \cdot \cancel{14}(5x+8)^{13} \cdot \cancel{(5)} \quad \blacksquare$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.6 2.8 + 2.11. + 3.3

2.8.) หา $\frac{dy}{dx}$ ของ $y = (x+\operatorname{cosec}(x^3+3))^{-3}$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -3(\underbrace{x+\operatorname{cosec}(x^3+3)}))^{-4} \frac{d}{dx}(\underbrace{x+\operatorname{cosec}(x^3+3)})$$

$$= -3(x+\operatorname{cosec}(x^3+3))^{-4}\left(1 - \operatorname{cosec}(x^3+3)\cot(x^3+3) \cdot \frac{d}{dx}\underbrace{(x^3+3)}\right)$$

$$= -3(x+\operatorname{cosec}(x^3+3))^{-4} \cdot \left(1 - \operatorname{cosec}(x^3+3)\cot(x^3+3)(3x^2)\right) \quad \blacksquare$$

2.11.) $y = \cos^3(\sin(2x)) = (\underbrace{\cos \sin(2x)})^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3\cos^2(\sin 2x)\frac{d}{dx}\cos(\underbrace{\sin(2x)})$$

$$= 3\cos^2(\sin(2x))(-\sin(\sin 2x))\frac{d}{dx}\sin(2x)$$

$= -6\cos^2(\sin(2x))\sin(\sin(2x))\cos(2x)$ ■

3.3.) จงหา $y''(x)$ ของ $y = 9\tan(x^2+1)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big(9\tan(\underbrace{x^2+1}_{u})\Big)$$

$$= 9\sec^2(x^2+1)\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$= 9\sec^2(x^2+1)(2x)$$

$$\frac{d\tan(u)}{dx} = \sec^2(u)\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\Big(\underbrace{18\sec^2(x^2+1)}_{①}\cdot\underbrace{x}_{②}\Big)$$

(ผลคูณ)

$$= 18\sec^2(x^2+1)\frac{d}{dx}x + x\frac{d}{dx}\left(18\sec^2(x^2+1)\right)$$

$$= 18\sec(x^2+1) + 18x\,2\sec(x^2+1)\frac{d}{dx}\sec(\underline{x^2+1})$$

$$= 18\sec(x^2+1) + 36x\sec(x^2+1)\sec(x^2+1)\tan(x^2+1)\frac{d(x^2+1)}{dx}$$

$$= 18\sec(x^2+1) + 36x\sec^2(x^2+1)\tan(x^2+1)(2x)$$ ■

$\Rightarrow$ รูปแบบของอนุพันธ์ของ ฟังก์ชัน exp. + log.

$\Rightarrow$ $f(x) = e^x$ แล้ว $\frac{df}{dx} = \frac{de^x}{dx} = ??$

นิยาม: $e^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= 0 + 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\cdot 1!} + \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}\cdot 2!} + \frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}\cdot 3!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$$

ดังนั้น $\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$ $\xRightarrow{\text{chain rule}}$ $\boxed{\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}}$

จริง

$\Rightarrow$ ถ้า $f(x) = a^x$ แล้ว $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(a^x)$

พิสูจน์. $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{\overbrace{(x \ln(a))}^{=u}}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx} e^{(x \ln a)} = e^{x \ln a} \frac{d(x \ln a)}{dx}$$

$$= \underbrace{e^{x \ln a}}_{=a^x} \ln a = a^x \ln a$$

ดังนั้น สูตร. $\boxed{\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a}$ $\xRightarrow{\text{chain rule}}$ $\boxed{\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}}$

$\boxed{Ex\ 1:}$ หา $y'(x)$, $y(x) = \cos(e^x + 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos(e^x + 1)$$

$$\left[\frac{d}{dx}\cos(u) = -\sin(u)\frac{du}{dx}\right.$$

$$= -\sin(e^x+1)\frac{d}{dx}(e^x+1)$$

$$= -\sin(e^x+1)e^x \quad \blacksquare$$

$\boxed{Ex:2}$ หา $y'(x)$, $y(x) = e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{e^{x^2}}$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{x^{-2}} + e^{-x^2}$$

chain rule.

$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{x^{-2}} + e^{-x^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}e^{x^{-2}} + \frac{d}{dx}e^{-x^2}$$

$$= e^{x^{-2}}\frac{dx^{-2}}{dx} + e^{-x^2}\frac{d(-x^2)}{dx}$$

$$= e^{x^{-2}}(-2x^{-3}) + e^{-x^2}(-2x^1) \quad \blacksquare$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.9. (1.6 + 1.8)

⇒ อนุพันธ์ของฟังก์ชันแฝง. (Implicit differentiation).

(explicit fn): ⇒ $y = f(x)$ ← มีตัวแปร x อย่างเดียว.

Ex: $y = f(x) = x^{100}$

$y = f(x) = e^{\sin(x^2+2x)} + \cot(\tan(x)))$

(Implicit fn) ⇒ ฟังก์ชันที่ไม่สามารถเขียนในรูป implicit ได้

Ex: 1.) $y^2 + x^2 = \sin(xy) \not\Rightarrow y = \dots$

2.) $xy^2 = \cos(x+y) \not\Rightarrow y = \dots$

แต่เราต้องการหา $\frac{dy}{dx}$ ของ Implicit fn.

<u>เทคนิค:</u> * ① มอง $y(x)$ แล้วใช้ chain rule และต้องหา $\frac{dy}{dx}$ เอาไว้

② diff ทั้งสองข้างของสมการ.

③. จัดรูปให้ได้ในรูป $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

Ex 1.) จาก $y^2 = x^2 + \sin(xy)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

ทำ diff ทั้งสองข้าง. ⇒ $\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin(xy))$

มอง y เป็น fn ของ x
ใช้ chain rule ต้องหา
dy/dx ⇒ $2y\frac{dy}{dx} = 2x + \cos(xy)\frac{d}{dx}(xy)$

ต้องใช้ กฎร.

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x + \cos(xy)\left[x\frac{dy}{dx} + y\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{=1}\right]$$

จัดรูป. $\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2x + x\cos(xy)\frac{dy}{dx} + y\cos(xy)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[2y - x\cos(xy)\right] = 2x + y\cos(xy)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left[2x + y\cos(xy)\right]}{\left[2y - x\cos(xy)\right]} \quad \blacksquare$$

เพิ่มเติม: $\frac{d}{dx}(y^2) \Rightarrow f(y) = y^2 \,,\; \underline{\underline{y(x)}}$

$$\begin{tikzcd} f \arrow[d, "\frac{df}{dy}"] \arrow[dd, bend left, "\frac{df}{dx}"] \\ y \arrow[d, "\frac{dy}{dx}"] \\ x \end{tikzcd}$$

chain rule: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

$$= \frac{d(y^2)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$= 2y\frac{dy}{dx}$$

$\boxed{Ex:}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ ของ. $e^{x^2 y} = 2x + 2y$. ← imp. fn

จากหลักดิฟทั้งสองข้าง: $\frac{d}{dx}(e^{\overbrace{x^2 y}^{u}}) = \frac{d}{dx}(2x+2y)$

$$\Rightarrow \quad e^{x^2 y} \frac{d(x^2 y)}{dx} = 2 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad e^{x^2 y} \left[x^2 \frac{dy}{dx} + y \frac{dx^2}{dx} \right] = 2 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad e^{x^2 y} \cdot x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + e^{x^2 y} \cdot y \cdot (2x) = 2 + 2\frac{dy}{dx}$$

จัดรูป.

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} \left[x^2 e^{x^2 y} - 2 \right] = 2 - 2xy e^{x^2 y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left[2 - 2xy e^{x^2 y} \right]}{\left[x^2 e^{x^2 y} - 2 \right]}$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.8 (1.3 + 3.3).

$\Rightarrow$ อนุพันธ์ของ $f(x) = \ln(x) \Rightarrow \frac{d \ln(x)}{dx} = ??$

เขียน $f(x) = y = \ln x \Rightarrow e^y = e^{\ln x} = x$

(นั่น) $\boxed{e^y = x}$

Imp. diff: $\frac{d}{dx}(e^y) = \frac{d}{dx}(x)$

$$\Rightarrow \quad e^y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} \overset{= \ln(x)}{} = \frac{1}{\underbrace{e^y}_{=x}}$$

จะได้.

ดังนั้น $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d(\ln(x))}{dx} = \frac{1}{x}}$ $\overset{\text{chain rule}}{\Longrightarrow}$ $\boxed{\frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}}$

$\Rightarrow$ พิจารณา $f(x) = \log_a x$ แล้ว $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \ldots ??$

เนื่อง. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ [เปลี่ยนฐาน log: $\log_b a = \frac{\log_e a}{\log_e b}$]

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = \frac{1}{x \ln a}$$

จะได้ $\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$ $\overset{\text{chain rule}}{\Longrightarrow}$ $\boxed{\frac{d}{dx}\log_a(u) = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}}$

Ex: จงหา y' ของ $y = \ln(5x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(\underbrace{5x+1}_{=u}) = \frac{1}{(5x+1)}\frac{d}{dx}(5x+1) = \frac{5}{5x+1} \quad \blacksquare$$

2.7 จงหา y' ของ $y = \dfrac{\ln x}{x}$

(ดิฟผลหาร) $\Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \frac{d}{dx}(\ln x) - \ln x \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$$

$$= \frac{\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - \ln x \cdot (1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.9 (1.14 + 1.16).