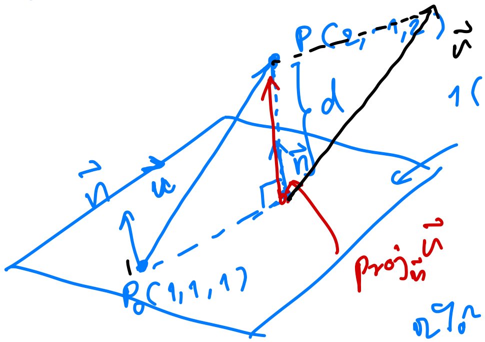
การบ้าน : แบบฝึกหัด 1.4 (6 + 7.)

6.) หาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุด $P(2,-1,2)$

ถึงระนาบ $(x-1) - 2(y-1) + (z-1) = 0$.



ระนาบ : $n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0) = 0$

$1(x-1) + (-2)(y-1) + 1(z-1) = 0$

∴ จุดบนระนาบ $P_0 = (1,1,1)$

เวกเตอร์ ⊥ $\vec n = (1,-2,1)$.

จะได้ $d = \| proj_{\vec n}\vec u \|$

หา $proj_{\vec n}\vec u$ โดยที่ $\vec u = \vec{P_0P} = P - P_0 = (2-1, -1-1, 2-1)$

$\vec u = (1,-2,1)$

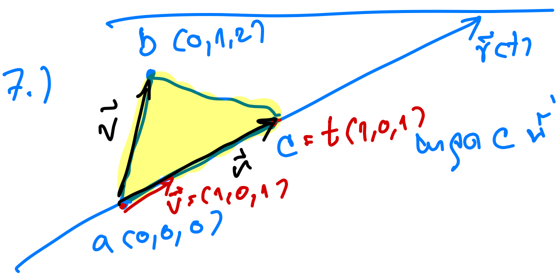
จาก $\vec n = (1,-2,1)$ จะได้

$$proj_{\vec n}\vec u = \frac{(\vec u \cdot \vec n)\,\vec n}{\|\vec n\|^2} = \frac{\cancel{[1\cdot 1 + (-2)(-2) + 1\cdot 1]}(1,-2,1)}{\cancel{(1^2+(-2)^2+1^2)}}$$

$$= (1,-2,1)$$

ดังนั้น $d = \| proj_{\vec n}\vec u \| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$

7.)



$\vec r(t) = (0,0,0) + (1,0,1)t$

หาจุด c ที่ Δabc มีพท. 5 หน่วย².

พท. $\triangle abc = \dfrac{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}{2}$ โดยที่ $\vec{u} = \vec{ac}$, $\vec{v} = \vec{ab}$

และจุด c อยู่ในรูป $(t,0,t)$

หา $\vec{u} = \vec{ac} = c - a = (t,0,t) - (0,0,0) = (t,0,t)$

หา $\vec{v} = \vec{ab} = b - a = (0,1,2) - (0,0,0) = (0,1,2)$

หา $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 0 & t \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ t & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = (t)\vec{i} + (-2t)\vec{j} + (t)\vec{k}$

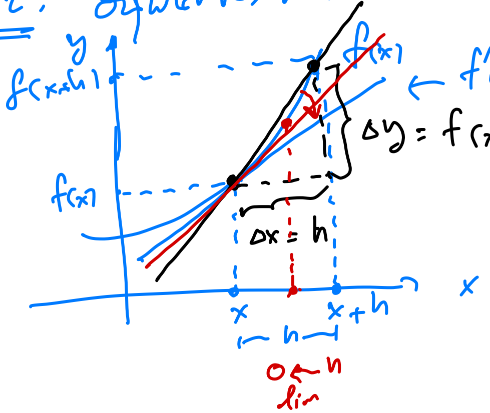
จะได้ $\vec{u}\times\vec{v} = (t, -2t, t)$

พท. $\triangle abc = 5 = \frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{t^2+(-2t)^2+t^2} = \frac{t}{2}\sqrt{6}$

$\Rightarrow 5 = \dfrac{t\sqrt{6}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{10}{\sqrt{6}} = \dfrac{10\sqrt{6}}{6} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$

ดังนั้น $c = (t,0,t) = \left(\dfrac{5\sqrt{6}}{3}, 0, \dfrac{5\sqrt{6}}{3}\right)$ $\blacksquare$

<u>บทที่ 2:</u> อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต และการประยุกต์.



← $f'(x)$ คือ slope ของเส้นสัมผัส.

$\Delta y = f(x+h) - f(x)$

$$\text{slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

slope เส้นสัมผัสที่จุด $(x, f(x))$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

นิยาม (**)

$\Rightarrow$ $f'(x)$ จะมีค่า ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ มีค่า

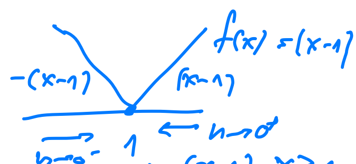
$\Rightarrow$ $\xrightarrow{\quad} a^- \quad a^+ \xleftarrow{\quad}$

$\lim\limits_{x\to a^-} = \lim\limits_{x\to a^+}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ มีค่า ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

Ex: จงแสดงว่า $f(x) = |x-1|$ และอนุพันธ์ ไม่มี ที่จุด $x = 1$

$$f'(1) \overset{(?!)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$ ← แสดงว่า lim ไม่มีค่า



$$f(x) = \begin{cases} (x-1), & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$$

วิธีทำ: พิจารณา $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{[-((\cancel{1}+h)-\cancel{1})] - 0}{h}$$

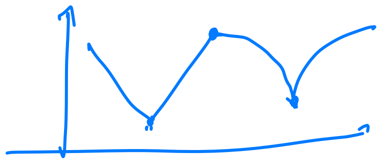
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad \#$$

พิจารณา $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{[(\cancel{1}+h)-\cancel{1})] - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \square$$

จะเห็นได้ว่า $\lim\limits_{h\to 0^-} \neq \lim\limits_{h\to 0^+}$ ดังนั้น lim แสดงว่าไม่มีค่า นั่นคือ $f'(1)$ ไม่มีค่า

$\boxtimes$



[illegible]

$\Rightarrow$ ដេរីវេដោយផ្ទាល់:

- $f(x) = c \Rightarrow \dfrac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

ចំណាំ: $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = c \Rightarrow \dfrac{dc}{dx} = 0}$, c ចំនួនថេរ

- $f(x) = x^2 \Rightarrow \dfrac{df(x)}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{x^2}}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{d(x^2)}{dx} = 2x$$

សរុប: $\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow \dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}}$, $n \in \mathbb{R}$.

Ex: $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{(\frac{1}{2}-1)} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ∎

ทฤษฎี:

1.) $f(x) = c \Rightarrow \frac{dc}{dx} = 0$, c ค่าคงที่

2.) $f(x) = x^n \Rightarrow \frac{d}{dx}x^n = nx^{(n-1)}$, $n \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท: ให้ $f(x)$, $g(x)$ เป็นฟังก์ชัน, c ค่าคงที่

1.) $\frac{d}{dx}(cf(x)) = c\frac{d}{dx}f(x)$

2.) $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$.

Ex: จงหาอนุพันธ์ของ.

$$f(x) = x^8 + 12x^5 + \frac{\sqrt{10}}{x^7} + 4\pi + 3x^\pi$$

จ. $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left[x^8 + 12x^5 + \sqrt{10}\,x^{-7} + 4\pi + 3x^\pi\right]$

[ทฤษฎี 2.)] $= \frac{d}{dx}(x^8) + \frac{d}{dx}(12x^5) + \frac{d}{dx}(\sqrt{10}\,x^{-7}) + \frac{d}{dx}(4\pi) + \frac{d}{dx}(3x^\pi)$

(ทฤษฎี 1.) คูณค่าคงที่) $= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) + \sqrt{10}\frac{d}{dx}(x^{-7}) + \frac{d}{dx}(4\pi)$

$+ 3\frac{d}{dx}(x^\pi)$

(รูปแรก $= 8x^7 + 12.5x^4 + \sqrt{10}\cdot(-7)x^{-8} + 0 + 3\pi x^{(\pi-1)}$ ∎

ทฤษฎีบท: 3.) $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)}$

(ดิฟผลคูณ)

พิสูจน์: ให้ $F(x) = f(x)\cdot g(x)$

นิยาม

พิจารณา $\dfrac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \dfrac{d}{dx}\left(F(x)\right) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x) + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x)}{h}$$

จัดรูป.

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\left(f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)g(x)\right) - \left(f(x)\cdot g(x) - f(x+h)g(x)\right)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[f(x+h)\,\frac{\left(g(x+h) - g(x)\right)}{h} + g(x)\,\frac{\left(f(x+h) - f(x)\right)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) + g(x) \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$= f(x)\cdot g'(x) + g(x)\,f'(x)$$

ดังนั้น $\Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$. ∎

สมบัติ 4.) ดิฟผลหาร ($g(x) \neq 0$)

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}$$

$\boxed{Ex:}$ หา $\frac{d}{dx}f(x)$ เมื่อ $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{x}{x^2+1}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left[x^{\frac{2}{3}} + \frac{x}{x^2+1}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\overbrace{x}^{f(x)}}{\underbrace{x^2+1}_{g(x)}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^{\left(\frac{2}{3}-1\right)} + \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} \quad ◪$$

แบบฝึกหัด 2.3:

8.) $y = (2-x^2)(x^3-2x+1)$ หา $\frac{dy}{dx}$

วิธี ①:

$$\Rightarrow y = 2x^3 - 4x + 2 - x^5 + 2x^3 - x^2$$

$$= -x^5 + 4x^3 - x^2 - 4x + 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-x^5 + 4x^3 - x^2 - 4x + 2\right] = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 4 \quad ◪$$

✓

วิธี ③ : $y = \underbrace{(2-x^2)}_{f(x)}\underbrace{(x^3-2x+1)}_{g(x)}$. , $\left|\dfrac{d(f\cdot g)}{dx} = fg' + gf'\right|$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2-x^2)\frac{d}{dx}(x^3-2x+1) + (x^3-2x+1)\frac{d}{dx}(2-x^2)$$

$$= (2-x^2)(3x^2-2) + (x^3-2x+1)(-2x)$$

$$= 6x^2 - 4 - 3x^4 + 2x^2 + -2x^4 + 4x^2 - 2x$$

$$= -5x^4 + 12x^2 - 2x - 4 \quad \boxtimes \quad \checkmark$$

(**) 12.) $u = \dfrac{5x+1}{2\sqrt{x}}$ หา. $\dfrac{du}{dx}$

วิธี ① $\Rightarrow u = \dfrac{5x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5}{2}x^{1-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \cancel{\left(\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}}$

$$u = \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{5}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \boxtimes \quad \checkmark$$

$$= \frac{-3}{2}x^{-\frac{3}{2}} \quad \boxtimes$$

วิธี ② $\Rightarrow u = \dfrac{5x+1}{2\sqrt{x}}$ $\begin{matrix}\leftarrow f(x)\\ \leftarrow g(x)\end{matrix}$ $\left[\text{สูตร. } \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gf' - fg'}{g^2}\right]$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}(5x+1) - (5x+1)\frac{d}{dx}(2\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}\,(5) - (5x+1)\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)x^{-\frac{1}{2}}}{4x} = \frac{10x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{4x}$$

$$= \frac{5}{4}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{5}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$ ✓

การบ้าน: แบบฝึกหัด 2.3 (9 + 14 + 15)

MB2219