การบ้าน: แบบฝึกหัด 1.4 (6+7.)

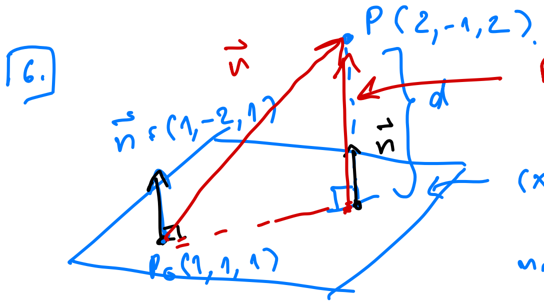
6. จงหาระยะสั้นสุดระหว่าง $P(2,-1,2)$ กับระนาบ

$$(x-1)-2(y-1)+(z-1)=0.$$

7. กำหนดจุด $a(0,0,0)$, $b(0,1,2)$ จงหาจุด c บน

$\vec{r}(t) = (0,0,0) + (1,0,1)t$ ที่ทำให้ พท. $\triangle abc = 5$ หน่วย^2.

$\boxed{6.}$



เวกเตอร์จากระนาบถึงจุด P.

$\text{proj}_{\vec{n}}\vec{u}$

$\Rightarrow d = \|\text{proj}_{\vec{n}}\vec{u}\|$

$(x-1)-2(y-1)+(z-1)=0$

$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$

- จุดบนระนาบ $P_0(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$
- เวกเตอร์ $\perp$ ระนาบ $\vec{n} = (n_1,n_2,n_3)$
  $= (1,-2,1)$

- $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (2-1, -1-1, 2-1)$
  $= (1,-2,1)$

- หา $\text{proj}_{\vec{n}}\vec{u} = \dfrac{(\vec{u}\cdot\vec{n})\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} = \dfrac{[(1,-2,1)\cdot(1,-2,1)]}{(1^2+(-2)^2+1^2)}(1,-2,1)$

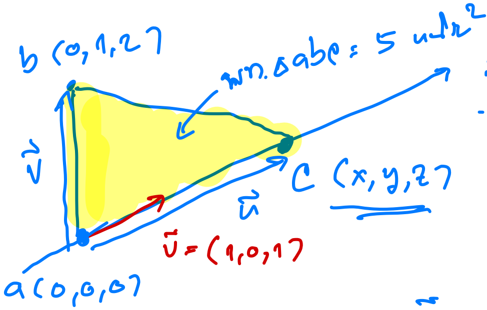
  โดยที่ $\vec{n} = (1,-2,1)$

  $= \dfrac{\cancel{(1^2+(-2)^2+1^2)}}{\cancel{(1^2+(-2)^2+1^2)}}(1,-2,1)$

- ดังนั้น $d = \|\text{proj}_{\vec{n}}\vec{u}\| = \|(1,-2,1)\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$ ∎

7. กำหนดจุด $a(0,0,0)$, $b(0,1,2)$ หาพิกัดจุด c บน

$\vec{r}(t) = (0,0,0) + (1,0,1)t$ ที่ทำให้ พท. $\triangle abc = 5$ หน่วย^2.



$$\boxed{\text{พท.}\triangle abc = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

โจทย์ c อยู่บน $\vec{r}(t)$

$c = (0,0,0) + (1,0,1)t$
$= (t,0,t)$

- $\vec{u} = \vec{ac} = c - a = (t,0,t) - (0,0,0)$
  $\Rightarrow \vec{u} = (t,0,t)$
- $\vec{v} = \vec{ab} = b - a = (0,1,2) - (0,0,0)$
  $\Rightarrow \vec{v} = (0,1,2)$

จาก พท.$\triangle abc = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 5$

- หา $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & 0 & t \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0-t)\vec{i} + (0-2t)\vec{j} + (t-0)\vec{k}$

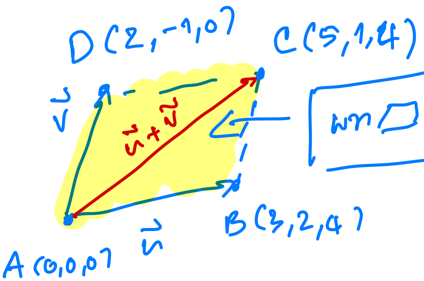
$= -t\vec{i} - 2t\vec{j} + t\vec{k} = (-t, -2t, t)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-t)^2 + (-2t)^2 + t^2} = 5$

$\Rightarrow \frac{1}{2} t\sqrt{6} = 5 \Rightarrow t = \frac{10}{\sqrt{6}}$

$\therefore c = (t,0,t) = \left(\frac{10}{\sqrt{6}}, 0, \frac{10}{\sqrt{6}}\right)$

(3.2) หาพท. ▱ ที่มีจุด $A(0,0,0)$, $B(3,2,4)$, $C(5,1,4)$, $D(2,-1,0)$

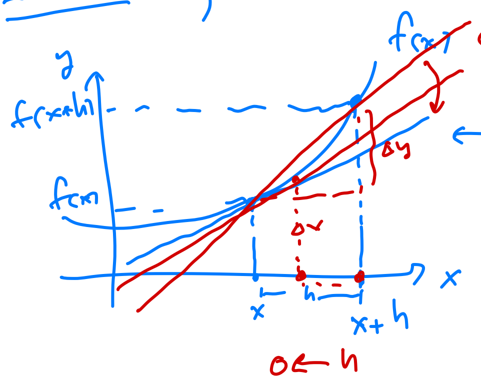


$$\boxed{\text{พท}▱ = \|\vec{u}\times\vec{v}\|}$$, $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AD}$

(!) check $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

$(3,2,4) + (2,-1,0) = (5,1,4)$ ✓

บทที่ 2: อนุพันธ์ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรและการประยุกต์.



← slope $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

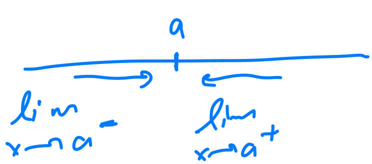
← slope ของเส้นสัมผัส ที่จุด x คือ $f'(x)$

นิยาม:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

สัญลักษณ์: $f'(x) = \dfrac{df}{dx} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

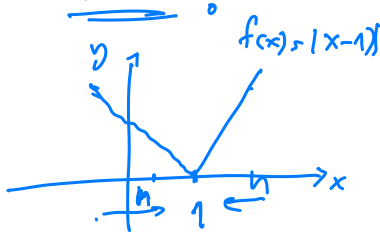
$f'(x)$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ มีค่า!



$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^-} = \lim\limits_{x\to a^+}$

Ex: จงแสดงว่า $f(x) = |x-1|$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x = 1$

นิยาม: $f'(1) \overset{(!)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ ต้องแสดงว่า $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ หาค่าไม่ได้ !



$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$$

พิจารณา $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-((1+h)-1)-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1.$$

พิจารณา $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{((1+h)-1)-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$

ดังนั้น $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ หาค่าไม่ได้. ดังนั้น $f'(1)$ ไม่มีค่า ■

→ อนุพันธ์โดยใช้สูตร.

• $f(x) = c \overset{\text{นิยาม}}{\Rightarrow} \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0 \quad ■$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = c \Rightarrow \frac{df}{dx} = 0}$$

• $f(x) = x^2 \xrightarrow{\text{ดิฟตาม}} \dfrac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{x^2}}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

ดังนั้น. $f(x) = x^2 \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = 2x$

สรุป: $\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = nx^{n-1}}$, $\underline{n \in \mathbb{R}}$

<u>ทฤษฎี:</u> ให้ $f(x)$, $g(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ได้, c ค่าคงที่.

1.) $\dfrac{d}{dx}(cf(x)) = c\dfrac{d}{dx}f(x)$

<u>Ex:</u> $\dfrac{d}{dx}(5x^3) = 5\dfrac{d}{dx}(x^3) = 5(3x^{3-1}) = 15x^2$ ■

2.) $\dfrac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \dfrac{d}{dx}(f(x)) \pm \dfrac{d}{dx}(g(x))$

<u>Ex:</u> $\dfrac{d}{dx}(5x^2 + 2x) = \dfrac{d}{dx}(5x^2) + \dfrac{d}{dx}(2x)$

$$= 5\frac{d}{dx}(x^2) + 2\frac{d}{dx}(x) = 10x + 2 \quad ■$$

Ex: หาค่า อนุพันธ์ ของ

$$f(x) = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + \frac{\sqrt{10}}{x^7} + 4\pi + x^{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left[x^8 + 12x^5 - 4x^4 + \sqrt{10}\,x^{-7} + 4\pi + x^{\pi}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + \sqrt{10}\frac{d}{dx}(x^{-7}) + \frac{d}{dx}(4\pi) + \frac{d}{dx}(x^{\pi})$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + (-7)\sqrt{10}\,x^{-8} + 0 + \pi x^{(\pi-1)}$$

<u>สมบัติ:</u>
ดิฟผลคูณ.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$$

<u>พิสูจน์:</u> ให้ $F(x) = f(x)\cdot g(x)$

พิจ. $$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \frac{d}{dx}(F(x)) \overset{\text{นิยาม}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)\ \underbrace{\left[+f(x+h)\cdot g(x) - f(x+h)\cdot g(x)\right]}_{=0}}{h}$$

(เพิ่ม บ.)
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)g(x)\right) + \left(f(x+h)\cdot g(x) - f(x)g(x)\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)\left(g(x+h) - g(x)\right)}{h} + \frac{g(x)\left(f(x+h) - f(x)\right)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)\left(g(x+h) - g(x)\right)}{h} \right] + \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(x)\left(f(x+h) - f(x)\right)}{h} \right]$$

$$= f(x) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}} + g(x) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)$$

• สมบัติ (ดิฟผลหาร.)

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}}$$

<u>พิสูจน์</u>: กำหนด $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(F(x)\right) \overset{\text{นิยาม}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x) f(x+h) - f(x) g(x+h)}{h\, g(x+h)\, g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(x) f(x+h) - f(x) g(x+h) + \left(+ f(x) \overset{1}{g}(x) - f(\overset{2}{x}) g(x)\right)}{h\, g(x+h)\, g(x)} \right]$$

(จัดรูป.)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[g(x)\left(f(x+h) - \overset{2}{f}(x)\right)\right] - \left[f(x)\left(g(x+h) - \overset{1}{g}(x)\right)\right]}{h\, g(x+h)\, g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{g(x) \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] - f(x) \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}{g(x+h)\, g(x)} \right]$$

$$= \frac{g(x) \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] - f(x) \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]}{\lim\limits_{h \to 0} \left[g(x+h)\, g(x) \right]}$$

$$= \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right). \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Ex:}}$ หา. $\frac{d}{dt} \left(\sqrt[3]{t^2} + \frac{t}{t^2+1} \right)$

$$= \frac{d}{dt} \left(t^{\frac{2}{3}} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{t^2+1} \right)$$

ดิฟผลหาร.

$$= \frac{2}{3} t^{\left(\frac{2}{3} - 1\right)} + \left[\frac{(t^2+1) \frac{d}{dt}(t) - t \frac{d}{dt}(t^2+1)}{(t^2+1)^2} \right]$$

$$= \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}} + \frac{(t^2+1) - t(2t)}{(t^2+1)^2} \qquad \blacksquare$$

<u>การบ้าน</u>: แบบฝึกหัด 2.3. (9 + 12 + 14).