ทบทวน: พีชคณิตเบื้องต้นทางเวกเตอร์

- dot products.

ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

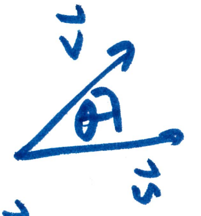
$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

dot product

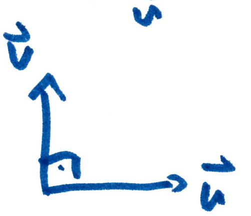
scalar.

→ มุมระหว่างเวกเตอร์. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \underbrace{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}_{\geq 0} \underbrace{\cos\theta}_{\text{กำหนดเครื่องหมาย } (\pm)}$.



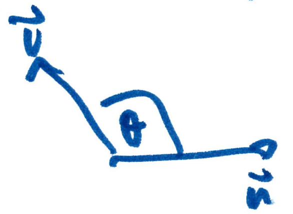
$0 \leq \theta < 90^\circ \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0$.

$\cos\theta > 0$



** $\theta = 90^\circ \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

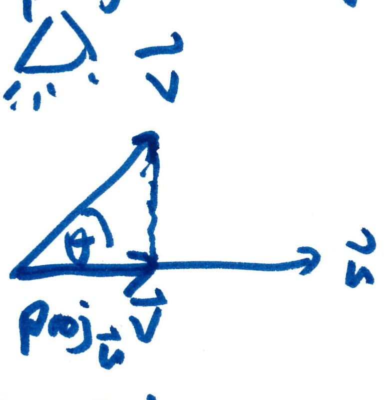
$\cos\theta = 0$



$90^\circ < \theta \leq 180 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$.

$\cos\theta < 0$

→ projection of vectors.



$\|\hat{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta = \vec{v} \cdot \hat{u}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = (\vec{v} \cdot \hat{u}) \hat{u}$$

$$(\text{หรือ}) = \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

- Cross product: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

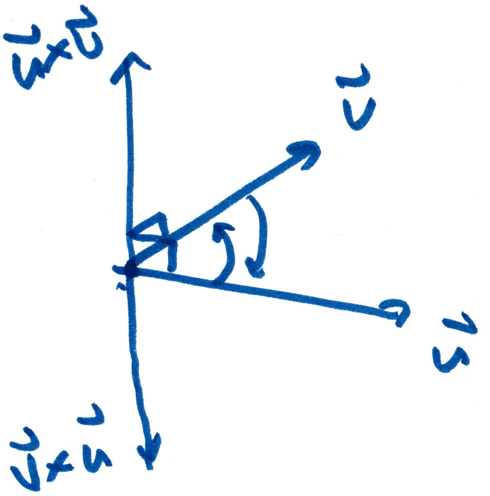
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix}$$

cross prod.

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\vec{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\vec{j}$$

$$(u_1 v_2 - u_2 v_1)\vec{k}$$

- ทิศทางเวกเตอร์ตั้งฉากกับ $\vec{u}, \vec{v}$

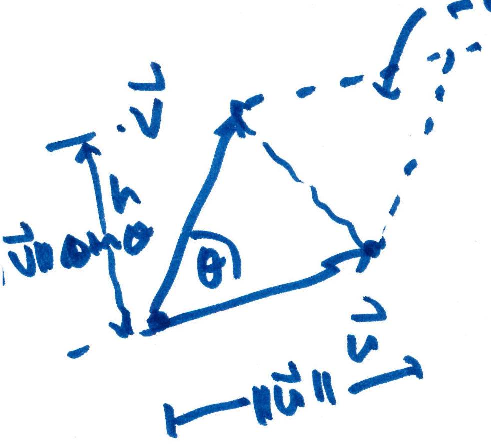


- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u} \perp \vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{v} \perp \vec{u} \times \vec{v}$

$$\boxed{\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta}$$

- พท. ที่ปิดล้อมด้วยเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}$

  สี่เหลี่ยมด้านขนาน



พท. = ฐาน × สูง = $\underline{\|\vec{u}\|} \|\vec{v}\| \sin\theta$.

$= \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

(พท△. $= \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$)

การบ้าน: แบบฝึกหัด 1.3.

1.ค. จงหา ขนาดและทิศทางของ $\vec{u}\times\vec{v}$ และ $\vec{v}\times\vec{u}$ เมื่อกำหนด.

$\vec{u} = (-8,-2,-4)$, $\vec{v} = (2,2,1)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -8 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -8 & -2 \\ 2 & 2 \end{matrix} = ((-2)1-(-4)\cdot 2)\vec{i}$$

$$+((-4)\cdot 2-(-8)1)\vec{j}$$

$$+((-8)\cdot 2-(-2)2)\vec{k}$$

$$= (-2+8)\vec{i}+(-8+8)\vec{j}+(-16+4)\vec{k}$$

$$= 6\vec{i}+0\vec{j}-12\vec{k} = (6,0,-12).$$

ขนาดของ $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \sqrt{6^2+0^2+(12)^2} = 6\sqrt{1+4}$

(แน่แน่นอน)

$$= 6\sqrt{5} \quad ∎$$

ทิศทาง $\dfrac{1}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \dfrac{1}{6\sqrt{5}}(6,0,-12).$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \quad ∎$$

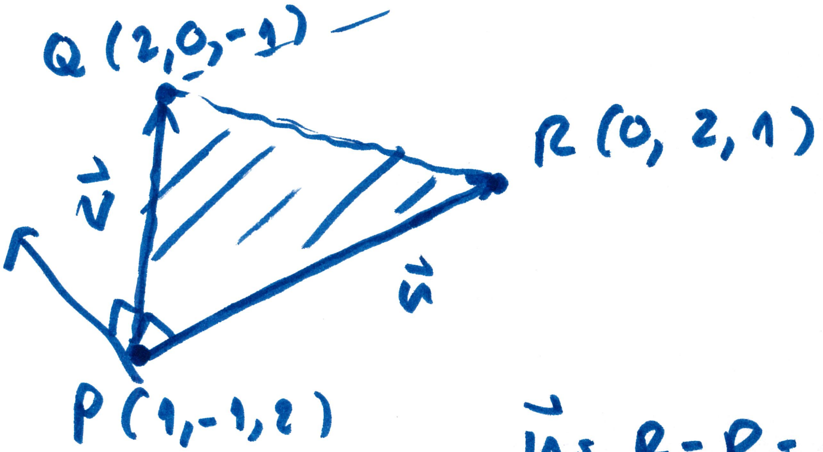
ในทำนองเดียวกันสำหรับ $\vec{v}\times\vec{u}$, เมื่อ $\underline{\vec{v}\times\vec{u} = -\vec{u}\times\vec{v}}$.

ขนาด $\|\vec{v}\times\vec{u}\| = \|\vec{u}\times\vec{v}\| = 6\sqrt{5}$

ทิศทาง $\vec{v}\times\vec{u}$ = − ทิศทาง $\vec{u}\times\vec{v} = -1\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ ∎

2.2.) จงหาพท. $\triangle PQR$ และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบที่บรรจุ $\triangle PQR$. ④

$P(1,-1,2)$, $Q(2,0,-1)$, $R(0,2,1)$



• ต่อจากรูป $\vec{u}, \vec{v}$ ตามรูป 3 รูป และมีจุดเริ่มต้นร่วมกัน

$$\vec{u} = R - P = (0-1,\ 2-(-1),\ 1-2) = (-1, 3, -1)$$

$$\vec{v} = Q - P = (2-1,\ 0-(-1),\ -1-2) = (1, 1, -3)$$

อาศัยหลัก cross product.

$$\boxed{\text{พท. } \triangle PQR = \frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\|}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉาก $\triangle PQR$

$$= \frac{1}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}(\vec{u}\times\vec{v})$$

• $$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

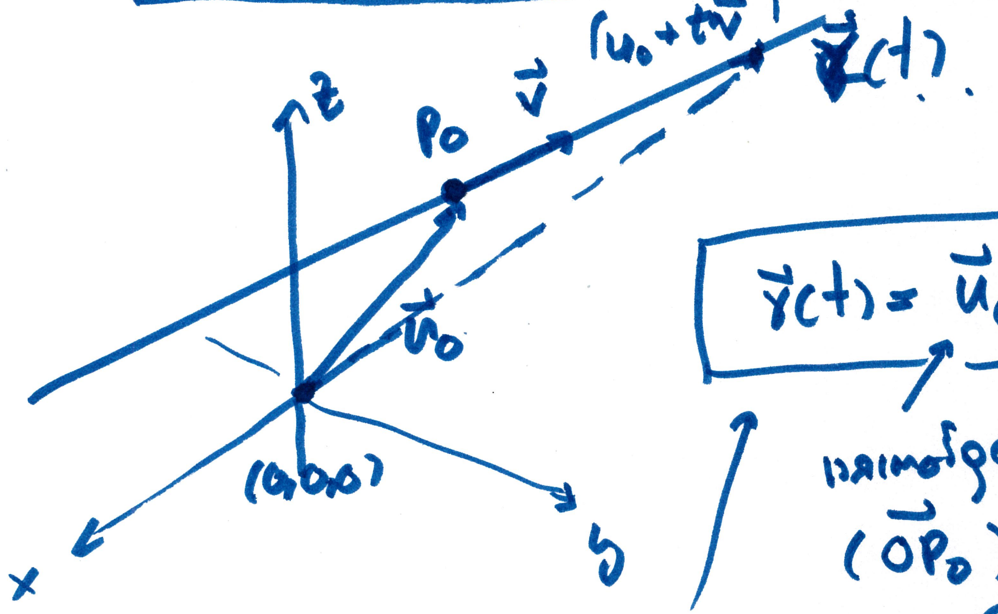
$$= (-9+1)\vec{i} + (-1-3)\vec{j} + (-1-3)\vec{k}$$

$$= -8\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

$\therefore$ พท. $\triangle PQR = \frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-8)^2+(-4)^2+(-4)^2} = \frac{4}{2}\sqrt{6}$

$= 2\sqrt{6}$

$\Rightarrow$ สมการเส้นตรง และระนาบ ใน 3มิติ :



สเกลาร์

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{u}_0 + t\vec{v}}$$

เวกเตอร์ บนเส้นตรง

เวกเตอร์จุดบนเส้นตรง. $(\vec{OP_0})$

รูปสมการเส้นตรงใน 3มิติ. (รูปแบบเวกเตอร์.)

(หรือ ในรูป พาราเมตริก)

พาราเมตริก.

2D: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= u_1 + tv_1 \\ y &= u_2 + tv_2 \end{aligned}}$

$$\left[\ \vec{r}(t) = \vec{u}_0 + t\vec{v}\ \right]$$

3D: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \\ tv_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= u_1 + tv_1 \\ y &= u_2 + tv_2 \\ z &= u_3 + tv_3 \end{aligned}}$

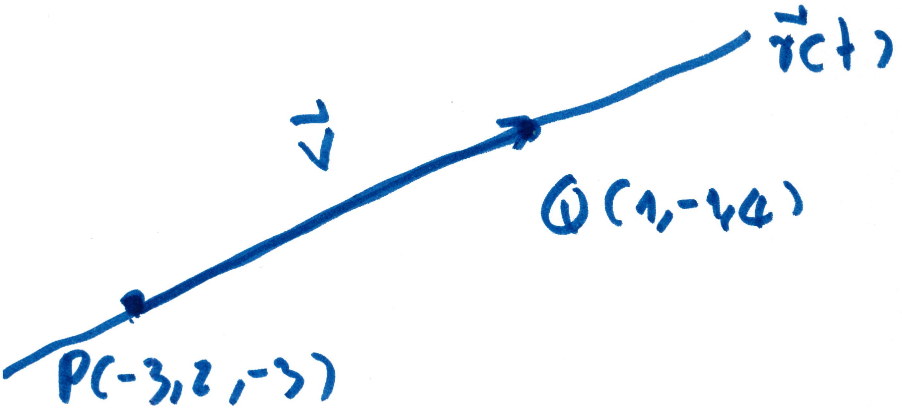
• เส้นตรง: ① จุดที่เส้นตรงผ่าน $P_0 \rightarrow \vec{u}_0 = \vec{OP_0}$

②. เวกเตอร์ บนเส้นตรง $\vec{v}$.

$\Rightarrow \boxed{r(t) = \vec{u}_0 + t\vec{v}}$

Ex: หาสมการพาราเมตริกที่ผ่านจุด

$P(-3,2,-3)$ และ $Q(1,-1,4)$



สร้างเส้นตรง $\vec{r}(t)$

① จุดบนเส้นตรง
(เลือก P)

② ทิศทางเวกเตอร์บนเส้นตรง

$\vec{v} = \vec{PQ} = (4,-3,7)$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

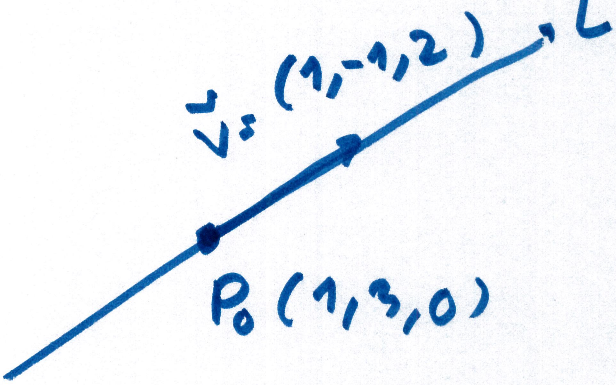
รูปแบบพาราเมตริก
$$\begin{bmatrix} x = -3 + 4t \\ y = 2 + (-3)t \\ z = -3 + 7t \end{bmatrix}$$

check: ผ่าน P $\Rightarrow t = 0 \Rightarrow \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{P}$

ผ่าน Q $\Rightarrow t = 1 \Rightarrow \vec{r}(1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{Q}$

Ex: 1.4.5. จงหาระยะทาง จากจุด $S(1,1,5)$ ไปยัง เส้นตรง L ในปริภูมิ 3 มิติ. ที่มีสมการเป็น.

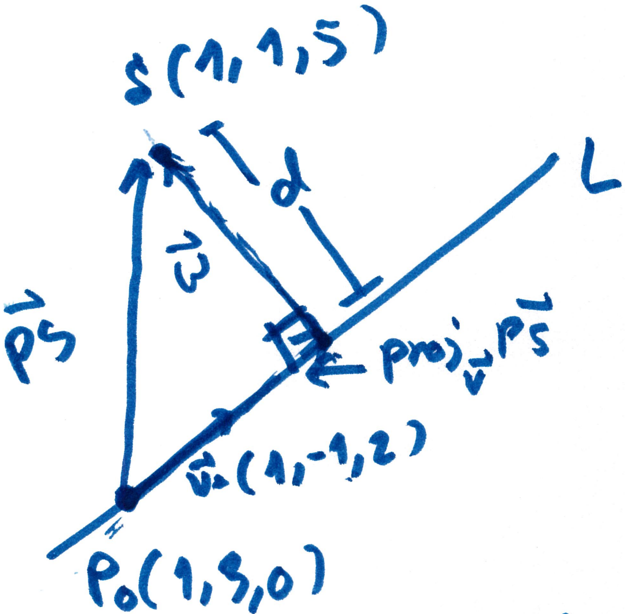
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$



① จุดบนเส้นตรง

② เวกเตอร์ที่ขนานเส้นตรง.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{r}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{P_0}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$



หา d: $\Rightarrow d = \|\vec{w}\|$

$$\vec{PS} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{PS} + \vec{w}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \vec{PS} - \text{proj}_{\vec{v}}\vec{PS}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{(\vec{PS}\cdot\vec{v})\,\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{((0,-2,5)\cdot(1,-1,2))}{(1+(-1)^2+2^2)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix} - \left(\frac{\cancel{0+2+10}}{\cancel{6}}\right)^{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

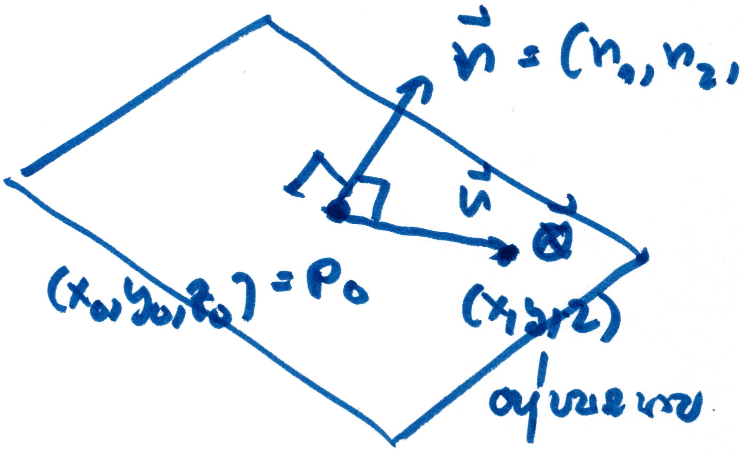
$$\Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

(check: $\vec{PS} = \text{proj}_{\vec v}\vec{PS} + \vec{w}$

$$= \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\5\end{pmatrix} \checkmark)$$

ดังนั้น $d = \|\vec{w}\| = \sqrt{(-2)^2+0+1^2} = \sqrt{5}$ ■

สมการระนาบ ของ 3 มิติ:



ต้องทราบ.

① จุดบนระนาบ. P_0

② เวกเตอร์ตั้งฉาก $\vec n$

$\Rightarrow$ $\underline{\overrightarrow{P_0Q} \perp \vec n}$ เพราะว่า Q เป็นจุดใดๆ บนระนาบ.

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(n_1, n_2, n_3) = 0$$

$$\Rightarrow (n_1x - n_1x_0) + (n_2y - n_2y_0) + (n_3z - n_3z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{n_1x + n_2y + n_3z = \underbrace{n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0}_{d}}$$

สมการระนาบ.

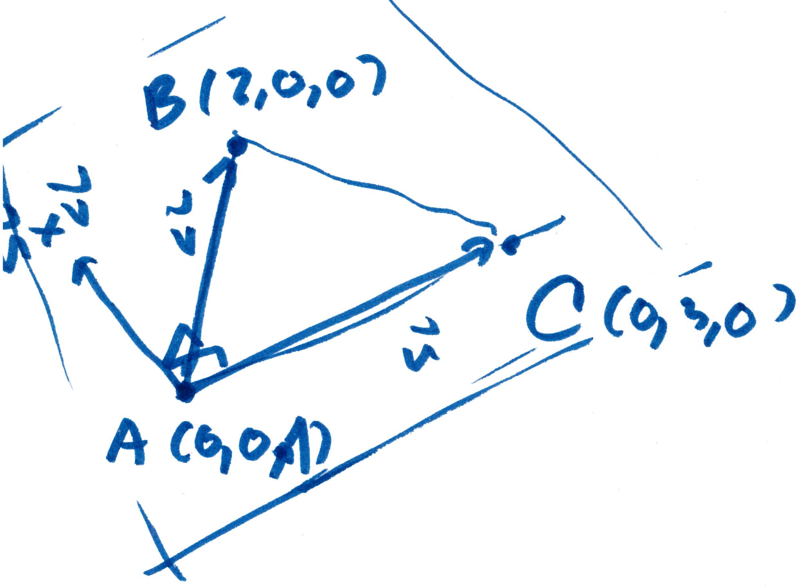
(หรือ) (**)

$$\boxed{n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0}$$

เมื่อ $\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$, $P_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$

Ex: หาสมการของระนาบที่ผ่านจุด.

$A(0,0,1)$, $B(2,0,0)$, $C(0,3,0)$



วิธีหาระนาบ

① จุดที่ระนาบผ่าน.
(เลือก A.)

② เวกเตอร์ตั้งฉากกับระนาบ
$\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$

$(\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v})$ **

$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{u}=\vec{AC}=(0,3,-1)$

$\vec{v}=\vec{AB}=(2,0,-1)$

$$\Rightarrow \vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 0 & 3\\ 2 & 0\end{matrix} = -3\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$$

$\Rightarrow \vec{n}=(-3,-2,-6)$

$\vec{A}=(0,0,1)$

สมการระนาบ. $n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$

$\Rightarrow (-3)(x-0)+(-2)(y-0)+(-6)(z-1)=0$ ∎

$$\Rightarrow \quad +3x + 2y + 6z = +6$$

การบ้าน: แบบฝึกหัด 1.4.

ข้อ 6 + 7.