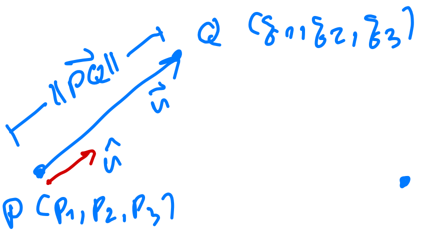
ทบทวน: เวกเตอร์เบื้องต้น.



$\vec{PQ} = \vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
- $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

$\Rightarrow$ ตัวดำเนินการของเวกเตอร์ (dot product, cross product).

ผลคูณเชิงสเกลาร์.

- Dot product (Scalar product) ให้ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ เป็นเวกเตอร์

$$\boxed{\underset{\uparrow \text{ dot}}{\vec{u} \cdot \vec{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3} \leftarrow \text{scalar.}$$

Ex: $\vec{u} = (-1, 7, 4)$, $\vec{v} = (6, 2, -\frac{1}{2})$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1)\cdot 6 + 7\cdot 2 + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -6 + 14 - 2 = 6$$

สมบัติ:

1.) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\vec{u}\|^2$

2.) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3.) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \pm \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \pm \vec{u} \cdot \vec{w}$

4.) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

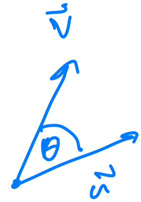
5.) $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.

ทบ: ถ้า $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ ที่มีมุมระหว่างเวกเตอร์ $0 \le \theta \le \pi$

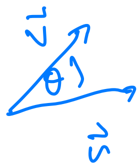
แล้ว

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta.}$$

$\|\vec{u}\| \ge 0$ $\quad$ $\|\vec{v}\| \ge 0$ $\quad$ $\cos\theta$ กำหนดเครื่องหมาย $(\pm)$



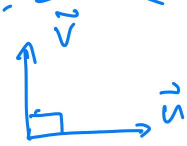
ข้อสังเกต: เครื่องหมาย $\pm$ ของ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ขึ้นอยู่กับ θ



$0 \le \theta < 90$

$\cos\theta > 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

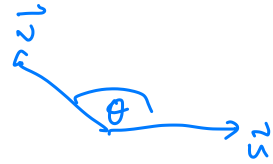


$\theta = 90^\circ$

$\cos\theta = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

การตั้งฉากของเวกเตอร์.

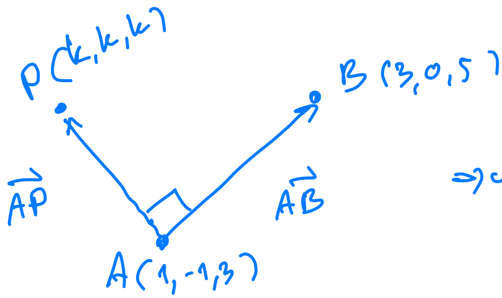


$90 < \theta \le \pi$

$\cos\theta < 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

Ex: จงหาค่า k ที่ทำให้ เวกเตอร์ $\vec{AB}$, $A(1,-1,3)$, $B(3,0,5)$ ตั้งฉากกับ $\vec{AP}$ เมื่อ $P(k,k,k)$. (หา k ที่ $\vec{AB} \perp \vec{AP}$)



$\vec{AB} \perp \vec{AP}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{AB} \cdot \vec{AP} = 0$

$\Rightarrow$ หา $\vec{AB} = B - A = (3-1, 0-(-1), 5-3)$

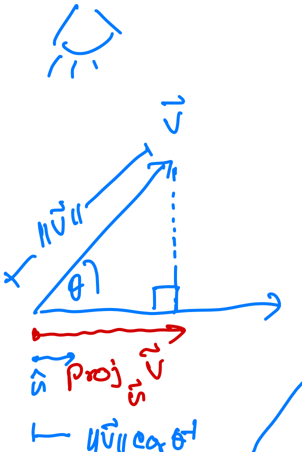
$= (2, 1, 2)$

$\Rightarrow$ หา $\vec{AP} = P - A = (k-1, k+1, k-3)$

$0 = \vec{AB} \cdot \vec{AP} = 2\cdot(k-1) + 1\cdot(k+1) + 2\cdot(k-3) = 5k - 7 = 0$

$\Rightarrow k = \frac{7}{5}$ ∎

⇒ Vector projection.



$$\Rightarrow \mathrm{proj}_{\vec u}\vec v = \|\vec v\|\cos\theta\,\hat u \qquad \hat u = \frac{\vec u}{\|\vec u\|}$$

$$= \|\vec v\|\cos\theta\,\frac{\vec u}{\|\vec u\|}\cdot\frac{\|\vec u\|}{\|\vec u\|}$$

$$= \underbrace{\|\vec u\|\|\vec v\|\cos\theta}_{(\vec u\cdot\vec v)}\,\frac{\vec u}{\|u\|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{proj}_{\vec u}\vec v = \frac{(\vec u\cdot\vec v)\vec u}{\|\vec u\|^2}}$$

$$\mathrm{proj}_{\vec u}\vec v = 1\cdot\|\vec v\|\cos\theta\,\hat u$$

$$= \underbrace{\|\hat u\|\|\vec v\|\cos\theta}\,\hat u$$

$$\boxed{\mathrm{proj}_{\vec u}\vec v = \underbrace{(\vec v\cdot\hat u)}_{\text{ขนาด}}\,\hat u}$$

ทิศทาง.

$\boxed{\text{Ex:}}$ จงหา $\mathrm{proj}_{\vec v}\vec u$ เมื่อกำหนด. $\vec u = (6,3,2)$, $\vec v = (1,-2,-2)$

$$\mathrm{proj}_{\vec v}\vec u = (\vec u\cdot\hat v)\,\hat v$$

จาก $\hat v = \dfrac{(1,-2,-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} \leftarrow \dfrac{\vec v}{\|\vec v\|}$

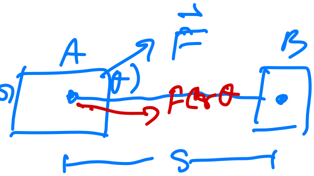
$$= \frac{1}{3}(1,-2,-2)$$

$$= \left[(6,3,2)\cdot\frac{1}{3}(1,-2,-2)\right]\frac{1}{3}(1,-2,-2)$$

$$= \frac{1}{9}(6-6-4)(1,-2,-2) = \frac{-4}{9}(1,-2,-2)$$

$$= \mathrm{proj}_{\vec v}\vec u$$

⇒ งาน : W = แรงในทิศทางเคลื่อนที่ · ระยะกระจัด

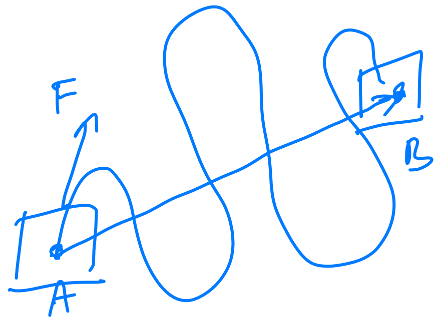


$W = F\cos\theta \cdot S.$

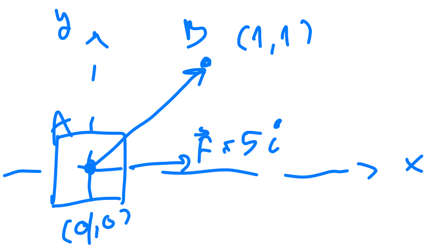
$$\Rightarrow \quad W = \|\vec{F}\|\cos\theta \cdot \|\vec{AB}\|$$

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{AB}}$$

$\vec{AB}$ เป็นเวกเตอร์กระจัด.



Ex: จงหางานที่เกิดจาก $\vec{F} = 5i$ ในการทำให้วัตถุเคลื่อนที่จากจุดกำเนิดไปยังจุด $(1,1)$



- $\vec{F} = 5i = (5,0)$
- $\vec{AB} = B - A = (1-0, 1-0) = (1,1)$

$W = \vec{F} \cdot \vec{AB} = (5,0)\cdot(1,1) = 5$ ◼

⇒ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross product.)

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\tilde{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\tilde{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\tilde{k}}$$

$\boxed{\text{Ex:}}$ กำหนด $\vec u = (1,3,4)$, $\vec v = (2,7,-5)$ จงหา $\vec u \times \vec v$

$$\vec u \times \vec v = \left|\begin{matrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{matrix}\right.\begin{matrix} \vec i & \vec j \\ 1 & \\ 2 & 7 \end{matrix} = \begin{aligned} &(3(-5) - 7\cdot 4)\vec i \\ &+ (4\cdot 2 - (-5)\cdot 1)\vec j \\ &+ (1\cdot 7 - 3\cdot 2)\vec k \end{aligned}$$

$$= (-15-28)\vec i + (8+5)\vec j + (7-6)\vec k$$

$$= -43\vec i + 13\vec j + \vec k = (-43, 13, 1) \qquad \blacksquare$$

ทบ: $\vec u \times \vec v \perp \vec u$ และ $\vec u \times \vec v \perp \vec v$

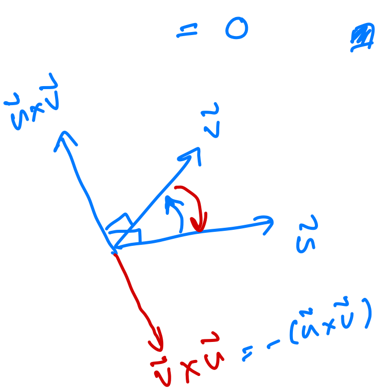
พิสูจน์. $\vec u \times \vec v = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec i + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec j + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec k$

$(\vec u \times \vec v \perp \vec u)$

$$\vec u \times \vec v \cdot \vec u = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$= (\cancel{u_1u_2v_3} - \cancel{u_1u_3v_2}) + (\cancel{u_2u_3v_1} - \cancel{u_2u_1v_3}) + (\cancel{u_3u_1v_2} - \cancel{u_3u_2v_1})$$

$$= 0 \qquad \blacksquare$$



$\vec u \times \vec v \perp \vec u$, $\vec u \times \vec v \perp \vec v$

ตั้งฉากกัน.

ข้อสังเกต: $\vec u \times \vec v = -\vec v \times \vec u$

สมบัติ:

1.) $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$

2.) $(k\vec{u})\times\vec{v} = k(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\times(k\vec{v})$

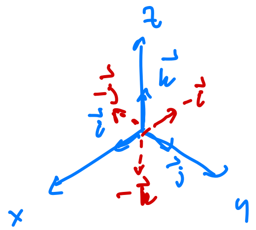
3.) $\vec{u}\times(\vec{v}\pm\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\pm(\vec{u}\times\vec{w})$

4.) $(\vec{u}\pm\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\times\vec{w})\pm(\vec{v}\times\vec{w})$

5.) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

6.) $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$

ไดอะแกรม:



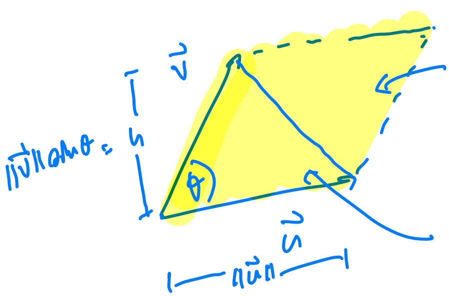
$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} = \vec{j}\times(-\vec{i})$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} = \vec{k}\times(-\vec{j})$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} = \vec{i}\times(-\vec{k})$

กฎ:

$$\boxed{\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta}$$

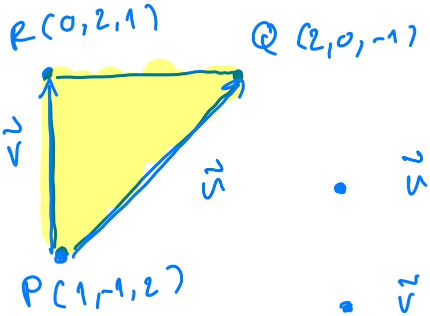


พท▱ = ฐาน × สูง = $\underbrace{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta}_{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}$

พท △ = $\frac{1}{2}$ พท.▱ = $\frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\|$

Ex: จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น

$P(1,-1,2)$, $Q(2,0,-1)$, $R(0,2,1)$



พท. $\Delta PQR = \frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\|$

- $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2-1, 0+1, -1-2)$
  $= (1, 1, -3)$
- $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = R - P = (0-1, 2+1, 1-2)$
  $= (-1, 3, -1)$

จาก $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{matrix} = (-1-(-9))\,\vec{i} + (3-(-1))\,\vec{j} + (3-(-1))\,\vec{k}$

$= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$

$\therefore$ พท $\Delta PQR = \frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+4^2+4^2} = \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}}\sqrt{6}$

$= 2\sqrt{6}$ ■

การบ้าน: แบบฝึกหัด 1.3

(1.4 + 2.3 + 3.2)