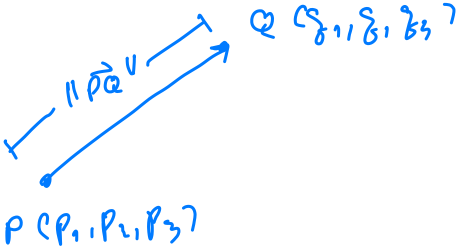
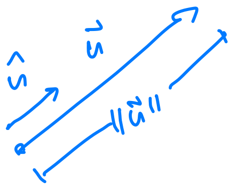
ทบทวน: เวกเตอร์เบื้องต้น



$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$



$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

- ต่อด้วยเรื่องการคูณเวกเตอร์ (dot product / cross product.)

⇒ Dot product (ผลคูณเชิงสเกลาร์)

ให้ $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3} \leftarrow \text{scalar.}$$

vectors

Ex: หาผลคูณเชิงสเกลาร์.

1.) $\underbrace{(-1, 7, 4)}_{\vec{u}} \cdot \underbrace{(6, 2, -\frac{1}{2})}_{\vec{v}} = (-1)\cdot 6 + 7\cdot 2 + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -6 + 14 - 2 = 6$

2.) ให้ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{j} - \vec{k}$ หา $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(+0\vec{i})$

จ. ได้ว่า $\vec{u} = (1,2,-3)$, $\vec{v} = (0,2,-1)$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\cdot 0 + 2\cdot 2 + (-3)(-1) = 0 + 4 + 3 = 7 \quad \blacksquare$$

<u>สมบัติของ dot product:</u> ให้ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ , k เป็นสเกลาร์.

1.) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\vec{u}\|^2$

2.) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

$$= v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

3.) $\vec{u}\cdot(\vec{v} \pm \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} \pm \vec{u}\cdot\vec{w}$

$$\Rightarrow \vec{u}\cdot(\vec{v} \pm \vec{w}) = \vec{u}\cdot(v_1 \pm w_1, v_2 \pm w_2, v_3 \pm w_3)$$

$$= u_1(v_1 \pm w_1) + u_2(v_2 \pm w_2) + u_3(v_3 \pm w_3)$$

$$= (u_1v_1 \pm u_2w_1) + (u_2v_2 \pm u_2w_2) + (u_3v_3 \pm u_3w_3)$$

$$= (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \pm (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3)$$

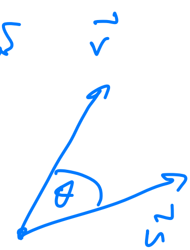
$$= \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}. \quad \blacksquare$$

4.) $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(k\vec{v})$

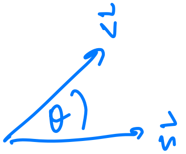
5.) $\vec{0}\cdot\vec{u} = 0$

มุมระหว่างเวกเตอร์

ทบ: $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta}$

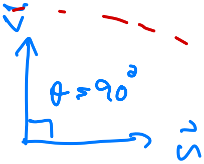


<u>ข้อสังเกต:</u> $\vec{u}\cdot\vec{v}$ จะมีเครื่องหมาย $(\pm)$ ขึ้นอยู่กับ $\cos\theta$.



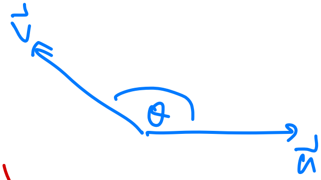
$0 \le \theta < 90^\circ \Rightarrow \cos\theta > 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$



$\theta = 90^\circ \Rightarrow \cos\theta = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

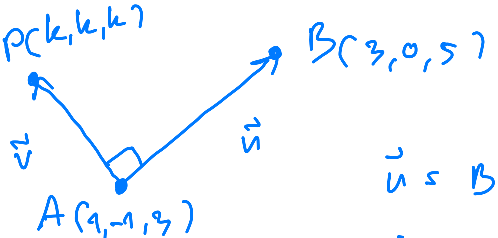


$90^\circ < \theta \le 180^\circ$

$\Rightarrow \cos\theta < 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

Ex: หาค่า k ที่ทำให้เวกเตอร์จากจุด A(1,-1,3) ไปยัง B(3,0,5) ตั้งฉากกับเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ A ไปยังจุด P(k,k,k)



หาค่า k ที่ทำให้ $\vec{u} \perp \vec{v}$

$\vec{u} = B - A = (3-1, 0-(-1), 5-3) = (2, 1, 2)$

$\vec{v} = P - A = (k-1, k-(-1), k-3) = (k-1, k+1, k-3)$

$\vec{u} \perp \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

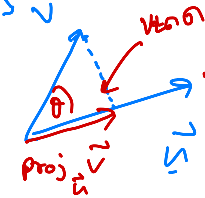
$0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (k-1) + 1 \cdot (k+1) + 2(k-3)$

$\Rightarrow \quad 0 = 2k - 2 + k + 1 + 2k - 6 = 5k - 7$

$\Rightarrow \quad 5k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{5}$ ∎ $\therefore P = \left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right)$

$\Rightarrow$ projection of vector.

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \underbrace{(\|\vec{v}\| \cos\theta)}_{\text{ขนาด}} \underbrace{\hat{u}}_{\text{ทิศทาง}}}$$



ขนาด $\|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \cos\theta$

ทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ $(\hat{u})$

$$= \|\vec{v}\| \cos\theta \, \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$= \frac{\underbrace{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta}_{\vec{u}\cdot\vec{v}} \, \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\,\vec{u}}$$

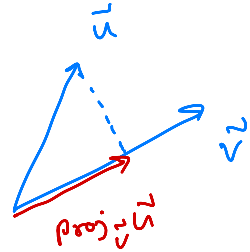
$$\operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \underbrace{\overbrace{\|\hat{u}\|}^{=1}\|\vec{v}\|\cos\theta}\,\hat{u}$$

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = (\vec{v}\cdot\hat{u})\,\hat{u}}$$

Ex: $\vec{u} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$

หา. $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = (\vec{u}\cdot\hat{v})\,\hat{v} \quad \left(\text{หรือ} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v}\right)$$



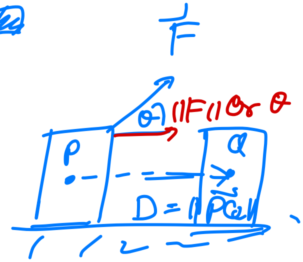
จาก $\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}(1,-2,-2) = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}(1,-2,-2) = \frac{1}{3}(1,-2,-2)$

ดังนั้น $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = (\vec{u}\cdot\hat{v})\,\hat{v} = \left[(6,3,2)\cdot\frac{1}{3}(1,-2,-2)\right]\frac{1}{3}(1,-2,-2)$

$$= \frac{1}{9}\left[6\cdot 1 + 3\cdot(-2) + 2(-2)\right](1,-2,-2)$$

$$= \frac{-4}{9}(1,-2,-2)$$

ผลคูณสเกลาร์ในฟิสิกส์ เรื่อง งาน W



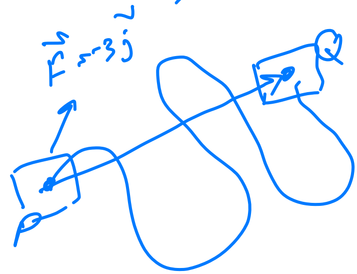
$$W = \underbrace{\|F\|\cos\theta}_{\text{แรง}} \cdot \underbrace{D}_{\text{ระยะทาง}}$$

$$\Rightarrow \quad W = \|\vec{F}\|\cos\theta \cdot \|\vec{PQ}\| = \|\vec{F}\|\|\vec{PQ}\|\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{PQ}$$

แรง ↗ เวกเตอร์การกระจัด ↗

งาน $\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{PQ}}$ เคลื่อนที่จากจุด P ไป Q.

Ex: จงหางานที่เกิดจาก $\vec{F} = -3\vec{j}$ N. กระทำต่อวัตถุที่เคลื่อนที่ จาก $\overset{P}{(1,3)}$ ไปยัง $\overset{Q}{(4,7)}$

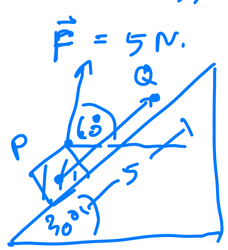


$W = \vec{F}\cdot$ เวกเตอร์การกระจัด , $\vec{PQ} = \begin{pmatrix}4-1\\7-3\end{pmatrix}$

$= (0,-3)\cdot(3,4)$ $\qquad = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$= 0\cdot3 + (-3)\cdot4 = -12$ N.m (J.) $\blacksquare$

Ex:



จงหางานที่ทำได้ในการลากกล่องเคลื่อนที่ ไปได้ระยะทาง 5 m. บนพื้นเอียง.

$W = \vec{F}\cdot\vec{PQ} = \|\vec{F}\|\|\vec{PQ}\|\cos\theta$

$= 5\cdot5\cos(30°) = 25\cos(30°)$ $\blacksquare$

- ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (Cross product)

$\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{matrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

Ex: ถ้า $\vec{u} = (1,3,4)$, $\vec{v} = (2,7,-5)$ จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{matrix} = (3\cdot(-5) - 7\cdot 4)\,\vec{i} + (4\cdot 2 - (-5)1)\,\vec{j} + (1\cdot 7 - 3\cdot 2)\,\vec{k}$$

$$= (-15-28)\,\vec{i} + (8+5)\,\vec{j} + (7-6)\,\vec{k}$$

$$= -43\vec{i} + 13\vec{j} + \vec{k} = (-43, 13, 1)$$

ข้อสังเกต: $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$

ทบ: เวกเตอร์ $\vec{u}\times\vec{v}$ จะตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

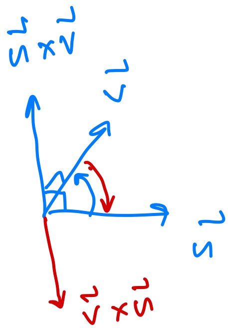
$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{k}$$

พิสูจน์. $\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)$

(u_1, u_2, u_3)

$$= (\cancel{u_1u_2v_3} - \cancel{u_1u_3v_2}) + (\cancel{u_2u_3v_1} - \cancel{u_2u_1v_3}) + (\cancel{u_3u_1v_2} - \cancel{u_3u_2v_1})$$

$$= 0.$$



ข้อสังเกต: $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$

สมบัติ:

1.) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

2.) $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (k\vec{v})$

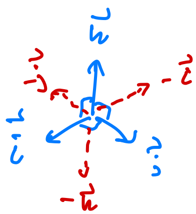
3.) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

4.) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

5.) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

6.) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

ข้อสังเกต: เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน.



$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = (-\vec{j}) \times \vec{i}$

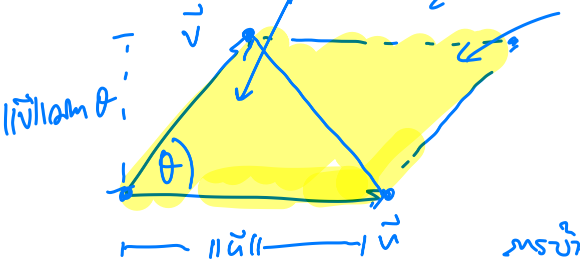
$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = (-\vec{k}) \times \vec{j}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = (-\vec{i}) \times \vec{k}$

ทบ: $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีมุมระหว่างเวกเตอร์ $0 \leq \theta \leq \pi$ แล้ว

$$\boxed{\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta .}$$

พท.$\Delta = \frac{1}{2}$ พท.▱.



พท. $= \underbrace{\|\vec{u}\|}_{\text{ฐาน}} \underbrace{\|\vec{v}\| \sin\theta}_{\text{สูง}}$

$= \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

(p.20-21.)

การบ้าน: 1.4, 2.2, 3.2 แบบฝึกหัด 1.3