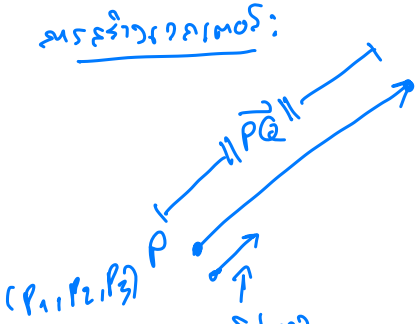
ชุดที่ 1: เวกเตอร์ในสามมิติ

การสร้างเวกเตอร์:



$$\vec{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

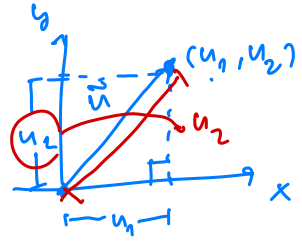
$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

การเขียน: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, (u_1, u_2, u_3), \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

ขนาดเวกเตอร์: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

เวกเตอร์ 2D:



$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

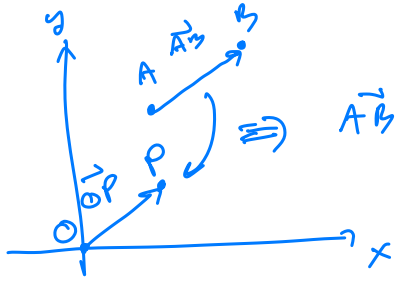
Ex: จงหาเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้น $A(-3,4,1)$ จุดปลาย $B(-5,2,2)$ และขนาดของ $\vec{AB}$

$$\vec{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

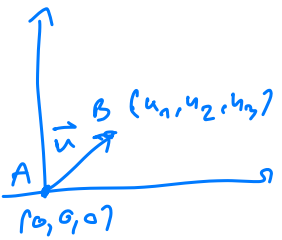
$$\Rightarrow \vec{AB} = \begin{pmatrix} -5-(-3) \\ 2-4 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ขนาด $\vec{AB} = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$ ■

ข้อสังเกต:



$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{OP}$

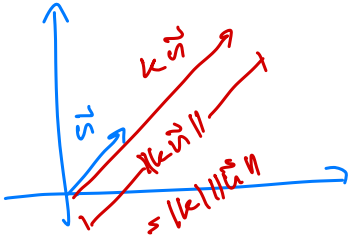


สมบัติของเวกเตอร์: $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

- บวก/ลบ
$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1,u_2,u_3) \pm (v_1,v_2,v_3)$$
$$= (u_1 \pm v_1, u_2 \pm v_2, u_3 \pm v_3)$$

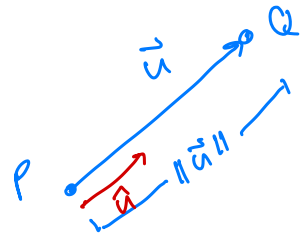
- คูณด้วย scalar, k เป็น scalar $\in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (ขึ้นอยู่กับว่าเซตนี้เป็นเซตของอะไร)
$$k\vec{u} = k(u_1,u_2,u_3)$$
$$= (ku_1, ku_2, ku_3)$$

ข้อสังเกต: $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$



พิสูจน์:
$$\|k\vec{u}\| = \|k(u_1,u_2,u_3)\|$$
$$= \|(ku_1, ku_2, ku_3)\|$$
$$= \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2 + (ku_3)^2}$$
$$= |k|\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} = |k|\|\vec{u}\|$$ ☐

• เวกเตอร์หนึ่งหน่วย / เวกเตอร์หน่วยแสดง.

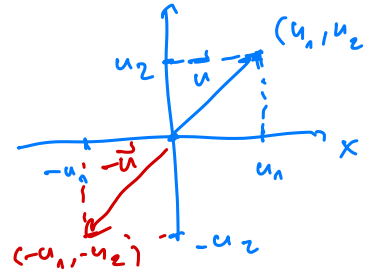


$\hat{u}$ คือ เวกเตอร์หน่วยหน่วยของ เวกเตอร์ $\vec{u}$

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{u_1}{\|\vec{u}\|}, \frac{u_2}{\|\vec{u}\|}, \frac{u_3}{\|\vec{u}\|}\right)$$

แสดงว่า $\|\hat{u}\| = 1 \Rightarrow \|\hat{u}\| = \left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\| = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\|\vec{u}\| = 1$

หมายเหตุ: เวกเตอร์หนึ่งหน่วยขนานกับ $\vec{u}$ คือ $-\hat{u}$



Ex: จงหาเวกเตอร์หน่วยหนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\vec{u} = (6, -4, 2)$

วิธีทำ: • หาเวกเตอร์หน่วยหนึ่งหน่วยของ $\vec{u}$ คือ

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

โดยที่ $\|\vec{u}\| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36+16+4}$

$= \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ (4×14)

$$= \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{14}} \cdot (6, -4, 2)$$

$$\hat{u} = \left(\frac{6}{2\sqrt{14}}, \frac{-4}{2\sqrt{14}}, \frac{2}{2\sqrt{14}}\right) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

check: $\|\hat{u}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{14} + \frac{4}{14} + \frac{1}{14}} = 1$ ✓

ทิศทางข้าม $\hat{u}$ คือ $-\hat{u} = -1 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

- เวกเตอร์หน่วยมาตรฐาน:

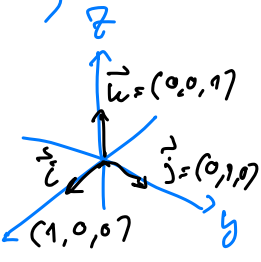
$$\begin{bmatrix} \vec{i} = (1,0,0) \\ \vec{j} = (0,1,0) \\ \vec{k} = (0,0,1). \end{bmatrix}$$

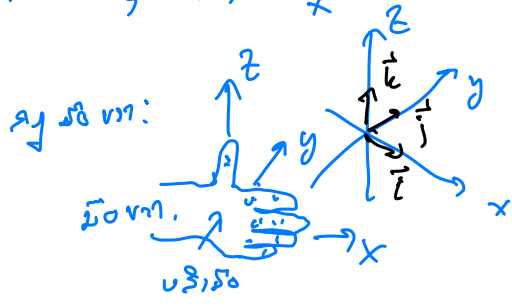
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

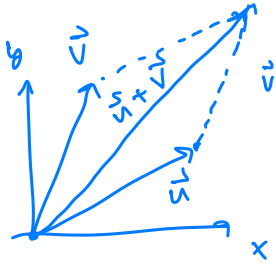
$= (u_1, 0, 0) + (0, u_2, 0) + (0, 0, u_3)$

$= u_1(1,0,0) + u_2(0,1,0) + u_3(0,0,1)$

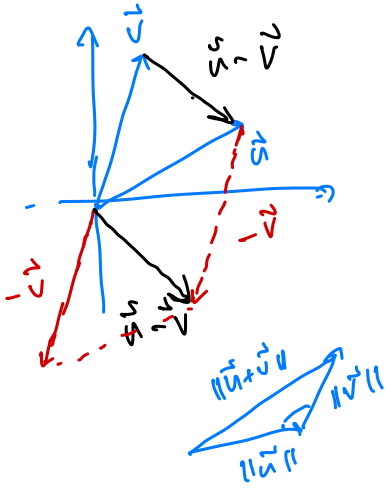
$= u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$







- $\vec{u} + \vec{v}$



- $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

รวมสมบัติของเวกเตอร์:

1.) $\|\vec{u}\| \geq 0$, $\|\vec{u}\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$

2.) $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$

3.) $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$