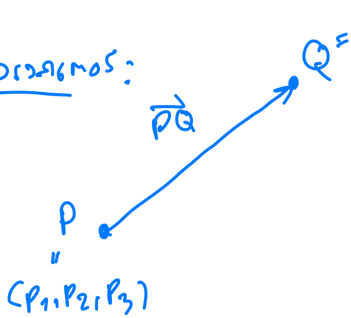
บทที่ 1: Vector เบื้องต้น.

การสร้างเวกเตอร์:



$$\vec{PQ} = Q - P$$

$$= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

รูปแบบการเขียน. $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, (u_1, u_2, u_3), $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

Ex: ให้ $P(0,1,1)$ และ $Q(2,1,3)$

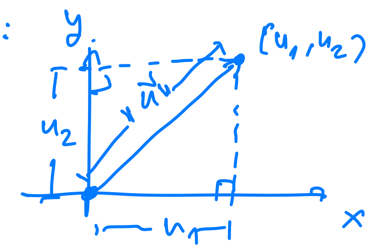
จงหา เวกเตอร์ $\vec{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ∎

ขนาดของเวกเตอร์: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$\|\vec{u}\| := \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$

2D:

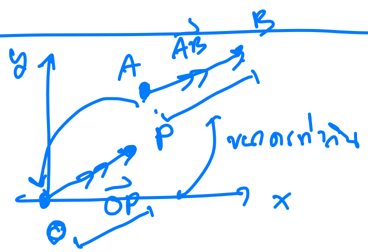


$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

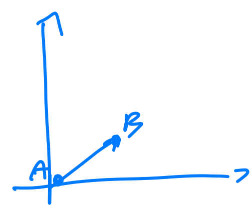
Ex: $\vec{u} = (2, 0, 2)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$ ∎

ข้อสังเกต:

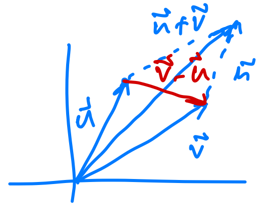


$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{OP}$



สมบัติของเวกเตอร์:

$$\vec{u} = (\overset{x}{u_1}, \overset{y}{u_2}, \overset{z}{u_3})$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

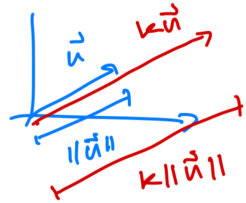


- บวก/ลบ. $\vec{u} \pm \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \pm (v_1, v_2, v_3)$
$$= (u_1 \pm v_1,\ u_2 \pm v_2,\ u_3 \pm v_3)$$

- คูณด้วย scalar, k เป็น scalar เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$

จำนวนจริง   จำนวนเชิงซ้อน.

$$k\vec{u} = k(u_1, u_2, u_3)$$
$$= (ku_1, ku_2, ku_3)$$

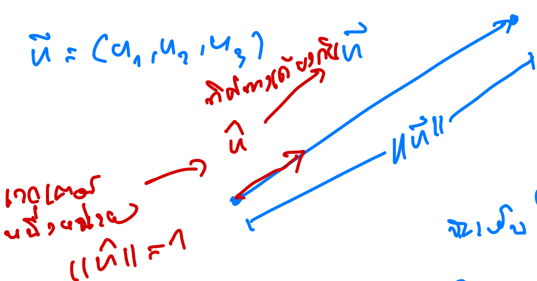


หมายเหตุ: $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$

พิสูจน์: $\|k\vec{u}\| = \|k(u_1, u_2, u_3)\| = \|(ku_1, ku_2, ku_3)\|$
$$= \sqrt{k^2u_1^2 + k^2u_2^2 + k^2u_3^2} = |k|\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} = |k|\,\|\vec{u}\|$$
∎

- เวกเตอร์หนึ่งหน่วย / เวกเตอร์ทิศทาง.

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$



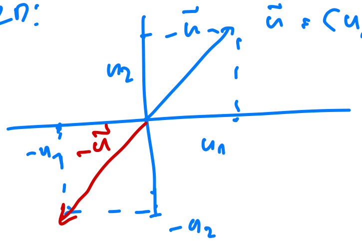
$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \quad \vec{u} \neq \vec{0}$$
$\|\vec{u}\|$ ← จำนวนจริง > 0

สังเกตได้ว่า $\|\hat{u}\| = 1$

พิสูจน์: $\|\hat{u}\| = \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \frac{1}{\cancel{\|\vec{u}\|}} \cancel{\|\vec{u}\|} = 1$ ∎

หมายเหตุ: เวกเตอร์ทิศตรงข้าม $\vec{u}$ คือ $-\vec{u}$

ex:



$\vec{u} = (u_1, u_2)$, $-\vec{u} = -1(u_1, u_2) = (-u_1, -u_2)$

ex: จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{u} = (6, -4, 2)$

→ หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{u}$ คือ $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

โดยที่ $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{\underset{36}{6^2} + \underset{16}{(-4)^2} + \underset{4}{2^2}} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

ดังนั้น $\hat{u} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{14}}}_{\frac{1}{\|\vec{u}\|}} \cdot \underbrace{(6, -4, 2)}_{\vec{u}} = \left(\dfrac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}\sqrt{14}}, \dfrac{\cancel{-4}^{2}}{\cancel{2}\sqrt{14}}, \dfrac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}\sqrt{14}}\right)$

$\Rightarrow \hat{u} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{-2}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)$ ■

check: $\|\hat{u}\| = \sqrt{\dfrac{9}{14} + \dfrac{4}{14} + \dfrac{1}{14}}$

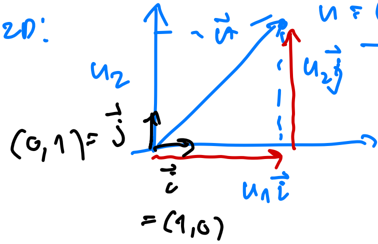
$= \sqrt{\dfrac{14}{14}} = 1$ ■

เวกเตอร์ที่มีทิศตรงข้าม $\hat{u}$ คือ $-\hat{u}$

$-\hat{u} = -1\left(\dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{-2}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)$ ■

- เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน: $(\vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0),$
  $\vec{k} = (0,0,1))$

ex:

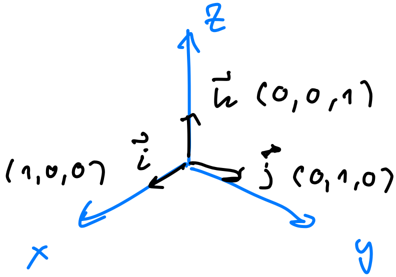


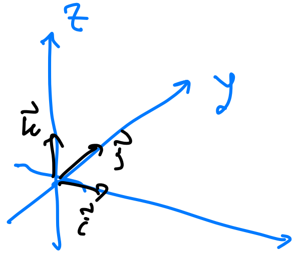
$\vec{u} = (u_1, u_2)$

$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$

$\vec{u} = (u_1, u_2) = (u_1, 0) + (0, u_2)$

$= u_1(1,0) + u_2(0,1) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$





สมบัติของขนาดเวกเตอร์:

1.) $\|\vec{u}\| \geq 0$, $\|\vec{u}\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$

2.) $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$

3.) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$