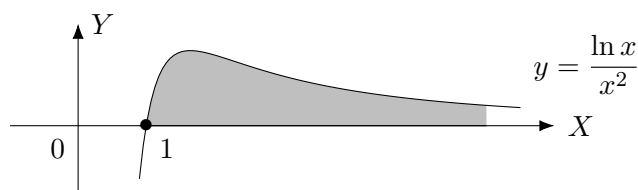


ตัวอย่าง 3.12.3 จงหาพื้นที่ของบริเวณ R ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \frac{\ln x}{x^2}$ กับแกน X เมื่อ $x \geq 1$



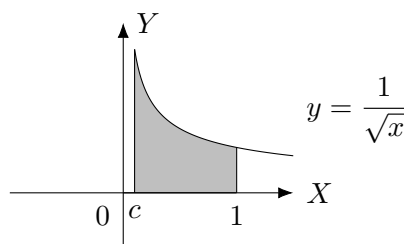
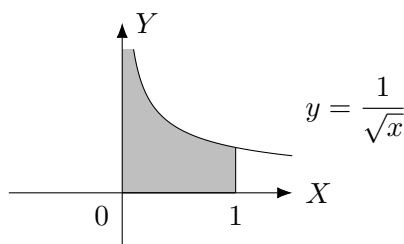
วิธีทำ พื้นที่ของบริเวณ R จะได้เป็น

$$\begin{aligned}
 R &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[(\ln x) \left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right]_1^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1 \right) \\
 &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln b}{b} \right) - 0 + 1 \\
 &= - \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{(1/b)}{1} \right) + 1 \quad (\text{ใช้กฎของโลปีตาล}) \\
 &= 0 + 1 = 1
 \end{aligned}$$

□

3.12.2 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง

พิจารณาบริเวณในจุดภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่ใต้โค้ง $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ เมื่อ $0 < x \leq 1$ ดังรูป



จะเห็นได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ นั่นคือ ลิมิตของฟังก์ชัน f เป็น $+\infty$ เมื่อ $x \rightarrow 0^+$ และฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $(0, 1]$ ดังนั้น $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ให้ $0 < c < 1$ ดังนั้น f ต่อเนื่องบน $[c, 1]$ ทำให้ $\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ หาค่าได้ และ

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_c^1 = 2 - 2\sqrt{c}$$

ถ้าให้ $c \rightarrow 0^+$ จะได้

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

เราจะใช้แนวคิดข้างต้นในการหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง ดังบทนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.12.2 (1) ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(a, b]$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ หรือ $-\infty$ หรือหาค่าไม่ได้ แล้วสำหรับ $a < c < b$ กำหนดให้

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) \, dx$$

(2) ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b)$ และ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ หรือ $-\infty$ หรือหาค่าไม่ได้ แล้วสำหรับ $a < d < b$ กำหนดให้

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{d \rightarrow b^-} \int_a^d f(x) \, dx$$

(3) ให้ $a < r < b$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, r) \cup (r, b]$ และ $\lim_{a \rightarrow r} f(x) = +\infty$ หรือ $-\infty$ หรือหาค่าไม่ได้แล้ว กำหนดให้

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= \int_a^r f(x) \, dx + \int_r^b f(x) \, dx \\ &= \lim_{c \rightarrow r^-} \int_a^c f(x) \, dx + \lim_{d \rightarrow r^+} \int_d^b f(x) \, dx \end{aligned}$$

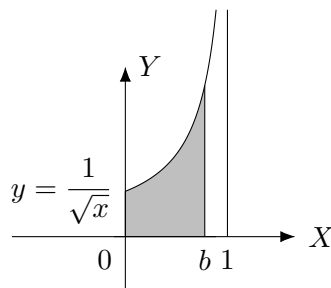
เมื่อ $a < c < r < d < b$

เราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง **คอนเวอร์จ (converge)** ก็ต่อเมื่อสามารถหาค่าลิมิตได้ และจะเรียกปริพันธ์ไม่ตรงแบบที่ไม่คอนเวอร์จว่า **ไดเวอร์จ (diverge)**

ถ้าลิมิตของ f เป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ ที่ x หลายค่า (แต่เป็นจำนวนจำกัด) บนช่วง $[a, b]$ เราจะนิยามปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองของ f โดยการแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อยที่ซึ่งค่าของ x เหล่านี้เป็นจุดปลายช่วงของแต่ละช่วงย่อยเพียงจุดเดียว แล้วจึงหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองในแต่ละช่วงย่อยตามบทนิยาม ถ้ามีปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองในช่วงย่อยใดไดเวอร์จ แล้วเราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f ไดเวอร์จบนช่วง $[a, b]$ แต่ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบในทุกช่วงย่อยคอนเวอร์จแล้วปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บนช่วง $[a, b]$ จะเป็นผลบวกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบบนช่วงย่อยเหล่านั้น

ตัวอย่าง 3.12.4 จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{1}{1-x} \, dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$ และ ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ต่อเนื่องบนช่วง $[0, 1)$ ดังนั้น $\int_0^1 \frac{1}{1-x} \, dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สองและ



$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[-\ln|1-x| \right]_0^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow 1^-} -(\ln(1-b) - 0) = +\infty
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ ไดเวอร์จ

□

ตัวอย่าง 3.12.5 จงหาค่าของ $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = +\infty$ และ $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = +\infty$ ดังนั้น $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง และ

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx + \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx$$

โดยต่อไปจะคำนวณค่าของ แต่ละเทอมในด้านขวามือของสมการจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^2 \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\arcsin \left(\frac{x-2}{2} \right) \right]_a^2 \\
 &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\arcsin 0 - \arcsin \left(\frac{a-2}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

และ

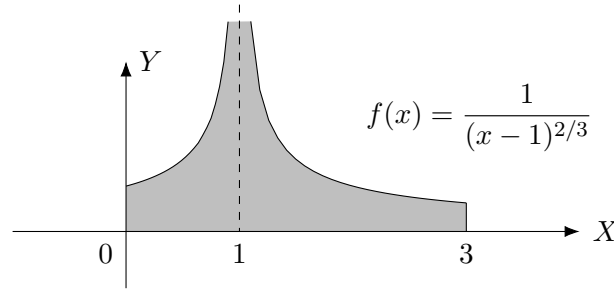
$$\begin{aligned}
 \int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx &= \lim_{b \rightarrow 4^-} \int_2^b \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow 4^-} \left[\arcsin \left(\frac{x-2}{2} \right) \right]_2^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow 4^-} \left(\arcsin \left(\frac{b-2}{2} \right) - \arcsin 0 \right) = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ นั่นคือ $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$ คอนเวอร์จ

□

ตัวอย่าง 3.12.6 จงหาค่าของ $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} = +\infty$ และฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, 1)$ และ $(1, 3]$ ดังนั้น $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง



ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \int_1^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx + \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx\end{aligned}$$

ต่อไปจะคำนวณค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบด้านขวามือของแต่ละเทอมจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[3(x-1)^{1/3} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \left(3(b-1)^{1/3} + 3 \right) = 3\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx &= \lim_{c \rightarrow 1^+} \left[3(x-1)^{1/3} \right]_c^3 \\ &= \lim_{c \rightarrow 1^+} \left(3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3} \right) = 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx = 3 + 3\sqrt[3]{2}$ นั่นคือ $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ คอนเวอร์จ □

ตัวอย่าง 3.12.7 จงหาค่าของ $\int_{-1}^4 \frac{1}{x(x-4)} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(x-4)}$ หาค่าไม่ได้ และ $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x(x-4)} = -\infty$ ดังนั้น $\int_{-1}^4 \frac{1}{x(x-4)} dx$ เป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สอง โดยสามารถจะแยกได้เป็น

$$\int_{-1}^4 \frac{1}{x(x-4)} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x(x-4)} dx + \int_0^2 \frac{1}{x(x-4)} dx + \int_2^4 \frac{1}{x(x-4)} dx$$

ต่อไปจะคำนวณค่าของแต่ละเทอมของปริพันธ์ไม่ตรงแบบทางขวามือของสมการจะได้

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{1}{x(x-4)} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \int_{-1}^a \frac{1}{x(x-4)} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{4} \ln |x-4| - \frac{1}{4} \ln |x| \right]_{-1}^a \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \left[\left(\frac{1}{4} \ln |a-4| - \frac{1}{4} \ln |a| \right) - \left(\frac{1}{4} \ln |-5| - \frac{1}{4} \ln |-1| \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \ln 4 - \frac{1}{4} \left(\lim_{a \rightarrow 0^-} \ln |a| \right) - \frac{1}{4} \ln 5\end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก $\lim_{a \rightarrow 0^-} \ln |a| = -\infty$ ดังนั้น $\int_{-1}^0 \frac{1}{x(x-4)} dx$ ไดเวอร์จ ทำให้ $\int_{-1}^4 \frac{1}{x(x-4)} dx$ ไดเวอร์จ □

3.12.3 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม

สำหรับปริพันธ์ $\int_a^b f(x) \, dx$ โดยที่ a เป็น $-\infty$ หรือ b เป็น $+\infty$ และลิมิตของ $f(x)$ เป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ หรือหา
ค่าไม่ได้ที่ x บางค่า ซึ่ง $a < x < b$ หรือที่ $x = a$ หรือ $x = b$ เรียกปริพันธ์นี้ว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม** เช่น
 $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2} \, dx, \quad \int_{-4}^{\infty} \frac{1}{x(x+4)} \, dx$

การหาค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม ทำได้โดยการแบ่งช่วงของการหาปริพันธ์ออกเป็นช่วงย่อย ซึ่งในแต่ละช่วงย่อย
จะได้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบเป็นชนิดที่หนึ่ง หรือชนิดที่สอง แล้วหาค่าของอินทิกรัลโดยใช้บทนิยาม ถ้ามีปริพันธ์ไม่ตรงแบบใน
ช่วงย่อยใดใดเวอร์จ แล้วเราจะกล่าวว่า ปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f ไตเวอร์จบนช่วง $[a, b]$ แต่ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบในทุกช่วง
ย่อยคอนเวอร์จ แล้วปริพันธ์ไม่ตรงแบบของ f บนช่วง $[a, b]$ จะเป็นผลบวกของปริพันธ์ไม่ตรงแบบบนช่วงย่อยเหล่านี้

ตัวอย่าง 3.12.8 จงหาค่าของ $\int_{-\infty}^3 \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{(x-3)(x-4)} = \infty$ และมีลิมิตล่างเป็น $-\infty$ ดังนั้น $\int_{-\infty}^3 \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx$ เป็นปริ
พันธ์ไม่ตรงแบบชนิดที่สาม ซึ่งสามารถแยกได้เป็น

$$\int_{-\infty}^3 \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx + \int_0^3 \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx$$

โดยที่แต่ละเทอมของปริพันธ์ไม่ตรงแบบทางขวามือของสมการจะได้เป็น

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\ln|x-3| + \ln|x-4| \right]_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left((-\ln 3 + \ln 4) - (-\ln|a-3| + \ln|a-4|) \right) \\ &= -\ln 3 + \ln 4 + \lim_{a \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{a-3}{a-4} \right| \\ &= -\ln 3 + \ln 4 \quad (\text{ใช้กฎของโลปีตาล และ } \ln 1 = 0) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx &= \lim_{b \rightarrow 3^-} \int_0^b \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} \left[-\ln|x-3| + \ln|x-4| \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} \left((-\ln|b-3| + \ln|b-4|) - (-\ln 3 + \ln 4) \right) \\ &= \left(-\lim_{b \rightarrow 3^-} \ln|b-3| \right) + 0 + \ln 3 - \ln 4 \end{aligned}$$

แต่ $\lim_{b \rightarrow 3^-} \ln|b-3| = -\infty$ ดังนั้น $\int_0^3 \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx$ ไตเวอร์จ

ทำให้ $\int_{-\infty}^3 \frac{1}{(x-3)(x-4)} \, dx$ ไตเวอร์จ

□

แบบฝึกหัด 3.12

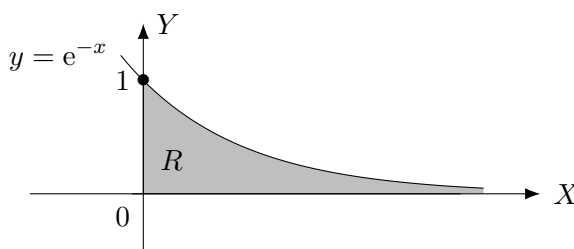
1. ในโจทย์ต่อไปนี้ จงตรวจสอบว่าข้อใดเป็นปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

$$\begin{array}{llll} 1.1) \int_0^{+\infty} x^2 dx & 1.2) \int_0^5 x^3 dx & 1.3) \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx & 1.4) \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx \\ 1.5) \int_0^1 \frac{1}{x} dx & 1.6) \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx & 1.7) \int_0^1 \frac{x}{x^2-1} dx & 1.8) \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \end{array}$$

2. จงตรวจสอบว่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบในข้อ ต่อไปนี้คอนเวอร์จหรือไดเวอร์จ ถ้าคอนเวอร์จ จงหาค่าของปริพันธ์นั้น

$$\begin{array}{lll} 2.1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1.001}} dx & 2.2) \int_0^{+\infty} \theta e^\theta d\theta & 2.3) \int_2^{+\infty} \frac{2}{v^2-v} dv \\ 2.4) \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx & 2.5) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4} dx & 2.6) \int_0^{+\infty} \sin(\pi x) dx \\ 2.7) \int_0^{+\infty} e^{2x} dx & 2.8) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^2} dx & 2.9) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2} dx \\ 2.10) \int_{-\infty}^{+\infty} 3^x dx & 2.11) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx & 2.12) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ 2.13) \int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{3/4}} dx & 2.14) \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx & 2.15) \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x^2} dx \\ 2.16) \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{1/3}} dx & 2.17) \int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx & 2.18) \int_0^1 \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}} d\theta \\ 2.19) \int_{-\infty}^{-2} \frac{2}{x^2-1} dx & 2.20) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx & \end{array}$$

3. กำหนดบริเวณในจุดภาคที่หนึ่ง ซึ่งปิดล้อมด้วยโค้ง $y = e^{-x}$ และแกน x ดังรูป



3.1) จงหาพื้นที่บริเวณแรเงา

3.2) จงหาปริมาตรของทรงตันที่เกิดจากการหมุนบริเวณ R รอบแกน X