Teaching Mathematics Independent Study (TMIS) Repository
Volume 20xx

https://math.science.cmu.ac.th/tmis.php

สมบัติบางประการของ (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

สรวิชญ์ มุสิการุณ[1,†] และ นราวดี ภูดลสิทธิพัฒน์[2,‡]

[1]ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 50200

บทคัดย่อ

ควอเทอร์เนียนเป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นส่วนขยายของระบบจำนวนเชิงซ้อน ที่ได้รับการนำมาประยุกต์ใช้อย่างแพร่หลายในหลากหลายสาขาวิชา โดยเฉพาะอย่างยิ่งในงานด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกและวิทยาการหุ่นยนต์ เนื่องจากเป็นเครื่องมือทางพีชคณิตที่มีประสิทธิภาพในการอธิบายการหมุนในปริภูมิสามมิติและสี่มิติ ในขณะเดียวกัน ลำดับไตรโบนัชชี ซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชีได้รับการนิยามโดยกำหนดค่าเริ่มต้นสามพจน์แรกเป็น $0, 0$ และ 1 โดยพจน์ถัดไปจะเกิดจากผลรวมของสามพจน์ก่อนหน้า

การค้นคว้าอิสระฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนิยาม (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป ตลอดจนศึกษาและพิสูจน์สมบัติทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญบางประการของควอเทอร์เนียนดังกล่าว สมบัติที่ศึกษาประกอบไปด้วย ความสัมพันธ์ระหว่างควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป และสังยุคของมัน สูตรบิเนต์ ผลรวมจำกัด และฟังก์ชันก่อกำเนิด

คำสำคัญ: ควอเทอร์เนียน, ลำดับไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป, (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป, สูตรบิเนต์, ผลรวมจำกัด, ฟังก์ชันก่อกำเนิด

2020 MSC: -

[†]ผู้นำเสนอ [‡]ผู้แต่งหลัก

อีเมล: soravit_musikarun@cmu.ac.th, narawadee.nanan@cmu.ac.th.

บทที่ 1
บทนำ

การค้นคว้าอิสระเรื่อง สมบัติบางประการของ (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป จะกล่าวถึงประเด็นสำคัญอันนำไปสู่การค้นคว้าอิสระ ซึ่งประกอบด้วย 2 ประเด็น ได้แก่ 1) ที่มาและความสำคัญของปัญหา 2) วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1 ที่มาและความสำคัญ

จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci number) เป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอโดยเลโอนาร์โด พิซาโน (Leonardo Pisano) โดยหมายถึงลำดับของจำนวนเต็มที่กำหนดดังนี้ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... ลำดับดังกล่าวนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดว่า จำนวนถัดไปมีค่าเท่ากับผลบวกของจำนวนสองจำนวนก่อนหน้า โดยกำหนดจำนวนสองพจน์แรกเป็น 0 และ 1 ตามลำดับ ลำดับของจำนวนที่ได้จากนิยามนี้เรียกว่าลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence)

บทนิยาม 1.1 [1] ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ $\{F_n\}$ และนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{สำหรับ} \quad n \geq 2 \tag{1.1}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $F_0 = 0, F_1 = 1$

จำนวนฟีโบนัชชีมีการประยุกต์ใช้ในหลายด้าน เช่น ด้านคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ ใช้ในการออกแบบขั้นตอนวิธีต่าง ๆ เช่น การค้นหาหมายเลขที่เฉพาะเจาะจงหรือการหาค่าในชุดข้อมูลต่างๆ ด้านการเงิน ใช้ในการวิเคราะห์ทางเทคนิคในตลาดหุ้น เช่น การใช้ Fibonacci retracement ในการวิเคราะห์การกลับตัวของราคาหุ้น

ปัญหาวัวของนารายาณา (Narayana cow problem) เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายการเพิ่มจำนวนของฝูงวัว โดยกำหนดให้วัวหนึ่งตัวสามารถให้กำเนิดลูกวัวได้ปีละหนึ่งตัว เมื่อมีอายุครบสามปีและลูกวัวที่เกิดขึ้นจะเริ่มให้กำเนิดลูกได้เมื่อมีอายุครบสามปี เงื่อนไขดังกล่าวนำไปสู่การเกิดความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนวัวในแต่ละปีซึ่งก่อให้เกิดลำดับจำนวนที่เรียกว่า ลำดับนารายาณา (Narayana sequence) ซึ่งนิยามดังนี้

บทนิยาม 1.2 [2] ลำดับนารายาณา (Narayana sequence) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสัญ-

ลักษณ์ $\{N_n\}$ และนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-3} \quad \text{สำหรับ} \quad n \geq 3 \tag{1.2}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $N_0 = 0, N_1 = 1$ และ $N_2 = 1$
พจน์เริ่มต้นของลำดับนารายาณา คือ $0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, \ldots$

ลำดับไตรโบนัชชี (tribonacci sequence) คือการขยายแนวคิดของลำดับฟีโบนัชชี แทนที่จะเริ่มต้นด้วยตัวเลขสองตัวที่กำหนดไว้ล่วงหน้า ลำดับนี้จะเริ่มต้นด้วยตัวเลขสามตัวที่กำหนดไว้ล่วงหน้าคือ 0, 0 และ 1 และทุกตัวเลขถัดไปจะเป็นผลรวมของตัวเลขสามตัวก่อนหน้า

บทนิยาม 1.3 [3] ลำดับไตรโบนัชชีสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ $\{T_n\}$ และนิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} \quad \text{สำหรับ} \quad n \geq 3 \tag{1.3}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $T_0 = 0, T_1 = 0$ และ $T_2 = 1$
พจน์เริ่มต้นของลำดับไตรโบนัชชี คือ $0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, \ldots$

ในปี ค.ศ. 2014 Kuhapatanakul [4] ได้นิยาม ลำดับไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป (generalized tribonacci sequences) ดังนี้

บทนิยาม 1.4 [4] ให้ r, s, t เป็นจำนวนจริงใด ๆ ลำดับไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป (generalized tribonacci sequences) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\{W_n(W_0, W_1W_2; r, s, t)\}$ หรือ $\{W_n\}$ นิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$W_n = rW_{n-1} + sW_{n-2} + tW_{n-3} \quad \text{สำหรับ} \quad n \geq 3 \tag{1.4}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $W_0 = a, W_1 = b, W_2 = c$ ซึ่ง W_0, W_1, W_2 คือจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ
พจน์เริ่มต้นของลำดับไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป คือ $a, b, c, rc + sb + ta, r(rc + sb + ta) + sc + tb, \ldots$

ตารางต่อไปนี้แสดงกรณีเฉพาะของลำดับไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

ลำดับ	$\{W_n(W_0, W_1, W_2; r, s, t)\}$
ฟีโบนัชชี	$\{F_n\} = \{W_n(0, 1, 1; 1, 1, 0)\}$
นารายาณา	$\{N_n\} = \{W_n(0, 1, 1; 1, 0, 1)\}$
ไตรโบนัชชี	$\{T_n\} = \{W_n(0, 0, 1; 1, 1, 1)\}$
ไตรโบนัชชี-ลูคัส [4]	$\{K_n\} = \{W_n(3, 1, 3; 1, 1, 1)\}$

ควอเทอร์เนียนเป็นโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นส่วนขยายของระบบจำนวนเชิงซ้อน ที่ได้รับการนำมาประยุกต์ใช้อย่างแพร่หลายในหลากหลายสาขาวิชา โดยเฉพาะอย่างยิ่งในงานด้านคอมพิวเตอร์กราฟิกและวิทยาการหุ่นยนต์ เนื่องจากเป็นเครื่องมือทางพีชคณิตที่มีประสิทธิภาพในการอธิบายการหมุนในปริภูมิสามมิติและสี่มิติ

บทนิยาม 1.5 [5] เซตของควอเทอร์เนียนนิยามดังนี้

$$H = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \tag{1.5}$$

โดย i, j, k เป็นหน่วยควอเทอร์เนียน (quaternion units) มีสมบัติดังนี้
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$
$ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$

ตัวอย่าง 1 $q = 1 + 2i + 3j + 4k$ คือ จำนวนควอเทอร์เนียน

ควอเทอร์เนียนแบบแยก (split quaternion) เป็นการต่อยอดแนวคิดของควอเทอร์เนียนซึ่งใช้ในคณิตศาสตร์และฟิสิกส์

บทนิยาม 1.6 [6] เซตของควอเทอร์เนียนแบบแยกนิยามดังนี้

$$H' = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \tag{1.6}$$

โดย i, j, k เป็นหน่วยควอเทอร์เนียนแบบแยก (split quaternion units) มีสมบัติดังนี้
$i^2 = -1, j^2 = 1, k^2 = 1$
$ij = k = -ji, jk = -i = -kj, ki = j = -ik$

ในปีค.ศ. 2015 Jafari และ Yayli ได้นิยาม (α, β) ควอเทอร์เนียน ((α, β)-quaternion)

บทนิยาม 1.7 [7] ให้ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ แล้ว เซตของ (α, β) ควอเทอร์เนียนนิยามดังนี้

$$H_{\alpha\beta} = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\} \tag{1.7}$$

โดย i, j, k เป็นหน่วย (α, β) ควอเทอร์เนียน ((α, β)-quaternion units) มีสมบัติดังนี้
$i^2 = -\alpha, j^2 = -\beta, k^2 = -\alpha\beta$
$ij = k = -ji, jk = \beta i = -kj, ki = \alpha j = -ik$
ต่อไปจะกล่าวถึงกรณีเฉพาะของ (α, β) ควอเทอร์เนียน

1. ถ้า $\alpha = \beta = 1$ แล้ว $H_{\alpha\beta}$ คือเซตของควอเทอร์เนียน H
2. ถ้า $\alpha = 1, \beta = -1$ แล้ว $H_{\alpha\beta}$ คือเซตของควอเทอร์เนียนแบบแยก H'
3. ถ้า $\alpha = 1, \beta = 0$ แล้ว $H_{\alpha\beta}$ คือเซตของกึ่งควอเทอร์เนียน H^o [8]
4. ถ้า $\alpha = -1, \beta = 0$ แล้ว $H_{\alpha\beta}$ คือเซตของกึ่งควอเทอร์เนียนแบบแยก H'^o [9]
5. ถ้า $\alpha = 0, \beta = 0$ แล้ว $H_{\alpha\beta}$ คือเซตของ $\frac{1}{4}$ ควอเทอร์เนียน H^{oo} [10]

มีการศึกษามากมายเกี่ยวกับควอเทอร์เนียนที่มีส่วนประกอบเป็นจำนวนพิเศษ เช่น ในปี ค.ศ. 1963 Horadam นิยามลำดับควอเทอร์เนียนฟีโบนัชชี (Quaternion Fibonacci sequence)

บทนิยาม 1.8 [11] ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม แล้วควอเทอร์เนียนฟีโบนัชชีนิยามดังนี้

$$QF_n = F_n + F_{n+1} i + F_{n+2} j + F_{n+3} k \tag{1.8}$$

โดยที่ F_n เป็นจำนวนฟีโบนัชชีพจน์ที่ n และ i, j, k เป็นหน่วยควอเทอร์เนียน

ตัวอย่าง 2 $QF_0 = 0 + 1i + 1j + 2k, QF_1 = 1 + 1i + 2j + 3k, QF_2 = 1 + 2i + 3j + 5k$

ในปี ค.ศ. 2017 Morales นิยามลำดับควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป (generalized quaternion tribonacci sequence)

บทนิยาม 1.9 [12] ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม แล้วลำดับควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป นิยามดังนี้

$$QW_n = W_n + W_{n+1} i + W_{n+2} j + W_{n+3} k \tag{1.9}$$

โดยที่ W_n เป็นจำนวนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไปพจน์ที่ n และ i, j, k เป็นหน่วยควอเทอร์เนียน

ตัวอย่าง 3 ให้ $W_0 = 0, W_1 = 1, W_2 = 1$ และ $r = 1, s = 1, t = 0$ จะได้ว่า
$QW_0 = 0 + 1i + 1j + 2k \quad QW_1 = 1 + 1i + 2j + 3k \quad QW_2 = 1 + 2i + 3j + 5k$

ใน ค.ศ. 2014 Akyiğit และคณะ ได้นิยามลำดับ (α, β) ควอเทอร์เนียนฟีโบนัชชี ((α, β)-Quaternion Fibonacci sequence)

บทนิยาม 1.10 [13] ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว (α, β) ควอเทอร์เนียนฟีโบนัชชี นิยามดังนี้

$$GF_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}j + F_{n+3}k \tag{1.10}$$

โดยที่ F_n เป็นจำนวนฟีโบนัชชีพจน์ที่ n และ i, j, k เป็นหน่วย (α, β) ควอเทอร์เนียน

ตัวอย่าง 4 $GF_0 = 0+1i+1j+2k, GF_1 = 1+1i+2j+3k, GF_2 = 1+2i+3j+5k$

2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อนิยาม (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

2. เพื่อศึกษาและพิสูจน์สมบัติบางประการของ (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป ได้แก่ ความสัมพันธ์ระหว่าง (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไปและสังยุคของมัน สูตรบิเนต์ ผลรวมจำกัดและฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในบทที่ 2 นี้ประกอบไปด้วย บทนิยาม ทฤษฎีบท สมการ และผลลัพธ์ต่าง ๆ ที่จะนำไปใช้ในบทถัดไป

1 ฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function)

ฟังก์ชันก่อกำเนิด คือการแปลงลำดับของตัวเลข $a_0, a_1, a_2, ...$ ให้กลายเป็นฟังก์ชันในรูปของอนุกรมกำลัง ทำให้เราสามารถใช้เครื่องมือทางพีชคณิตและแคลคูลัสในการจัดการกับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับลำดับได้ง่ายขึ้น

บทนิยาม 2.1 [14] สำหรับลำดับอนันต์ $\{a_n\}$ เราจะเรียกอนุกรมกำลัง $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 5 1.ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{1\}_{n=0}^{\infty}$ คือ $\dfrac{1}{1-x}$
2. ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ คือ $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

2 ลำดับไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป (generalized tribonacci sequence)

ใน คศ. 2017 Morales [12] ได้กล่าวถึงสมการลักษณะเฉพาะของลำดับไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไปคือ $x^3 - rx^2 - sx - t = 0$ ที่มีรากคือ $\varphi = \varphi(r,s,t) = \frac{r}{3} + A + B$, $\psi = \psi(r,s,t) = \frac{r}{3} + \eta A + \eta^2 B$ และ $\rho = \rho(r,s,t) = \frac{r}{3} + \eta^2 A + \eta B$ เมื่อ $A = \left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}$ $B = \left(\frac{r^3}{27} + \frac{rs}{6} + \frac{t}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}$ โดย $\Delta = \Delta(r,s,t) = \frac{r^3 t}{27} - \frac{r^2 s^2}{108} + \frac{rst}{6} - \frac{s^3}{27} + \frac{t^2}{4}$ และ $\eta = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

ทฤษฎีบท 2.2 [12] สูตรบิเนต์ของจำนวนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป ถูกกำหนดโดย

$$W_n = \frac{d_1 \varphi^n}{(\varphi - \psi)(\varphi - \rho)} - \frac{d_2 \psi^n}{(\psi - \varphi)(\psi - \rho)} + \frac{d_3 \rho^n}{(\rho - \varphi)(\rho - \psi)} \quad ; n \geq 0 \tag{2.1}$$

เมื่อ $d_1 = W_2 - (\psi + \rho)W_1 + (\psi\rho)W_0$, $d_2 = W_2 - (\varphi + \rho)W_1 + (\varphi\rho)W_0$
และ $d_3 = W_2 - (\varphi + \psi)W_1 + (\varphi\psi)W_0$
และ φ, ψ, ρ เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะ $x^3 - rx^2 - sx - t = 0$

ตัวอย่าง 6

$$
\begin{aligned}
W_0 &= \frac{d_1\varphi^0}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} - \frac{d_2\psi^0}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_3\rho^0}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)} = a,\\
W_1 &= \frac{d_1\varphi^1}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} - \frac{d_2\psi^1}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_3\rho^1}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)} = b,\\
W_2 &= \frac{d_1\varphi^2}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} - \frac{d_2\psi^2}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_3\rho^2}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)} = c
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 2.3 [4] ผลรวม $n+1$ พจน์แรกของจำนวนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไปคือ

$$\sum_{i=0}^{n} W_i = \frac{1}{\delta}(W_{n+2} + (1-r)W_{n+1} + tW_n + \lambda) \tag{2.2}$$

เมื่อ $\delta = \delta(r,s,t) = r+s+t-1$ และ $\lambda = (r+s+t)a + (r-1)b - c$

ตัวอย่าง 7

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0} W_i =& \frac{1}{\delta}(W_2 + (1-r)W_1 + tW_0 + \lambda)\\
=& \frac{1}{r+s+t-1}(c + (1-r)b + ta + (r+s-1)a + (r-1)b - c)\\
=& a\left(\frac{r+s+t-1}{r+s+t-1}\right)\\
=& a = W_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{1} W_i =& \frac{1}{\delta}(W_3 + (1-r)W_2 + tW_1 + \lambda)\\
=& (\frac{1}{r+s+t-1})(rc + sb + ta + (1-r)c + tb + (r+s-1)a + (r-1)b - c)\\
=& \frac{1}{r+s+t-1}(a+b)(r+s+t-1)\\
=& a + b = W_0 + W_1
\end{aligned}
$$

3 (α,β) ควอเทอร์เนียน ((α,β) - quaternion)

ให้ $p, q \in H_{\alpha\beta}$ โดย $p = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ และ $q = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ กฎการบวกของ (α,β) ควอเทอร์เนียน ถูกกำหนดดังนี้

$$p + q = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)i + (a_2+b_2)j + (a_3+b_3)k \tag{2.3}$$

[7] ผลคูณของสเกลาร์และ (α, β) ควอเทอร์เนียนถูกกำหนดดังนี้ ถ้า c คือ จำนวนจริง และ $q \in H_{\alpha\beta}$

$$cq = (ca_0) + (ca_1)i + (ca_2)j + (ca_3)k \tag{2.4}$$

กฎการคูณของ (α, β) ควอเทอร์เนียนถูกกำหนดดังนี้

$$\begin{aligned} pq &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)i + (a_0b_2 + a_2b_0)j + (a_0b_3 + a_3b_0)k + a_1b_2ij + a_1b_3ik \\ &+ a_2b_1ji + a_2b_3jk + a_3b_1ki + a_3b_2kj + a_1b_1i^2 + a_2b_2j^2 + a_3b_3k^2 \\ &= a_0b_0 - a_1b_1\alpha - a_2b_2\beta - a_3b_3\alpha\beta + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3\beta - a_3b_2\beta)i \\ &+ (a_0b_2 + a_2b_0 - a_1b_3\alpha + a_3b_1\alpha)j + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1)k \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.4 $H_{\alpha\beta}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

บทพิสูจน์ ให้ $u, v, w \in H_{\alpha\beta}$ โดย $u = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k, v = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$, $w = c_0 + c_1i + c_2j + c_3k$ และ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1. พิจารณา

$$\begin{aligned} u + v &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) + (b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k \in H \end{aligned}$$

ดังนั้น $u + v \in H_{\alpha\beta}$

2. พิจารณา

$$\begin{aligned} u + v &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) + (b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)i + (b_2 + a_2)j + (b_3 + a_3)k \\ &= (b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) + (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) \\ &= v + u \end{aligned}$$

ดังนั้น $u + v = v + u$

3. พิจารณา

$$\begin{aligned}(u+v)+w =&[(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)+(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)]\\&+c_0+c_1i+c_2j+c_3k\\=&a_0+a_1i+a_2j+a_3k+b_0+b_1i+b_2j+b_3k+c_0\\&+c_1i+c_2j+c_3k\\=&a_0+a_1i+a_2j+a_3k+b_0+[(b_1i+b_2j+b_3k)\\&+(c_0+c_1i+c_2j+c_3k)]\\=&u+(v+w)\end{aligned}$$

ดังนั้น $(u+v)+w = u+(v+w)$

4. พิจารณา

$$\begin{aligned}u+0 &= (a_0+0)+(a_1+0)i+(a_2+0)j+(a_3+0)k\\&= a_0+a_1i+a_2j+a_3k\\&= u\end{aligned}$$

ดังนั้น $u+0=u$

5. พิจารณา

$$\begin{aligned}u+(-u) &= a_0+a_1i+a_2j+a_3k+(-a_0-a_1i-a_2j-a_3k)\\&= (a_0-a_0)+(a_1-a_1)i+(a_2-a_2)j+(a_3-a_3)k\\&= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $u+(-u)=0$

6. พิจารณา

$$\lambda u = (\lambda a_0)+(\lambda a_1)i+(\lambda a_2)j+(\lambda a_3)k \in H$$

ดังนั้น $\lambda u \in H_{\alpha\beta}$

7. พิจารณา

$$\begin{aligned}\lambda(u+v) &= \lambda[(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)+(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)]\\&= \lambda(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)+\lambda(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)\\&= \lambda u+\lambda v\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$

8. พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)u &= (\lambda+\mu)(a_0+a_1i+a_2j+a_3k) \\
&= (\lambda(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)+\mu(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)) \\
&= \lambda u+\mu u
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(\lambda+\mu)u = \lambda u+\mu u$

9. พิจารณา

$$
\begin{aligned}
(\lambda\mu)u &= (\lambda\mu)(a_0+a_1i+a_2j+a_3k) \\
&= \lambda[(a_0\mu)+(a_1\mu)i+(a_2\mu)j+(a_3\mu)k] \\
&= \lambda[\mu(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)] \\
&= \lambda(\mu u)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$

10. พิจารณา

$$
\begin{aligned}
1u &= 1(a_0+a_1i+a_2j+a_3k) \\
&= (a_0+a_1i+a_2j+a_3k) = u
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $1u = u$
จากข้อ $1-10$ จะได้ว่า $H_{\alpha\beta}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

$\square$

สังยุคของ $q = a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ กำหนดโดย $\overline{q} = a_0-(a_1i+a_2j+a_3k)$ นอร์มของ q นิยามดังนี้

$$
N_q = |q\overline{q}| = |\overline{q}q| = |a_0^2+\alpha a_1^2+\beta a_2^2+\alpha\beta a_3^2| \tag{2.5}
$$

ตัวอย่าง 8 ให้ $p = 1 + 2i + 3j + 4k, q = -5 + 6i - j + k$ และ $c = 3$ จะได้ว่า
$p + q = -4 + 8i + 2j + 5k$
$p - q = 6 - 4i + 4j + 3k$
$cq = -15 + 18i - 3j + 3k$
$pq = -5 - 12\alpha + 3\beta + 4\alpha\beta + (-4 + 7\beta)i + (-16 + 22\alpha)j - 39k$
$qp = -5 - 12\alpha + (3 - \alpha)\beta - 4i + (-16 - \alpha - \beta)j - 3k$
$\overline{q} = -5 - 6i + j - k$
$N_q = |25 + 36\alpha + \beta + \alpha\beta|$

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า $pq \neq qp$ ดังนั้น (α, β) ควอเทอร์เนียน ไม่มีสมบัติสลับที่ภายใต้การคูณ

บทที่ 3
ผลการศึกษา

บทนิยาม 3.1 ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่ $n \geq 0$ และ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ แล้ว (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป (generalized tribonacci (α, β)-quaternion) ถูกนิยามดังนี้

$$GW_n = W_n + W_{n+1}i + W_{n+2}j + W_{n+3}k \tag{3.1}$$

เมื่อ W_n เป็นจำนวนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไปพจน์ที่ n และ i, j, k เป็นหน่วย (α, β) ควอเทอร์เนียน ซึ่ง i, j, k มีสมบัติดังนี้
$i^2 = -\alpha, j^2 = -\beta, k^2 = -\alpha\beta$
$ij = k = -ji, jk = -\beta i = -kj, ki = \alpha j = -ik$

(α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป 6 เทอมแรกคือ

$$\begin{aligned}
GW_n =& W_n + W_{n+1}i + W_{n+2}j + W_{n+3}k \\
GW_0 =& W_0 + W_1 i + W_2 j + W_3 k \\
=& a + bi + cj + (rc + sb + ta)k \\
GW_1 =& W_1 + W_2 i + W_3 j + W_4 k \\
=& b + ci + (rc + sb + ta)j + [r(rc + sb + ta) + sc + tb]k \\
GW_2 =& W_2 + W_3 i + W_4 j + W_5 k \\
=& c + (rc + sb + ta)i + [r(rc + sb + ta) + sc + tb]j \\
&+ [r^2(rc + sb + ta) + r(sc + tb) + s(rc + sb + ta) + tc]k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
GW_3 =& W_3 + W_4 i + W_5 j + W_6 k \\
=& (rc + sb + ta) + [r(rc + sb + ta) + sc + tb]i \\
&+ [r^2(rc + sb + ta) + r(sc + tb) + s(rc + sb + ta) + tc]j \\
&+ [r^3(rc + sb + ta) + r^2(sc + tb) + rs(rc + sb + ta) + rtc \\
&+ sr(rc + sb + ta) + s^2c + stb + t(rc + sb + ta)]k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
GW_4 =& W_4 + W_5 i + W_6 j + W_7 k \\
=& [r(rc+sb+ta)+sc+tb] + [r^2(rc+sb+ta)+r(sc+tb) \\
&+ s(rc+sb+ta)+tc]i + [r^3(rc+sb+ta)+r^2(sc+tb) \\
&+ rs(rc+sb+ta)+rtc+sr(rc+sb+ta)+s^2c+stb+t(rc+sb+ta)]j \\
&+ [r^4(rc+sb+ta)+r^3(sc+tb)+r^2s(rc+sb+ta)+r^2tc \\
&+ r^2s(rc+sb+ta)+rs^2c+rstb+rt(rc+sb+ta)+sr^2(rc+sb+ta) \\
&+ sr(sc+tb)+s^2(rc+sb+ta)+stc+tr(rc+sb+ta)+tsc+t^2b]k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
GW_5 =& W_5 + W_6 i + W_7 j + W_8 k \\
& [r^2(rc+sb+ta)+r(sc+tb)+s(rc+sb+ta)+tc] + [r^3(rc+sb+ta) \\
&+ r^2(sc+tb)+rs(rc+sb+ta)+rtc+sr(rc+sb+ta)+s^2c \\
&+ stb+t(rc+sb+ta)]i + [r^4(rc+sb+ta)+r^3(sc+tb) \\
&+ r^2s(rc+sb+ta)+r^2tc+r^2s(rc+sb+ta)+rs^2c+rstb \\
&+ rt(rc+sb+ta)+sr^2(rc+sb+ta)+sr(sc+tb)+s^2(rc+sb+ta) \\
&+ stc+tr(rc+sb+ta)+tsc+t^2b]j + [r^5(rc+sb+ta) \\
&+ r^4(sc+tb)+r^3s(rc+sb+ta)+r^3tc+r^3s(rc+sb+ta) \\
&+ r^2s^2c+r^2stb+r^2t(rc+sb+ta)+r^2sr^2(rc+sb+ta) \\
&+ r^2sr(sc+tb)+r^2s^2(rc+sb+ta)+r^2stc+r^2tr(rc+sb+ta) \\
&+ r^2tsc+r^2t^2b+sr^3(rc+sb+ta)+sr^2(sc+tb)+srs^2c \\
&+ srstb+srt(rc+sb+ta)+s^2r(rc+sb+ta)+s^3c+s^2tb+stc \\
&+ tr^2(rc+sb+ta)+tr(sc+tb)+ts(rc+sb+ta)+t^2c]k
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 3.2 $GW_n = r(GW_{n-1}) + s(GW_{n-2}) + t(GW_{n-3})$ สำหรับ $n \geq 0$
บทพิสูจน์ โดยบทนิยาม 3.1 และ บทนิยาม 1.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
GW_n =& W_n + W_{n+1}i + W_{n+2}j + W_{n+3}k \\
=& (rW_{n-1} + sW_{n-2} + tW_{n-3}) + (rW_n + sW_{n-1} + tW_{n-2})i \\
&+ (rW_{n+1} + sW_n + tW_{n-1})j + (rW_{n+2} + sW_{n+1} + tW_n)k \\
=& r(W_{n-1} + W_ni + W_{n+1}j + W_{n+2}k) + s(W_{n-2} + W_{n-1}i + W_nj + W_{n+1}k) \\
&+ t(W_{n-3} + W_{n-2}i + W_{n-1}j + W_nk) \\
=& r(GW_{n-1}) + s(GW_{n-2}) + t(GW_{n-3})
\end{aligned}$$

□

บทนิยาม 3.3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่ $n \geq 0$ สังยุคของ (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป นิยามดังนี้

$$\overline{GW_n} = W_n - W_{n+1}i - W_{n+2}j - W_{n+3}k \tag{3.2}$$

ทฤษฎีบท 3.4 $GW_n + \overline{GW_n} = 2W_n$ สำหรับ $n \geq 0$
บทพิสูจน์ โดยบทนิยาม 3.1 และ บทนิยาม 3.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
GW_n + \overline{GW_n} =& (W_n + W_{n+1}i + W_{n+2}j + W_{n+3}k) + (W_n - W_{n+1}i - W_{n+2}j - W_{n+3}k) \\
=& 2W_n
\end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.5 $GW_n - \overline{GW_n} = 2(W_ni + W_{n+1}j + W_{n+3}k)$ สำหรับ $n \geq 0$
บทพิสูจน์ โดยบทนิยาม 3.1 และ บทนิยาม 3.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
GW_n - \overline{GW_n} =& (W_n + W_{n+1}i + W_{n+2}j + W_{n+3}k) - (W_n - W_{n+1}i - W_{n+2}j - W_{n+3}k) \\
=& 2(W_ni + W_{n+1}j + W_{n+3}k)
\end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ แล้ว $(GW_n)(\overline{GW_n}) = W_n^2 + W_{n+1}^2\alpha + W_{n+2}^2\beta + W_{n+3}^2\alpha\beta$ สำหรับ $n \geq 0$

บทพิสูจน์ โดยบทนิยาม 3.1 และ บทนิยาม 3.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
(GW_n)(\overline{GW_n}) =& (W_n + W_{n+1}i + W_{n+2}j + W_{n+3}k)(W_n - W_{n+1}i - W_{n+2}j - W_{n+3}k) \\
=& W_n^2 - W_{n+1}W_n i - W_{n+2}W_n j - W_{n+3}W_n k \\
&+ W_{n+1}W_n i - W_{n+1}^2 i^2 - W_{n+2}W_{n+1}ij - W_{n+3}W_{n+1}ik \\
&+ W_{n+2}W_n j - W_{n+2}W_{n+1}ji - W_{n+2}^2 j^2 - W_{n+3}W_{n+2}jk \\
&+ W_{n+3}W_n k - W_{n+3}W_{n+1}ki - W_{n+3}W_{n+2}kj - W_{n+3}^2 k^2 \\
=& W_n^2 - W_{n+1}W_n i - W_{n+2}W_n j - W_{n+3}W_n k \\
&+ W_{n+1}W_n i + W_{n+1}^2\alpha - W_{n+2}W_{n+1}k + W_{n+3}W_{n+1}\alpha j \\
&+ W_{n+2}W_n j + W_{n+2}W_{n+1}k + W_{n+2}^2\beta - W_{n+3}W_{n+2}\beta i \\
&+ W_{n+3}W_n k - W_{n+3}W_{n+1}\alpha j + W_{n+3}W_{n+2}\beta i + W_{n+3}^2\alpha\beta \\
=& W_n^2 + W_{n+1}^2\alpha + W_{n+2}^2\beta + W_{n+3}^2\alpha\beta
\end{aligned}
$$

□

ทฤษฎีบท 3.7 $N_{GW_n} = |W_n^2 + W_{n+1}^2\alpha + W_{n+2}^2\beta + W_{n+3}^2\alpha\beta|$
บทพิสูจน์ โดยบทนิยาม 3.1 และ บทนิยาม 3.3 และสมการ 2.5 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
N_{GW_n} &= |GW_n\overline{GW_n}| \\
&= |W_n^2 + W_{n+1}^2\alpha + W_{n+2}^2\beta + W_{n+3}^2\alpha\beta|
\end{aligned}
$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงสูตรบิเนต์ของจำนวน (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

ทฤษฎีบท 3.8 ให้ $n \geq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$
GW_n = \frac{d_1\varphi^n\hat{\varphi}}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} + \frac{d_2\psi^n\hat{\psi}}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_3\rho^n\hat{\rho}}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)}
$$

เมื่อ $d_1 = W_2 - (\psi+\rho)W_1 + (\psi\rho)W_0$, $d_2 = W_2 - (\varphi+\rho)W_1 + (\varphi\rho)W_0$, $d_3 = W_2 - (\varphi+\psi)W_1 + (\varphi\psi)W_0$ และ $\hat{\varphi} = 1 + \varphi i + \varphi^2 j + \varphi^3 k, \hat{\psi} = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$, $\hat{\rho} = 1 + \rho i + \rho^2 j + \rho^3 k$ และ i, j, k เป็นหน่วย (α, β) ควอเทอร์เนียน

บทพิสูจน์ โดยบทนิยาม 3.1 และ ทฤษฎีบท 2.2

$$
\begin{aligned}
GW_n =& W_n + W_{n+1}i + W_{n+2}j + W_{n+3}k \\
=& \frac{d_1\varphi^n}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} + \frac{d_2\psi^n}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_3\rho^n}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)} \\
&+ \left(\frac{d_1\varphi^{n+1}}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} + \frac{d_2\psi^{n+1}}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_3\rho^{n+1}}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)}\right) i \\
&+ \left(\frac{d_1\varphi^{n+2}}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} + \frac{d_2\psi^{n+2}}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_3\rho^{n+2}}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)}\right) j \\
&+ \left(\frac{d_1\varphi^{n+3}}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} + \frac{d_2\psi^{n+3}}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_3\rho^{n+3}}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)}\right) k \\
=& \left(\frac{d_1\varphi^n}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} + \frac{d_1\varphi^{n+1}i}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} + \frac{d_1\varphi^{n+2}j}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} + \frac{d_1\varphi^{n+3}k}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)}\right) \\
&+ \left(\frac{d_2\psi^n}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_2\psi^{n+1}i}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_2\psi^{n+2}j}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} \frac{d_2\psi^{n+3}k}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)}\right) \\
&+ \left(\frac{d_3\rho^n}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)} + \frac{d_3\rho^{n+1}i}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)} + \frac{d_3\rho^{n+2}j}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)} + \frac{d_3\rho^{n+3}k}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)}\right) \\
=& \frac{d_1\varphi^n}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)}(1+\varphi i+\varphi^2 j+\varphi^3 k) + \frac{d_2\psi^n}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)}(1+\psi i+\psi^2 j+\psi^3 k) \\
&+ \frac{d_3\rho^n}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)}(1+\rho i+\rho^2 j+\rho^3 k) \\
=& \frac{d_1\varphi^n\hat{\varphi}}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} + \frac{d_2\psi^n\hat{\psi}}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_3\rho^n\hat{\rho}}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)}
\end{aligned}
$$

□

เมื่อแทน $\alpha = \beta = 1$ จะได้บทแทรกต่อไปนี้เป็นจริง

บทแทรก 3.9 ให้ $n \geq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$QW_n = \frac{d_1\varphi^n\hat{\varphi}}{(\varphi-\psi)(\varphi-\rho)} + \frac{d_2\psi^n\hat{\psi}}{(\psi-\varphi)(\psi-\rho)} + \frac{d_3\rho^n\hat{\rho}}{(\rho-\varphi)(\rho-\psi)} \tag{3.3}$$

เมื่อ $d_1 = W_2 - (\psi+\rho)W_1 + (\psi\rho)W_0$, $d_2 = W_2 - (\varphi+\rho)W_1 + (\varphi\rho)W_0$, $d_3 = W_2 - (\varphi+\psi)W_1 + (\varphi\psi)W_0$ และ $\hat{\varphi} = 1+\varphi i+\varphi^2 j+\varphi^3 k$, $\hat{\psi} = 1+\psi i+\psi^2 j+\psi^3 k$, $\hat{\rho} = 1+\rho i+\rho^2 j+\rho^3 k$ และ i, j, k เป็นหน่วย (α, β) ควอเทอร์เนียน

ผลรวม $n+1$ พจน์แรก ของจำนวน (α,β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ $n \geq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{n} GW_i = \frac{1}{\delta}(GW_{n+2} + (1-r)GW_{n+1} + tGW_n + \omega)$$

เมื่อ $\delta = r+s+t-1, \lambda = (r+s+t)a + (r-1)b - c,$
$\omega = \lambda + (\lambda - \delta a)i + (\lambda - \delta(a+b))j + (\lambda - \delta(a+b+c))k$ และ i, j, k เป็นหน่วย (α,β) ควอเทอร์เนียน

บทพิสูจน์ โดยนิยาม 3.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} GW_i =& GW_0 + GW_1 + GW_2 + ... + GW_n \\
=& (W_0 + W_1 i + W_2 j + W_3 k) + (W_1 + W_2 i + W_3 j + W_4 k) \\
& + ... + (W_n + W_{n+1} i + W_{n+2} j + W_{n+3} k) \\
=& (W_0 + W_1 + W_2 + ... + W_n) + (W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_{n+1})i \\
& + (W_2 + W_3 + W_4 + ... W_{n+2})j + (W_3 + W_4 + W_5 + ... W_{n+3})k \\
=& \sum_{i=0}^{n} W_n + (\sum_{i=0}^{n+1} W_n - W_0)i + (\sum_{i=0}^{n+2} W_n - \sum_{i=0}^{1} W_n)j \\
& + (\sum_{i=0}^{n+3} W_n - \sum_{i=0}^{2} W_n)k
\end{aligned}$$

จัดรูปโดย ทฤษฎีบท 2.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\delta\sum_{i=0}^{n} GW_i =& W_{n+2} + (1-r)W_{n+1} + tW_n + \lambda \\
& + (W_{n+3} + (1-r)W_{n+2} + tW_{n+1} + \lambda - \delta a)i \\
& + (W_{n+4} + (1-r)W_{n+3} + tW_{n+2} + \lambda - \delta(a+b))j \\
& + (W_{n+4} + (1-r)W_{n+3} + tW_{n+2} + \lambda - \delta(a+b+c))k \\
=& (W_{n+2} + W_{n+3} i + W_{n+4} j + W_{n+5} k) \\
& + ((1-r)W_{n+1} + (1-r)W_{n+2} i + (1-r)W_{n+3} j \\
& + (1-r)W_{n+4} k) + (tW_n + tW_{n+1} i + tW_{n+2} j + tW_{n+3} k) \\
& + \lambda + (\lambda - \delta a)i + (\lambda - \delta(a+b))j + (\lambda - \delta(a+b+c))k \\
=& GW_{n+2} + (1-r)GW_{n+1} + tGW_n + \omega
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=0}^{n} GW_i = \frac{1}{\delta}(GW_{n+2}(1-r)GW_{n+1} + tGW_n + \omega)$$

$\square$

เมื่อกำหนดให้ $\alpha = \beta = 1$ แล้วบทแทรกต่อไปนี้เป็นจริง

บทแทรก 3.11 ให้ $n \geq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\sum_{i=0}^{n} QW_i = \frac{1}{\delta}(QW_{n+2} + (1-r)QW_{n+1} + tQW_n + \omega)$$

เมื่อ $\omega = \lambda + (\lambda - \delta a)i + (\lambda - \delta(a+b))j + (\lambda - \delta(a+b+c))k$ และ i, j, k เป็นหน่วยควอเทอร์เนียน

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับ (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

ทฤษฎีบท 3.12 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$\sum_{n=0}^{\infty} GW_i x^i = \frac{GW_0 + x(GW_1 - rGW_0) + x^2(GW_2 - rGW_1 - sGW_0)}{1 - rx - sx^2 - tx^3}$$

บทพิสูจน์ ให้ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับ (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไปอยู่ในรูปของ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} GW_i x^i$ จะได้ว่า

$$f(x) = GW_0 + GW_1 x + GW_2 x^2 + GW_3 x^3 + ... + GW_n x^n + ...$$

นำ $f(x)$ คูณตลอดด้วย rx, sx^2, tx^3 จะได้ดังนี้

$$rxf(x) = rGW_0 x + rGW_1 x^2 + rGW_2 x^3 + ... + rGW_{n-1} x^n + ... + rGW_n x^{n+1} + ...$$
$$sx^2 f(x) = sGW_0 x^2 + sGW_1 x^3 + sGW_2 x^4 + ... + sGW_{n-1} x^{n+1} + ... + sGW_n x^{n+1} + ...$$
$$tx^3 f(x) = tGW_0 x^3 + tGW_1 x^4 + tGW_2 x^5 + ... + tGW_{n-1} x^{n+2} + ... + tGW_n x^{n+3} + ...$$

โดยทฤษฎีบท 3.2 จะได้ว่า

$$(1-rx+sx^2+tx^3)f(x) = (GW_0+GW_1x+GW_2x^2+GW_3x^3+...+GW_nx^n)$$
$$-(rGW_0x+rGW_1x^2+rGW_2x^3+...+rGW_{n-1}x^n+rGW_nx^{n+1}+...)$$
$$-(sGW_0x^2+sGW_1x^3+sGW_2x^4+...+sGW_{n-1}x^{n+1}+sGW_nx^{n+2}+...)$$
$$-(tGW_0x^3+tGW_1x^4+tGW_2x^5+...+tGW_{n-1}x^{n+2}+tGW_nx^{n+3}+...)$$
$$=GW_0-x(-GW_1-rGW_0)-x^2(-GW_2+rGW_1+sGW_0)$$
$$-\sum_{i=3}^{\infty}(-GW_i+(rGW_{i-1}+sGW_{i-2}+tGW_{i-3}))x^i$$
$$=GW_0-x(-GW_1+rGW_0)-x^2(-GW_2+rGW_1+sGW_0)-\sum_{i=3}^{\infty}(-GW_i+GW_i)x^i$$
$$=GW_0+x(GW_1-rGW_0)+x^2(GW_2-rGW_1-sGW_0)$$

ดังนั้น

$$f(x)=\frac{GW_0+x(GW_1-rGW_0)+x^2(GW_2-rGW_1-sGW_0)}{1-rx-sx^2-tx^3}$$

□

กำหนดให้ $\alpha=\beta=1$ แล้วบทแทรกต่อไปนี้เป็นจริง

บทแทรก 3.13 ให้ $n\geq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty}QW_ix^i=\frac{QW_0+x(QW_1-rQW_0)+x^2(QW_2-rQW_1-sQW_0)}{1-rx-sx^2-tx^3}$$

บทที่ 4
สรุปผลการศึกษา

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นการศึกษาเรื่องสมบัติบางประการของ (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป มีผลสรุปดังนี้ สำหรับ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป นิยามดังนี้

$$GW_n = W_n + W_{n+1}i + W_{n+2}j + W_{n+3}k \text{ สำหรับ } n \geq 0$$

   เมื่อ W_n เป็นจำนวนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไปพจน์ที่ n และ i, j, k เป็นหน่วย (α, β) ควอเทอร์เนียน ซึ่งมีสมบัติดังนี้

   $i^2 = -\alpha, j^2 = -\beta, k^2 = -\alpha\beta$

   $ij = k = -ji, jk = -\beta i = -kj, ki = \alpha j = -ik$

2. $GW_n = r(GW_{n-1}) + s(GW_{n-2}) + t(GW_{n-3})$ สำหรับ $n \geq 0$

3. สมบัติของสังยุคของ (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

$$\overline{GW_n} = W_n - W_{n+1}i - W_{n+2}j - W_{n+3}k \text{ สำหรับ } n \geq 0,$$

$$GW_n + \overline{GW_n} = 2W_n \text{ สำหรับ } n \geq 0,$$

$$GW_n - \overline{GW_n} = 2(W_n i + W_{n+1}j + W_{n+3}k) \text{ สำหรับ } n \geq 0,$$

$$(GW_n)(\overline{GW_n}) = W_n^2 + W_{n+1}^2\alpha + W_{n+2}^2\beta + W_{n+3}^2\alpha\beta \text{ สำหรับ } n \geq 0 \text{ และ } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

4. $N_{GW_n} = |W_n^2 + W_{n+1}^2\alpha + W_{n+2}^2\beta + W_{n+3}^2\alpha\beta|$ สำหรับ $n \geq 0$

5. สูตรบิเนต์ของจำนวน (α, β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

$$GW_n = \frac{d_1\varphi^n\hat{\varphi}}{(\varphi - \psi)(\varphi - \rho)} + \frac{d_2\psi^n\hat{\psi}}{(\psi - \varphi)(\psi - \rho)} + \frac{d_3\rho^n\hat{\rho}}{(\rho - \varphi)(\rho - \psi)} \text{ สำหรับ } n \geq 0$$

   เมื่อ $d_1 = W_2 - (\psi + \rho)W_1 + (\psi\rho)W_0$, $d_2 = W_2 - (\varphi + \rho)W_1 + (\varphi\rho)W_0$, $d_3 = W_2 - (\varphi + \psi)W_1 + (\varphi\psi)W_0$ และ $\hat{\varphi} = 1 + \varphi i + \varphi^2 j + \varphi^3 k, \hat{\psi} = 1 + \psi i + \psi^2 j + \psi^3 k$, $\hat{\rho} = 1 + \rho i + \rho^2 j + \rho^3 k$ และ i, j, k เป็นหน่วย (α, β) ควอเทอร์เนียน

6. ผลรวม $n+1$ พจน์แรก ของจำนวน (α,β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

$$\sum_{i=0}^{n} GW_i = \frac{1}{\delta}(GW_{n+2} + (1-r)GW_{n+1} + tGW_n + \omega) \text{ สำหรับ } n \geq 0$$

เมื่อ $\delta = r+s+t-1, \lambda = (r+s+t)a + (r-1)b - c,$
$\omega = \lambda + (\lambda - \delta a)i + (\lambda - \delta(a+b))j + (\lambda - \delta(a+b+c))k$ และ i, j, k เป็นหน่วย (α,β) ควอเทอร์เนียน

7. ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับ (α,β) ควอเทอร์เนียนไตรโบนัชชีวางนัยทั่วไป

$$\sum_{n=0}^{\infty} GW_i x^i = \frac{GW_0 + x(GW_1 - rGW_0) + x^2(GW_2 - rGW_1 - sGW_0)}{1 - rx - sx^2 - tx^3}$$

เอกสารอ้างอิง

[1] Sudipta, S. (2017). The Fibonacci numbers and its amazing applications. International journal of engineering science invention, 6(9), 07-14. ISSN: 2319 – 6726

[2] Allouche, J. P. and Johnson, T. (1996). Narayana's cow and delayed morphisms. Journées d'informatique musicale. HAL Id: hal-02986050 https://hal.science/hal-02986050v1

[3] Nurettin, I. Murat, A. (2013). Tribonacci number with indices in arithmetic progression and their sums. Miskolc mathematical notes, 14(1), 125–133. ISSN: 1787-2413

[4] Yuksel, S. (2020). Summing formulas for generalized tribonacci numbers. Universal journal of mathematics and applications, (3)1, https://doi.org/10.32323/ujma.637876

[5] Çolakoğlu, H. and Özdemir, M (2023). Generalized elliptical quaternions with some applications. Turkish journal of mathematics, 47(1), 351-371. https://doi.org/10.55730 /1300-0098.3364

[6] Yıldız, A. Yüce, S. and Oral, K. H. (2012). Split quaternion matrices. Miskolc mathematical notes 2(13), 223–232. https://doi.org/10.18514/MMN.2012.364

[7] Jafari, M. and Yayli, Y. (2015). Generalized quaternions and their algebeaic properties. 1(64). 15-27. https://doi.org/10.1501/Commua1_0000000724

[8] Mortazaasl, H. and Jafari, M. (2013). A study of semi-quaternions algebra in semi-euclidean 4-space. Mathematical science and applications e-notes 2(1) 20-27.

[9] Hamilton, W. R. (1866). Elements of Quaternions. London: Longmans, Green, Company.

[10] Adams, M. R. (2007). Geometry of Lie groups. Springer, (393).

[11] Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. The american mathematical monthly, 70(3), 289-291. https://doi.org/10.2307/2313129

[12] Morales, C. (2017). On a generalization for tribonacci quaternions. Mediterranean journal of mathematics, (17), 20-27. https://doi.org/10.1007/s00009-017-1042-3

[13] Akyiğit, M. Kösal, H. and Tosun, M. (2014). Fibonacci generalized quaternions. Advances in Applied Clifford Algebras, 24(3), 631–641. https:// doi.org/10.1007/s00 006-014-0458-0

[14] Goemans, M. (2015). Principles of Discrete Applied Mathematics: Generating Functions (Lecture Notes). MIT OpenCourseWare.

[15] Petpanwong, T. and Phudolsitthiphat, N. (2024). Some properties of hyperbolic k-Narayana quaternions. Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand. https://doi.org/10.1051/itmconf/20246 701035

[16] Wongmek, P. and Phudolsitthiphat, N. (2024). Some properties of hyperbolic generalized tribonacci quaternions. Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นายสรวิชณ์ มุสิการุณ
วัน เดือน ปี เกิด	27 เมษายน พ.ศ. 2543
สถานที่เกิด	จังหวัดพระนครศรีอยุธยา
ประวัติการศึกษา	พ.ศ. 2561 : มัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนอยุธยาวิทยาลัย จังหวัดพระนครศรีอยุธยา พ.ศ. 2565 : วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนครศรีอยุธยา
ประสบการณ์	พ.ศ. 2565 : ตำแหน่งครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ top one สาขาซีคอนสแควร์ ศรีนครินทร์