



เมทริกซ์ก่อกำเนิดของบางลำดับและพหุนามที่นิยามโดย ความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม*

อัญชิสา พรหมบุตร^{1,†} ธนะศักดิ์ หมวกทองหลาง^{2,‡}

¹ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 50200

บทคัดย่อ

งานค้นคว้าอิสระนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการหาเมทริกซ์ก่อกำเนิดของลำดับพาโดแวน (Padovan sequence) และพหุนามพาโดแวน (Padovan polynomials) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ รวมถึงการขยายผลการศึกษาไปยังเมทริกซ์ก่อกำเนิดของบางลำดับและพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ

การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เริ่มต้นจากการสำรวจทฤษฎีบท ความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับลำดับพาโดแวน ลำดับเพอร์ริน (Perrin sequence) พหุนามเพอร์ริน (Perrin polynomials) และลำดับที่มีความคล้ายคลึงกับลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci numbers) โดยใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันก่อกำเนิดและเมทริกซ์ก่อกำเนิด

จากการศึกษาพบว่าเมทริกซ์ก่อกำเนิดสามารถใช้เป็นเครื่องมือสำคัญในการคำนวณและหาพจน์ที่ n ของลำดับและพหุนามพาโดแวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ นอกจากนี้ยังสามารถนำแนวคิดนี้ไปขยายผลเพื่อสร้างเมทริกซ์ก่อกำเนิดของบางลำดับและพหุนามอื่น ๆ ที่มีโครงสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดลักษณะเดียวกัน ซึ่งจะช่วยให้มีความเข้าใจที่ลึกซึ้งเกี่ยวกับลำดับเหล่านี้และประยุกต์ใช้ในด้านต่าง ๆ ของคณิตศาสตร์ได้ต่อไป อีกทั้งยังเป็นแนวทางให้กับการศึกษาต่อยอดเกี่ยวกับลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดในอนาคต

คำสำคัญ: เมทริกซ์ก่อกำเนิด, ลำดับพาโดแวน, พหุนามพาโดแวน, ความสัมพันธ์เวียนเกิด

2020 MSC: -

†ผู้นำเสนอ ‡ผู้แต่งหลัก

อีเมล: kwan.aunchisa@gmail.com, thanasak.m@cmu.ac.th.

บทที่ 1

บทนำ

การค้นคว้าอิสระ เรื่องเมทริกซ์ก่อกำเนิดของบางลำดับและพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม ในบทแรกนี้จะกล่าวถึงประเด็นสำคัญอันจะนำมาสู่งานค้นคว้าอิสระ ซึ่งประกอบด้วย 3 ประเด็นหลัก ได้แก่ 1) หลักการ ทฤษฎี เหตุผลหรือสมมติฐาน 2) วัตถุประสงค์ของการศึกษา และ 3) ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการศึกษา

1.1 หลักการ ทฤษฎี เหตุผลหรือสมมติฐาน

มีบทความมากมายที่ศึกษาเกี่ยวกับจำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci numbers) และลำดับอื่น ๆ ที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดได้เผยแพร่ในช่วง 30 ปีที่ผ่านมา จำนวนเพอร์รีน (Perrin numbers) และจำนวนพาโดแวน (Padovan numbers) ก็เป็นบางส่วนในนั้น

ตามประวัติศาสตร์ลำดับเพอร์รีน (Perrin sequence) ถูกกล่าวถึงโดย Edouard Lucas ในปี 1876 และต่อมาในปี 1899 ลำดับนี้ถูกนิยามโดย Francois Perrin ลำดับเพอร์รีนเป็นลำดับที่นิยามด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับ 3 เขียนแทนด้วย Pe_n ในการศึกษาจำนวนเพอร์รีน พหุนามเพอร์รีน และพหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีนสามารถศึกษาพื้นฐานในเอกสารอ้างอิง [4] และในเอกสารอ้างอิง [7] Li and MacHenry ได้กล่าวว่าลำดับเพอร์รีนเป็น F - representable

จากนั้นลำดับเพอร์รีนก็ได้รับความสนใจจากนักวิจัยจำนวนมากในช่วงหลายปีที่ผ่านมา ต่อมาในปี 2021 ได้มีการนำเสนอฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function) เมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) และสูตรบินต์ (Binet formula) ของพหุนามเพอร์รีน (Perrin polynomials) และพหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีน (Perrin complex bivariate polynomials) ไว้ในเอกสารอ้างอิง [12]

ในทำนองเดียวกันลำดับพาโดแวน (Padovan sequence) เขียนแทนด้วย P_n เป็นลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับ 3 ซึ่งลำดับพาโดแวนมีความคล้ายกับลำดับเพอร์รีนและมีทฤษฎีมากมายที่คล้ายกันแต่ต่างกันตรงเงื่อนไขเริ่มต้น

จากการศึกษาเอกสารอ้างอิง [8] ลำดับพาโดแวนได้รับการตั้งชื่อตามนักคณิตศาสตร์ชื่อว่า Richard Padovan ผู้ที่อ้างว่าค้นพบลำดับนี้มาจากสถาปนิกชาวดัตช์ที่ชื่อว่า Hans van der Laan และลำดับนี้ถูกเขียนในบทความ Dom Hans van der Laan: Modern Primitive ในปี 1994 ลำดับพาโดแวนถูกอธิบายโดย Ian Stewart ในคอลัมน์ Mathematical Recreations ของเขาในวารสาร Scientific

American ในเดือนมิถุนายน ปี 1996 นอกจากนี้เขายังเขียนเกี่ยวกับลำดับนี้ในหนังสือ Math Hysteria: Fun Games With Mathematics ของเขาอีกด้วย การศึกษาลำดับพาโดเวนสามารถศึกษาพื้นฐานได้ในเอกสารอ้างอิง [11]

ในงานค้นคว้าอิสระนี้ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาเมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของลำดับพาโดเวน (Padovan sequence) พหุนามพาโดเวน (Padovan polynomials) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ และขยายการศึกษาไปยังเมทริกซ์ก่อกำเนิดของบางลำดับและพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 เพื่อหาเมทริกซ์ก่อกำเนิดของลำดับพาโดเวนและเมทริกซ์ก่อกำเนิดของพหุนามพาโดเวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ

1.2.2 เพื่อหาเมทริกซ์ก่อกำเนิดของบางลำดับและพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการศึกษา

1.3.1 ได้เมทริกซ์ก่อกำเนิดที่เป็นตัวแทนความสัมพันธ์เวียนเกิดของลำดับพาโดเวนและพหุนามพาโดเวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ

1.3.2 ได้เมทริกซ์ก่อกำเนิดของบางลำดับและพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ

1.3.3 ได้พจน์ที่ n ของบางลำดับและพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ โดยใช้เมทริกซ์ก่อกำเนิด

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Principle of Mathematical Induction)

การพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นวิธีการพิสูจน์ข้อความต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 2.1 [2] ให้ $P(n)$ แทนข้อความที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก n ถ้า

1) $P(1)$ เป็นจริง

และ 2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริงแล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใด ๆ

จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 2.2 [2] จงพิสูจน์ว่า $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ สำหรับจำนวนนับ n

พิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทน $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

เราจะต้องพิสูจน์ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

1) $P(1)$ เป็นจริง เพราะว่า $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

2) ถ้ายอมรับ $P(k)$ เป็นจริง แล้วจะต้องแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

ดังนั้น จากสมบัติการเท่ากันของการบวก นำ $k+1$ บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

$$\text{ดังนั้น } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

บทนิยาม 2.3 [1] ให้ $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) อันดับ k ของลำดับ $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ คือสมการที่อยู่ในรูป

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, n), \quad n \geq k$$

โดย $f: \mathbb{R}^{(k+1)} \rightarrow \mathbb{R}$

เงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions) คือค่าของ $a_0, a_1, \dots, a_n$ ซึ่งถูกกำหนดไว้เป็นจำนวนพจน์จำกัด โดยทั่วไปนิยมกำหนดพจน์ที่ 0 ถึง $k-1$

บทนิยาม 2.4 [1] ลำดับฟีโบนัคชี (Fibonacci sequence) เป็นลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3$$

และเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $F_1 = 1, F_2 = 2$

จะได้ว่าลำดับฟีโบนัคชีเป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับ 2

ดังนั้น ลำดับฟีโบนัคชี F_n คือ 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

บทนิยาม 2.5 [5] กำหนดให้ $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นค่าคงที่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เรียก $P(x)$ ว่า พหุนามใน x ดีกรี n เรียก $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ว่า สัมประสิทธิ์ และ เรียก a_jx^j เมื่อ $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ว่า พจน์ที่ $j+1$ ของพหุนาม

ตัวอย่าง 2.6 $P(x) = x^2 + x + 2$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี 2

ตัวอย่าง 2.7 $P(x) = 3x^3 + x^2 + 1$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี 3

บทนิยาม 2.8 [7] พหุนามฟีโบนัคชี (Fibonacci polynomials) เป็นลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \quad n \geq 3$$

และเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $F_1(x) = 1, F_2(x) = x$

จะได้ว่าลำดับพหุนามฟีโบนัชชีเป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับ 2

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับพหุนามฟีโบนัชชี f_n คือ

$$1, x, x^2 + 1, x^3 + 2x, x^4 + 3x^2 + 1, x^5 + 3x^3 + 3x, \dots$$

บทนิยาม 2.9 [1] ให้ $r \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ โดยที่ $c_r \neq 0$ และ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน เรียกความสัมพันธ์เวียนเกิดในรูป

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} + f(n)$$

ว่า สมการเวียนเกิดเชิงเส้น (linear recurrence equation) อันดับ r ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว เรียกลำดับซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดที่พิจารณาว่า ผลเฉลย (solution) ของความสัมพันธ์เวียนเกิด

ในกรณีที่ $f(n) = 0$ เราจะกล่าวว่าสมการนี้เป็น สมการเอกพันธ์ (homogeneous equation) และกรณีที่ $f(n) \neq 0$ เราจะกล่าวว่าสมการนี้เป็น สมการไม่เอกพันธ์ (non-homogeneous equation)

ตัวอย่าง 2.10 $b_n = 2b_{n-1}$ เป็นสมการเวียนเกิดเชิงเส้นอันดับ 1

ตัวอย่าง 2.11 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ เป็นสมการเวียนเกิดเชิงเส้นอันดับ 2

ตัวอย่าง 2.12 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3}$ เป็นสมการเวียนเกิดเชิงเส้นอันดับ 3

ตัวอย่าง 2.13 $x_n = 3x_{n-4}$ เป็นสมการเวียนเกิดเชิงเส้นอันดับ 4

เมทริกซ์ก่อกำเนิดของรหัสเชิงเส้น

บทนิยาม 2.14 [8] ในทฤษฎีรหัส เมทริกซ์ก่อกำเนิดคือ เมทริกซ์ที่มีแถวเป็นฐานสำหรับโค้ดเชิงเส้น The codewords เป็นผลรวมเชิงเส้นทั้งหมดของแถวของเมทริกซ์นี้ นั่นคือโค้ดเชิงเส้นคือปริภูมิแถวของเมทริกซ์ก่อกำเนิด

บทนิยาม 2.15 [3] ถ้า $g_1, g_2, \dots, g_k$ เป็นฐานหลักของรหัส c ซึ่งมีความยาว n และมีมิติ k จะเรียกเมทริกซ์

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \end{bmatrix}$$

ว่าเมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของรหัส c หรือ กล่าวว่ารหัส c ก่อเกิดโดยเมทริกซ์ G

ตัวอย่าง 2.16 [3] $C_2 = \{000, 011, 101, 110\}$ มีฐานหลักทั้งหมด 3 ชุด คือ

$$\{011, 110\}, \{011, 101\} \text{ และ } \{110, 101\}$$

ดังนั้น เมทริกซ์ก่อกำเนิดของรหัส C_2 ที่เกิดจากฐานหลักเหล่านี้ คือ เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ตามลำดับ}$$

บทนิยาม 2.17 [14] ลำดับเพอร์รีน (Perrin sequence) นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3} \text{ สำหรับจำนวนเต็ม } n \geq 3$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $Pe_0 = 3, Pe_1 = 0$ และ $Pe_2 = 2$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับเพอร์รีน Pe_n คือ 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, ...

เราจะเรียกแต่ละพจน์ของลำดับเพอร์รีน ว่า จำนวนเพอร์รีน (Perrin number)

บทนิยาม 2.18 [14] พหุนามเพอร์รีน (Perrin polynomials) $p_n(x)$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$p_n(x) = x^2 p_{n-2}(x) + p_{n-3}(x), \text{ สำหรับจำนวนเต็ม } n > 3,$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $p_1(x) = 0, p_2(x) = 2, p_3(x) = 3$ และ $p_n(1) = Pe_n$ เป็นพจน์ที่ n ในลำดับเพอร์รีน

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้นจะได้ลำดับของพหุนามเพอร์รีนแสดงในตารางที่ 1 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 1 n พจน์แรกของลำดับของพหุนามเพอร์รีน

n	$p_n(x)$
1	0
2	2
3	3
4	$2x^2$
5	$2+3x^2$
6	$3+2x^4$
7	$4x^2+3x^4$
$\vdots$	$\vdots$

ทฤษฎีบท 2.19 [14] เมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของพหุนามเพอร์รีน (Perrin polynomials) สำหรับ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$vQ^n = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} p_{n+3}(x) & p_{n+2}(x) & p_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

โดยที่ v แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q แทนเมทริกซ์ก่อกำเนิด

ตัวอย่าง 2.20 จงหาพจน์ที่ 5 ของลำดับพหุนามเพอร์รีน $p_5(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $vQ^n = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} p_{n+3}(x) & p_{n+2}(x) & p_{n+1}(x) \end{bmatrix}$

แทนค่า $n = 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} vQ^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} p_{2+3}(x) & p_{2+2}(x) & p_{2+1}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} p_5(x) & p_4(x) & p_3(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_5(x) & p_4(x) & p_3(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x^2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_5(x) & p_4(x) & p_3(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3x^2 + 2 & 2x^2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_5(x) & p_4(x) & p_3(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $p_5(x) = 3x^2 + 2$

□

บทนิยาม 2.21 [14] พหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีน (Perrin complex bivariate polynomials)

$p_n(x, y)$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$p_n(x, y) = ix^2 p_{n-2}(x, y) + y^2 p_{n-3}(x, y)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $p_0(x, y) = 3$, $p_1(x, y) = 0$, $p_2(x, y) = 2$ และ $i^2 = -1$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้นจะได้ลำดับของพหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีนแสดงในตารางที่ 2 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 2 n พจน์แรกของลำดับของพหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีน

n	$p_n(x, y)$
0	3
1	0
2	2
3	$3y^2$
4	$2x^2i$
5	$2y^2 + 3x^2y^2i$
6	$-2x^4 + 3y^4$
$\vdots$	$\vdots$

ทฤษฎีบท 2.22 [14] เมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของพหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีน (Perrin complex bivariate polynomials) สำหรับ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$uQ_c^n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ix^2 & 0 & 1 \\ y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} p_{n+2}(x, y) & p_{n+1}(x, y) & p_n(x, y) \end{bmatrix}$$

โดยที่ u แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q_c แทนเมทริกซ์ก่อกำเนิดเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 2.23 จงหาพจน์ที่ 4 ของลำดับพหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีน $p_4(x, y)$

วิธีทำ เนื่องจาก $uQ_c^n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ix^2 & 0 & 1 \\ y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} p_{n+2}(x, y) & p_{n+1}(x, y) & p_n(x, y) \end{bmatrix}$

แทนค่า $n = 2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
uQ_c^2 &= [2 \ 0 \ 3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ix^2 & 0 & 1 \\ y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = [p_{2+2}(x, y) \ p_{2+1}(x, y) \ p_2(x, y)] \\
&= [2 \ 0 \ 3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ix^2 & 0 & 1 \\ y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = [p_4(x, y) \ p_3(x, y) \ p_2(x, y)] \\
&= [2 \ 0 \ 3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ix^2 & 0 & 1 \\ y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ix^2 & 0 & 1 \\ y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [p_4(x, y) \ p_3(x, y) \ p_2(x, y)] \\
&= [3y^2 \ 2 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ix^2 & 0 & 1 \\ y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [p_4(x, y) \ p_3(x, y) \ p_2(x, y)] \\
&= [2ix^2 \ 3y^2 \ 2] = [p_4(x, y) \ p_3(x, y) \ p_2(x, y)]
\end{aligned}$$

ดังนั้น $p_4(x, y) = 2ix^2$

□

พหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีน (Perrin's complex bivariate polynomials) ที่มีดัชนีเป็น

จำนวนเต็มที่ไม่เป็นบวก

จากบทนิยามที่ 2.21 จะได้ลำดับของพหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นบวก แสดงในตารางที่ 3 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3 $-n$ พจน์แรกของลำดับของพหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีน

$-n$	$p_{-n}(x, y)$
$\vdots$	$\vdots$
-6	$\frac{-6x^4 + 12x^6i}{y^8} + \frac{-2x^{10}i + 3x^{12} + 3y^8}{y^{12}}$
-5	$\frac{-4x^2i - 9x^4}{y^6} + \frac{2x^8 + 3x^{10}i}{y^{10}}$
-4	$\frac{2 - 6x^2i}{y^4} + \frac{2x^6i - 3x^8}{y^8}$
-3	$\frac{3}{y^2} + \frac{-2x^4 + 3x^6i}{y^6}$
-2	$\frac{-2ix^2 - 3x^4}{y^4}$
-1	$\frac{2 - 3x^2i}{y^2}$
0	3

ทฤษฎีบท 2.24 [14] เมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของลำดับพหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีน (Perrin complex bivariate polynomials) สำหรับดัชนีเป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นบวก โดยที่ $n > 0$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$uQ_c^{-n} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ix^2 & 0 & 1 \\ y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix} p_{-n+2}(x) & p_{-n+1}(x) & p_{-n}(x) \end{bmatrix}$$

โดยที่ u แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q_c^{-1} แทนตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์ก่อกำเนิดเชิงซ้อน Q_c

ตัวอย่าง 2.25 จงหาพจน์ที่ -3 ของลำดับพหุนามเชิงซ้อนสองตัวแปรเพอร์รีน $p_{-3}(x, y)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$uQ_c^{-n} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ix^2 & 0 & 1 \\ y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix} p_{-n+2}(x, y) & p_{-n+1}(x, y) & p_{-n}(x, y) \end{bmatrix}$$

แทนค่า $n = 3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
uQ_c^{-3} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ ix^2 & 0 & 1 \\ y^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-3} = \begin{bmatrix} p_{-3+2}(x, y) & p_{-3+1}(x, y) & p_{-3}(x, y) \end{bmatrix} \\
\text{หรือ } u(Q_c^{-1})^3 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} p_{-3+2}(x, y) & p_{-3+1}(x, y) & p_{-3}(x, y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} p_{-1}(x, y) & p_{-2}(x, y) & p_{-3}(x, y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-1}(x, y) & p_{-2}(x, y) & p_{-3}(x, y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 3 & \frac{2}{y^2} - \frac{3ix^2}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-1}(x, y) & p_{-2}(x, y) & p_{-3}(x, y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{y^2} - \frac{3ix^2}{y^2} & -\frac{ix^2}{y^2} \left(\frac{2}{y^2} - \frac{3ix^2}{y^2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-1}(x, y) & p_{-2}(x, y) & p_{-3}(x, y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{y^2} - \frac{3ix^2}{y^2} & \frac{-2ix^2}{y^4} + \frac{3i^2x^4}{y^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-1}(x, y) & p_{-2}(x, y) & p_{-3}(x, y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{y^2} - \frac{3ix^2}{y^2} & \frac{-2ix^2}{y^4} + \frac{3i^2x^4}{y^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-1}(x, y) & p_{-2}(x, y) & p_{-3}(x, y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & \frac{2-3ix^2}{y^2} & \frac{-2ix^2-3x^4}{y^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{y^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{ix^2}{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{-1}(x, y) & p_{-2}(x, y) & p_{-3}(x, y) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{2-3ix^2}{y^2} & -\frac{2ix^2-3x^4}{y^4} & \frac{3}{y^2} - \frac{ix^2}{y^2} \left(\frac{-2ix^2-3x^4}{y^4} \right) \end{bmatrix} = [p_{-1}(x, y) \ p_{-2}(x, y) \ p_{-3}(x, y)] \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2-3ix^2}{y^2} & -\frac{2ix^2-3x^4}{y^4} & \frac{3}{y^2} + \frac{2ix^4+3ix^6}{y^6} \end{bmatrix} = [p_{-1}(x, y) \ p_{-2}(x, y) \ p_{-3}(x, y)] \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2-3ix^2}{y^2} & -\frac{2ix^2-3x^4}{y^4} & \frac{3}{y^2} + \frac{-2x^4+3ix^6}{y^6} \end{bmatrix} = [p_{-1}(x, y) \ p_{-2}(x, y) \ p_{-3}(x, y)]
\end{aligned}$$

ดังนั้น $p_{-3}(x, y) = \frac{3}{y^2} + \frac{-2x^4+3ix^6}{y^6}$ □

บทนิยาม 2.26 [4] การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว (elementary row operation) คือ การกระทำกับสมาชิกในแถวของเมทริกซ์ซึ่งสามารถทำได้แบบใดแบบหนึ่ง ดังต่อไปนี้ โดยที่ r'_i แทน แถวที่ i ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว และ r_i แทน แถวที่ i ของเมทริกซ์ก่อนหน้า

1. สลับแถว 2 แถวใด ๆ ($r'_i = r_j$ และ $r'_j = r_i$)
2. คูณแถวหนึ่งแถวใดด้วยค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์ ($r'_i = kr_i$)
3. แทนแถวหนึ่งแถวใดด้วยผลบวกระหว่างแถวนั้น กับผลคูณของค่าคงที่ที่ไม่เป็นศูนย์กับแถวอื่น ($r'_i = kr_j + r_i$)

จะเรียกเมทริกซ์ A ว่าสมมูลแบบแถวกับ B (เขียนแทนด้วย $A \sim B$)

ก็ต่อเมื่อ B เกิดจากการใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวของ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด

ตัวอย่าง 2.27 [4] ให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการเบื้องต้นกับ

แถวของ A ต่อไปนี้ตามลำดับ

1. $r'_1 = r_2$ และ $r'_2 = r_1$
2. $r'_2 = 2r_1 + r_2$
3. $r'_3 = -4r_1 + r_3$

เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}
A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{aligned} r'_1 &= r_2 \\ r'_2 &= r_1 \end{aligned} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} & r'_2 = 2r_1 + r_2 \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} & r'_3 = -4r_1 + r_3
\end{aligned}$$

บทนิยาม 2.28 [4] จะเรียกเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ว่า เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix) เมื่อมีเมทริกซ์ $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ที่ซึ่ง

$$AB = I_n = BA$$

- เรียกเมทริกซ์ B ที่มีสมบัติดังกล่าวว่า **ตัวผกผัน (inverse)** ของ A
- ถ้า A ไม่มีตัวผกผันแล้วจะเรียก A ว่า **เมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)**

ทฤษฎีบท 2.29 [4] ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน
2. ระบบสมการเชิงเส้น $AX = \underline{0}$ มีผลเฉลยเพียงชุดเดียว
3. $A \sim I_n$

จาก **ทฤษฎีบท 2.29** จะสามารถหาตัวผกผันของเมทริกซ์ได้ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.30 [4] ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ ที่มีลำดับของการดำเนินการเบื้องต้นเปลี่ยน A

ให้อยู่ในรูป I_n แล้ว A^{-1} จะเป็นเมทริกซ์ที่ได้จากการใช้การดำเนินการเบื้องต้นในลำดับเดิมกระทำกับ I_n

จาก**ทฤษฎีบท 2.30** จะสรุปขั้นตอนในการหาตัวผกผันของ A ได้ดังนี้

1. เขียนเมทริกซ์ $[A|I_n]$
2. B จะเป็นเมทริกซ์ผกผันของ A ก็ต่อเมื่อ สามารถใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวทำให้ $[A|I_n] \sim [I_n|B]$

ตัวอย่าง 2.31 [4] ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ จงตรวจสอบว่า A มีตัวผกผันหรือไม่โดยทำตามขั้นตอนดังนี้

$$[A|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

เมื่อใช้การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถวกับ A จะได้

$$[A|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

จะเห็นว่า $A \sim I_3$ ดังนั้น A หาตัวผกผันได้และจะได้ว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

บทที่ 3

ผลการศึกษา

ในบทนี้จะนำเสนอผลการศึกษาประกอบด้วย 1) เมทริกซ์ก่อกำเนิดของลำดับพาโดแวนและเมทริกซ์ก่อกำเนิดของพหุนามพาโดแวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ 2) เมทริกซ์ก่อกำเนิดของบางลำดับและพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ

3.1 ผลการศึกษาลำดับพาโดแวน (Padovan sequence)

3.1.1 ผลการศึกษาลำดับพาโดแวน (Padovan sequence) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวก

บทนิยาม 3.1.1.1 [15] ลำดับพาโดแวน (Padovan sequence) สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $P_0 = P_1 = P_2 = 1$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับพาโดแวน P_n คือ 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, ...

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้นจะได้ลำดับพาโดแวน แสดงในตารางที่ 4 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4 n พจน์แรกของลำดับพาโดแวน

n	P_n
0	1
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	4
$\vdots$	$\vdots$

ทฤษฎีบท 3.1.1.2 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (The generator matrix) ของลำดับพาโดแวน (Padovan sequence) สำหรับ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$sQ^n = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = [P_{n+2} \quad P_{n+1} \quad P_n]$$

โดยที่ s แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q แทนเมทริกซ์ก่อกำเนิด

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$

$$\text{กำหนด } P(n) \text{ แทนข้อความ } sQ^n = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = [P_{n+2} \quad P_{n+1} \quad P_n] \quad (1)$$

1) สำหรับ $n=1$ จะได้ว่า

$$P(1) \text{ คือ } sQ^1 = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [2 \quad 1 \quad 1] = [P_3 \quad P_2 \quad P_1] \quad \text{เป็นจริง}$$

2) ให้ $n=k$, $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$sQ^k = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = [P_{k+2} \quad P_{k+1} \quad P_k]$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ให้ $n=k+1$, $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} sQ^{k+1} &= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \\ &= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [P_{k+2} \quad P_{k+1} \quad P_k] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [P_{k+1} + P_k \quad P_{k+2} \quad P_{k+1}] \\ &= [P_{k+3} \quad P_{k+2} \quad P_{k+1}] \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น (1) เป็นจริงสำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

□

ตัวอย่าง 3.1.1.3 จงหาพจน์ที่ 4 ของลำดับพาโดแวน P_4

วิธีทำ เนื่องจาก $sQ^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} & P_n \end{bmatrix}$

แทนค่า $n=2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} sQ^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} P_{2+2} & P_{2+1} & P_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_4 & P_3 & P_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_4 & P_3 & P_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_4 & P_3 & P_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P_4 = 2$

□

3.1.2 ผลการศึกษาลำดับพาโดแวน (Padovan sequence) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

บทนิยาม 3.1.2.1 [12] ลำดับพาโดแวน (Padovan sequence) P_m สำหรับจำนวนเต็ม $m < 0$

นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$P_m = P_{m+3} - P_{m+1}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $P_0 = P_1 = P_2 = 1$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับพาโดแวน P_m คือ $\dots, -1, 1, 0, 0, 1, 0, 1$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้นจะได้ลำดับพาโดแวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ แสดงในตารางที่ 5 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 5 m พจน์แรกของลำดับพาโดแวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

m	P_m
$\vdots$	$\vdots$
-6	-1
-5	1
-4	0
-3	0
-2	1
-1	0
0	1

ทฤษฎีบท 3.1.2.2 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของลำดับพาโดแวน (Padovan sequence)

ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ โดยที่ $m > 0$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$sQ^{-m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} P_{-m+2} & P_{-m+1} & P_{-m} \end{bmatrix}$$

โดยที่ s แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q^{-1} แทนตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์

ก่อกำเนิด Q

พิสูจน์ จาก $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะตรวจสอบว่า Q มีตัวผกผันหรือไม่ โดยทำตามขั้นตอนดังนี้

$$\begin{aligned} [Q|I_3] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ [Q|I_3] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_2 \\ r'_2 = r_1 \end{array} \\ [Q|I_3] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_3 \\ r'_3 = r_1 \end{array} \end{aligned}$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \quad r'_3 = -r_1 + r_3$$

$$\text{จะได้ว่า } Q_3 \sim I_3 \text{ ดังนั้น } Q \text{ หาตัวผกผันได้และจะได้ว่า } Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $m \geq 1$ และ $m \in \mathbb{N}$

$$\text{กำหนด } P(m) \text{ แทนข้อความ } sQ^{-m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} P_{-m+2} & P_{-m+1} & P_{-m} \end{bmatrix} \quad (2)$$

1) สำหรับ $m=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(1) \text{ คือ } sQ^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_0 & P_{-1} \end{bmatrix} \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

2) ให้ $m=k, k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$sQ^{-k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-k} = \begin{bmatrix} P_{-k+2} & P_{-k+1} & P_{-k} \end{bmatrix}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ให้ $m=k+1, k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} sQ^{-(k+1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-(k+1)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-k} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k+2} & P_{-k+1} & P_{-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} P_{-k+1} & P_{-k} & P_{-k+2} - P_{-k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{-k+1} & P_{-k} & P_{-k-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น (2) เป็นจริงสำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

□

ตัวอย่าง 3.1.2.3 จงหาพจน์ที่ -3 ของลำดับพาโดแวน P_{-3}

วิธีทำ เนื่องจาก $sQ^{-m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} P_{-m+2} & P_{-m+1} & P_{-m} \end{bmatrix}$

แทนค่า $m=3$ จะได้ว่า

$$sQ^{-3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-3} = \begin{bmatrix} P_{-3+2} & P_{-3+1} & P_{-3} \end{bmatrix}$$

$$\text{หรือ } s(Q^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} P_{-3+2} & P_{-3+1} & P_{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} P_{-1} & P_{-2} & P_{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{-1} & P_{-2} & P_{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{-1} & P_{-2} & P_{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{-1} & P_{-2} & P_{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{-1} & P_{-2} & P_{-3} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $P_{-3} = 0$

□

3.2 ผลการศึกษาพหุนามพาโดเวน (Padovan polynomials)

3.2.1 ผลการศึกษาพหุนามพาโดเวน (Padovan polynomials) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวก

บทนิยาม 3.2.1.1 [11] พหุนามพาโดเวน (Padovan polynomials) $P_n(x)$ นิยามโดย ความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$P_n(x) = xP_{n-2}(x) + P_{n-3}(x), \text{ สำหรับจำนวนเต็ม } n \geq 4,$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $P_1(x) = 1, P_2(x) = 0, P_3(x) = x$ และ $P_n(1) = P_n$ เป็นพจน์ที่ n ในลำดับพาโดเวน

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้นจะได้ลำดับของพหุนามพาโดเวน แสดงในตารางที่ 6 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 6 n พจน์แรกของลำดับของพหุนามพาโดเวน

n	$P_n(x, y)$
1	1
2	0
3	x
4	1
5	x^2
6	$2x$
7	$x^3 + 1$
$\vdots$	$\vdots$

ทฤษฎีบท 3.2.1.2 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของพหุนามพาโดเวน (Padovan polynomials) สำหรับ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$uQ^n = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+3}(x) & P_{n+2}(x) & P_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

โดยที่ u แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q แทนเมทริกซ์ก่อกำเนิด

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$

กำหนด $P(n)$ แทนข้อความ

$$uQ^n = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+3}(x) & P_{n+2}(x) & P_{n+1}(x) \end{bmatrix} \quad (3)$$

1) สำหรับ $n=1$ จะได้ว่า

$$P(1) \text{ คือ } uQ^1 = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_4(x) & P_3(x) & P_2(x) \end{bmatrix} \quad \text{เป็นจริง}$$

2) ให้ $n=k$, $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$uQ^k = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} P_{k+3}(x) & P_{k+2}(x) & P_{k+1}(x) \end{bmatrix}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ให้ $n=k+1$, $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} uQ^{(k+1)} &= \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \\ &= \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k+3}(x) & P_{k+2}(x) & P_{k+1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xP_{k+2}(x) + P_{k+1}(x) & P_{k+3}(x) & P_{k+2}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{k+4}(x) & P_{k+3}(x) & P_{k+2}(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น (3) เป็นจริงสำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

□

ตัวอย่าง 3.2.1.3 จงหาพจน์ที่ 5 ของลำดับพาโดแวน $P_5(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $uQ^n = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+3}(x) & P_{n+2}(x) & P_{n+1}(x) \end{bmatrix}$

แทนค่า $n=2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} uQ^2 &= \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} P_{2+3}(x) & P_{2+2}(x) & P_{2+1}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5(x) & P_4(x) & P_3(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5(x) & P_4(x) & P_3(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 & 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5(x) & P_4(x) & P_3(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $P_5(x) = x^2$

□

3.2.2 ผลการศึกษาพหุนามพาโดแวน (Padovan polynomials) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

ในส่วนนี้จะเป็นการศึกษาพหุนามพาโดแวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ โดยเริ่มจากการศึกษาความสัมพันธ์เวียนเกิดของพหุนามพาโดแวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกแล้วขยายการศึกษาไปยังพหุนามพาโดแวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

จาก บทนิยาม 3.2.1.1 [11] พหุนามพาโดแวน (Padovan polynomials) $P_n(x)$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$P_n(x) = xP_{n-2}(x) + P_{n-3}(x), \text{ สำหรับจำนวนเต็ม } n \geq 4 \quad (3)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $P_1(x) = 1, P_2(x) = 0, P_3(x) = x$ และ $P_n(1) = P_n$ เป็นพจน์ที่ n ใน

ลำดับพหุนามพาโดแวน

จาก (3)

จะได้ว่า $P_{n-3}(x) = P_n(x) - xP_{n-2}(x)$, สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 4$

$$\text{ให้ } n-3 = m \quad (4)$$

$$\text{จะได้ } n = m+3 \quad (5)$$

แทนค่า (4),(5) ใน (3) จะได้ว่า $P_m(x) = P_{m+3}(x) - xP_{m+1}(x)$, สำหรับจำนวนเต็ม $m \leq 0$

บทนิยาม 3.2.2.1 พหุนามพาโดแวน (Padovan polynomials) $P_m(x)$ สำหรับจำนวนเต็ม $m \leq 0$
นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$P_m(x) = P_{m+3}(x) - xP_{m+1}(x)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $P_1(x)=1, P_2(x)=0, P_3(x)=x$

ใช้ค่าตั้งต้นและสมการเวียนเกิดเพื่อคำนวณค่าของ $P_m(x)$ สำหรับ $m \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } m=0 \quad ; \quad P_0(x) &= P_3(x) - xP_1(x) \\ &= x - x(1) \\ &= x - x \\ P_0(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } m=-1 \quad ; \quad P_{-1}(x) &= P_2(x) - xP_0(x) \\ &= 0 - x(0) \\ &= 0 - 0 \\ P_{-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } m=-2 \quad ; \quad P_{-2}(x) &= P_1(x) - xP_{-1}(x) \\ &= 1 - x(0) \\ P_{-2}(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } m=-3 \quad ; \quad P_{-3}(x) &= P_0(x) - xP_{-2}(x) \\ &= 0 - x(1) \\ &= 0 - x \\ P_{-3}(x) &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } m=-4 \quad ; \quad P_{-4}(x) &= P_{-1}(x) - xP_{-3}(x) \\ &= 0 - x(-x) \\ &= 0 + x^2 \\ P_{-4}(x) &= x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } m=-5 \quad ; \quad P_{-5}(x) &= P_{-2}(x) - xP_{-4}(x) \\ &= 1 - x(x^2) \\ P_{-5}(x) &= 1 - x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{แทนค่า } m = -6 \quad ; \quad P_{-6}(x) &= P_{-3}(x) - xP_{-5}(x) \\
&= -x - x(1 - x^3) \\
&= -x - x + x^4 \\
P_{-6}(x) &= x^4 - 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{แทนค่า } m = -7 \quad ; \quad P_{-7}(x) &= P_{-4}(x) - xP_{-6}(x) \\
&= x^2 - x(x^4 - 2x) \\
&= x^2 - x^5 + 2x^2 \\
P_{-7}(x) &= -x^5 + 3x^2
\end{aligned}$$

จากการขยายการศึกษาพหุนามพาโดแวนไปยังดัชนีที่เป็นจำนวนเต็มลบ จะได้ลำดับของพหุนามพาโดแวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ แสดงในตารางที่ 7 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 7 m พจน์แรกของลำดับของพหุนามพาโดแวนที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

m	$P_m(x)$
$\vdots$	$\vdots$
-7	$-x^5 + 3x^2$
-6	$x^4 - 2x$
-5	$1 - x^3$
-4	$-x^2$
-3	$-x$
-2	1
-1	0
0	0

ทฤษฎีบท 3.2.2.2 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของพหุนามพาโดแวน (Padovan polynomials) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ โดยที่ $m > 0$ และ $m \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$uQ^{-m} = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} P_{-m+3}(x) & P_{-m+2}(x) & P_{-m+1}(x) \end{bmatrix}$$

โดยที่ u แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q^{-1} แทนตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์ก่อกำเนิด Q

พิสูจน์ จาก $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะตรวจสอบว่า Q มีตัวผกผันหรือไม่ โดยทำตามขั้นตอนดังนี้

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_3 \\ r'_3 = r_1 \end{array}$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_2 = r_3 \\ r'_3 = r_2 \end{array}$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -x \end{array} \right] \quad r'_3 = -xr_1 + r_3$$

จะได้ว่า $Q_3 \sim I_3$ ดังนั้น Q หาตัวผกผันได้ และจะได้ว่า $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix}$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $m \geq 1$ และ $m \in \mathbb{N}$

กำหนด $P(m)$ แทนข้อความ

$$uQ^{-m} = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} P_{-m+3}(x) & P_{-m+2}(x) & P_{-m+1}(x) \end{bmatrix} \quad (6)$$

1) สำหรับ $m=1$ จะได้ว่า

$$P(1) \text{ คือ } uQ^{-1} = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2(x) & P_1(x) & P_0(x) \end{bmatrix} \text{ เป็นจริง}$$

2) ให้ $m=k, k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$uQ^{-k} = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-k} = \begin{bmatrix} P_{-k+3}(x) & P_{-k+2}(x) & P_{-k+1}(x) \end{bmatrix}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ให้ $m=k+1$, $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} uQ^{-(k+1)} &= \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-(k+1)} \\ &= \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-k} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k+3}(x) & P_{-k+2}(x) & P_{-k+1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k+2}(x) & P_{-k+1}(x) & P_{-k+3}(x) - xP_{-k+1}(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k+2}(x) & P_{-k+1}(x) & P_{-k}(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น (6) เป็นจริงสำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

□

ตัวอย่าง 3.2.2.3 จงหาพจน์ที่ -6 ของพหุนามพาโดแวน $P_{-6}(x)$

วิธีทำ เนื่องจาก $uQ^{-m} = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} P_{-m+3}(x) & P_{-m+2}(x) & P_{-m+1}(x) \end{bmatrix}$

แทนค่า $m=7$ จะได้ว่า

$$uQ^{-7} = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-7} = \begin{bmatrix} P_{-7+3}(x) & P_{-7+2}(x) & P_{-7+1}(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{หรือ } u(Q^{-1})^7 &= [x \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix}^7 = [P_{-7+3}(x) \ P_{-7+2}(x) \ P_{-7+1}(x)] \\
&= [x \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x^4-2x & -x^5+3x^2 & x^6-4x^3+1 \\ 1-x^3 & x^4-2x & -x^5+3x^2 \\ -x^5+3x^2 & x^6-4x^3+1 & -x^7+5x^4-3x \end{bmatrix} = [P_{-4}(x) \ P_{-5}(x) \ P_{-6}(x)] \\
&= [x^5-2x^2-x^5+3x^2 \quad -x^6+3x^3+x^6-4x^3+1 \quad x^7-4x^4+x-x^7+5x^4-3x] \\
&= [P_{-4}(x) \ P_{-5}(x) \ P_{-6}(x)] \\
&= [x^2 \ x^3+1 \ x^4-2x] = [P_{-4}(x) \ P_{-5}(x) \ P_{-6}(x)]
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P_{-6}(x) = x^4 - 2x$

□

3.3 ผลการศึกษาบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Relations of Order 3)

3.3.1 ผลการศึกษาบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Relations of Order 3) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวก

ในหัวข้อนี้จะเป็นการสร้าง บางลำดับ ที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม โดยการกำหนดลำดับของตัวเลขที่เป็นไปตามสมการเวียนเกิดที่มีพจน์สามตัวก่อนหน้า

บทนิยาม 3.3.1.1 บางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Relations of Order 3) S_n สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ นิยามดังนี้

$$S_n = aS_{n-1} + bS_{n-2} + cS_{n-3} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ และ } c \neq 0$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $S_0 = S_1 = S_2 = 1$

ใช้ค่าตั้งต้นและสมการเวียนเกิดเพื่อคำนวณค่าของ S_n สำหรับ $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
\text{แทนค่า } n = 3 ; \quad S_3 &= aS_2 + bS_1 + cS_0 \\
&= a(1) + b(1) + c(1) \\
&= a + b + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{แทนค่า } n = 4 ; \quad S_4 &= aS_3 + bS_2 + cS_1 \\
 &= a(a+b+c) + b(1) + c(1) \\
 &= a^2 + ab + ac + b + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{แทนค่า } n = 5 ; \quad S_5 &= aS_4 + bS_3 + cS_2 \\
 &= a(a^2 + ab + ac + b + c) + b(a+b+c) + c(1) \\
 &= a^3 + a^2b + a^2c + ab + ac + ab + b^2 + bc + c \\
 &= a^3 + a^2b + a^2c + 2ab + ac + b^2 + bc + c
 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับ S_n คือ

$$1, 1, 1, a+b+c, a^2+ab+ac+b+c, a^3+a^2b+a^2c+2ab+ac+b^2+bc+c, \dots$$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้นจะได้ลำดับบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม แสดงในตารางที่ 8 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 8 n พจน์แรกของบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม

n	S_n
0	1
1	1
2	1
3	$a+b+c$
4	$a^2+ab+ac+b+c$
5	$a^3+a^2b+a^2c+2ab+ac+b^2+bc+c$
$\vdots$	$\vdots$

ข้อสังเกต 3.3.1.2 จาก บทนิยาม 3.3.1.1 จะได้ว่า เมื่อแทนค่าคงตัวด้วย $a=0, b=1$ และ $c=1$ ในลำดับ S_n จะได้ว่า $S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $S_0 = S_1 = S_2 = 1$ เป็นลำดับ ฟาโบนานชี

ทฤษฎีบท 3.3.1.3 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (The generator matrix) ของบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Recurrence Relations of Oder 3) สำหรับ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$vQ^n = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = [S_{n+2} \ S_{n+1} \ S_n]$$

โดยที่ v แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q แทนเมทริกซ์ก่อกำเนิด

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$

กำหนด $P(n)$ แทนข้อความ

$$vQ^n = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = [S_{n+2} \ S_{n+1} \ S_n] \quad (7)$$

1) สำหรับ $n=1$ จะได้ว่า

$$P(1) \text{ คือ } vQ^1 = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} = [a+b+c \ S_2 \ S_1] = [S_3 \ S_2 \ S_1] \text{ เป็นจริง}$$

2) ให้ $n=k, k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$vQ^k = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = [S_{k+2} \ S_{k+1} \ S_k]$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ให้ $n=k+1, k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} vQ^{k+1} &= [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \\ &= [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= [S_{k+2} \ S_{k+1} \ S_k] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [aS_{k+2} + bS_{k+1} + cS_k \quad S_{k+2} \quad S_{k+1}] \\
&= [S_{k+3} \quad S_{k+2} \quad S_{k+1}]
\end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น (7) เป็นจริงสำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

□

ตัวอย่าง 3.3.1.4 จงหาพจน์ที่ 4 ของลำดับ S_4

วิธีทำ เนื่องจาก $vQ^n = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = [S_{n+2} \quad S_{n+1} \quad S_n]$

แทนค่า $n=2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
vQ^2 &= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = [S_{2+2} \quad S_{2+1} \quad S_2] \\
&= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} = [S_4 \quad S_3 \quad S_2] \\
&= [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} a^2+b & a & 1 \\ ab+c & b & 0 \\ ac & c & 0 \end{bmatrix} = [S_4 \quad S_3 \quad S_2] \\
&= [a^2+b+ab+c+ac \quad a+b+c \quad 1] = [S_4 \quad S_3 \quad S_2]
\end{aligned}$$

ดังนั้น $S_4 = a^2+b+ab+c+ac$

□

ตัวอย่าง 3.3.1.5 จงหาพจน์ที่ 4 ของลำดับ S_4 โดยกำหนดให้ $a=1, b=1$ และ $c=2$

วิธีทำ จาก บทนิยาม 3.3.1.1 แทนค่า $a=1, b=1$ และ $c=2$ จะได้ว่าลำดับ S_n คือ

1, 1, 1, 4, 7, 13, ...

เนื่องจาก $vQ^n = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = [S_{n+2} \quad S_{n+1} \quad S_n]$

แทนค่า $a=1, b=1, c=2$ และ $n=2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 vQ^2 &= [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = [S_{2+2} \ S_{2+1} \ S_2] \\
 &= [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [S_4 \ S_3 \ S_2] \\
 &= [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = [S_4 \ S_3 \ S_2] \\
 &= [7 \ 4 \ 1] = [S_4 \ S_3 \ S_2]
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_4 = 7$

□

3.3.2 ผลการศึกษาบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Relations of Order 3) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

ในส่วนนี้จะเป็นการศึกษาบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ โดยเริ่มจากการศึกษาบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกแล้วขยายการศึกษาไปยังบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

จาก **บทนิยาม 3.3.1.1** บางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Relations of Order 3) S_n สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ นิยามดังนี้

$$S_n = aS_{n-1} + bS_{n-2} + cS_{n-3} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ และ } c \neq 0 \quad (8)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $S_0 = S_1 = S_2 = 1$

$$\text{ให้ } n-3 = m \quad (9)$$

$$\text{จะได้ว่า } n = m+3 \quad (10)$$

แทนค่า (9), (10) ใน (8) จะได้ว่า $cS_m = S_{m+3} - aS_{m+2} - bS_{m+1}$, สำหรับจำนวนเต็ม $m < 0$

$$S_m = \frac{S_{m+3} - aS_{m+2} - bS_{m+1}}{c}, \text{ สำหรับจำนวนเต็ม } m < 0$$

$$S_m = \frac{1}{c}S_{m+3} - \frac{a}{c}S_{m+2} - \frac{b}{c}S_{m+1}, \quad \text{สำหรับจำนวนเต็ม } m < 0$$

บทนิยาม 3.3.2.1 บางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Relations of Order 3) S_m สำหรับจำนวนเต็ม $m < 0$ นิยามดังนี้

$$S_m = \frac{1}{c}S_{m+3} - \frac{a}{c}S_{m+2} - \frac{b}{c}S_{m+1} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ และ } c \neq 0$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $S_0 = S_1 = S_2 = 1$

ใช้ค่าตั้งต้นและสมการเวียนเกิดเพื่อคำนวณค่าของ S_m สำหรับ $m < 0$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } m = -1 ; \quad S_{-1} &= \frac{1}{c}S_{-1+3} - \frac{a}{c}S_{-1+2} - \frac{b}{c}S_{-1+1} \\ &= \frac{1}{c}S_2 - \frac{a}{c}S_1 - \frac{b}{c}S_0 \\ &= \frac{1}{c}(1) - \frac{a}{c}(1) - \frac{b}{c}(1) \\ &= \frac{1}{c} - \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \\ S_{-1} &= \frac{1-a-b}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } m = -2 ; \quad S_{-2} &= \frac{1}{c}S_{-2+3} - \frac{a}{c}S_{-2+2} - \frac{b}{c}S_{-2+1} \\ &= \frac{1}{c}S_1 - \frac{a}{c}S_0 - \frac{b}{c}S_{-1} \\ &= \frac{1}{c}(1) - \frac{a}{c}(1) - \frac{b}{c}\left(\frac{1-a-b}{c}\right) \\ &= \frac{1}{c} - \frac{a}{c} - \frac{b}{c^2} + \frac{ab}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \\ S_{-2} &= \left(\frac{1-a}{c}\right) - \left(\frac{b-ab-b^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } m = -3 ; \quad S_{-3} &= \frac{1}{c}S_{-3+3} - \frac{a}{c}S_{-3+2} - \frac{b}{c}S_{-3+1} \\ &= \frac{1}{c}S_0 - \frac{a}{c}S_{-1} - \frac{b}{c}S_{-2} \\ &= \frac{1}{c}(1) - \frac{a}{c}\left(\frac{1-a-b}{c}\right) - \frac{b}{c}\left(\frac{1-a}{c} - \frac{b-ab-b^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c} - \frac{a}{c} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{ab}{c^2} - \frac{b}{c^2} + \frac{ab}{c^2} + \frac{b^2}{c^3} - \frac{ab^2}{c^3} - \frac{b^3}{c^3}$$

$$S_{-3} = \left(\frac{1-a}{c} \right) + \left(\frac{a^2 + 2ab - b}{c^2} \right) - \left(\frac{b^3 - b^2 + ab^2}{c^3} \right)$$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับ S_m คือ

$$\dots, \left(\frac{1-a}{c} \right) + \left(\frac{a^2 + 2ab - b}{c^2} \right) - \left(\frac{b^3 - b^2 + ab^2}{c^3} \right), \left(\frac{1-a}{c} \right) - \left(\frac{b - ab - b^2}{c^2} \right), \frac{1-a-b}{c}$$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้นจะได้ลำดับบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ แสดงในตารางที่ 9 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 9 m พจน์แรกของบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

m	S_m
$\vdots$	$\vdots$
-3	$\left(\frac{1-a}{c} \right) + \left(\frac{a^2 + 2ab - b}{c^2} \right) - \left(\frac{b^3 - b^2 + ab^2}{c^3} \right)$
-2	$\left(\frac{1-a}{c} \right) - \left(\frac{b - ab - b^2}{c^2} \right)$
-1	$\frac{1-a-b}{c}$

ทฤษฎีบท 3.3.2.2 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (The generator matrix) ของบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Recurrence Relations of Oder 3) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบสำหรับ $m > 0$ และ $m \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$vQ^{-m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} S_{-m+2} & S_{-m+1} & S_{-m} \end{bmatrix}$$

โดยที่ v แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q^{-1} แทนตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์ก่อกำเนิด Q

พิสูจน์ จาก $Q = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะตรวจสอบว่า Q มีตัวผกผันหรือไม่ โดยทำตามขั้นตอนดังนี้

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2' = r_3 \\ r_3' = r_2 \end{array}$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1' = r_2 \\ r_2' = r_1 \end{array}$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/c \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] r_1' = \frac{1}{c}r_1$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -b/c \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2' = -ar_1 + r_2 \\ r_3' = -br_1 + r_3 \end{array}$$

$$\text{จะได้ว่า } Q_3 \sim I_3 \text{ ดังนั้น } Q \text{ หาตัวผกผันได้ และจะได้ว่า } Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \end{bmatrix}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $m \geq 1$ และ $m \in \mathbb{N}$

กำหนด $P(m)$ แทนข้อความ

$$vQ^{-m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} S_{-m+2} & S_{-m+1} & S_{-m} \end{bmatrix} \quad (11)$$

1) สำหรับ $m=1$ จะได้ว่า

$$P(1) \text{ คือ } vQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1-a-b}{c} \end{bmatrix} = [S_1 \quad S_0 \quad S_{-1}] \quad \text{เป็นจริง}
\end{aligned}$$

2) ให้ $m=k$, $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$vQ^{-k} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-k} = [S_{-k+2} \quad S_{-k+1} \quad S_{-k}]$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ให้ $m=k+1$, $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
vQ^{-(k+1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-(k+1)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-k} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= [S_{-k+2} \quad S_{-k+1} \quad S_{-k}] \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= [S_{-k+2} \quad S_{-k+1} \quad S_{-k}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} S_{-k+1} & S_{-k} & \frac{1}{c}S_{-k+2} - \frac{a}{c}S_{-k+1} - \frac{b}{c}S_{-k} \end{bmatrix} \\
&= [S_{-k+1} \quad S_{-k} \quad S_{-k-1}]
\end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น (11) เป็นจริงสำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$ □

ตัวอย่าง 3.3.2.3 จงหาพจน์ที่ -3 ของลำดับ S_{-3}

วิธีทำ เนื่องจาก $vQ^{-m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} S_{-m+2} & S_{-m+1} & S_{-m} \end{bmatrix}$

แทนค่า $m=3$ จะได้ว่า

$$vQ^{-3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-3} = \begin{bmatrix} S_{-3+2} & S_{-3+1} & S_{-3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ } v(Q^{-1})^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} S_{-3+2} & S_{-3+1} & S_{-3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1} & S_{-2} & S_{-3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a/c \\ 0 & 1 & -b/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/c & -b/c^2 \\ 0 & -a/c & 1/c + ab/c^2 \\ 1 & -b/c & -a/c + b^2/c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1} & S_{-2} & S_{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/c & -b/c^2 & -a/c^2 + b^2/c^3 \\ -a/c & 1/c + ab/c^2 & -b/c^2 + a^2/c^2 - ab^2/c^3 \\ -b/c & -a/c + b^2/c^2 & 1/c + ab/c^2 + ab^2/c^2 - b^3/c^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1} & S_{-2} & S_{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{c} - \frac{a}{c} - \frac{b}{c} \quad -\frac{b}{c^2} + \frac{1}{c} + \frac{ab}{c^2} - \frac{a}{c} + \frac{b^2}{c^2} \quad -\frac{a}{c^2} + \frac{b^2}{c^3} - \frac{b}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} - \frac{ab^2}{c^3} + \frac{1}{c} + \frac{ab}{c^2} + \frac{ab}{c^2} - \frac{b^3}{c^3} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} S_{-1} & S_{-2} & S_{-3} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1-a-b}{c} \quad \left(\frac{1-a}{c} \right) - \left(\frac{b-ab-b^2}{c^2} \right) \quad \left(\frac{1-a}{c} \right) + \left(\frac{a^2+2ab-b}{c^2} \right) - \left(\frac{b^3-b^2+ab^2}{c^3} \right) \right]$$

$$= \begin{bmatrix} S_{-1} & S_{-2} & S_{-3} \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } S_{-3} = \left(\frac{1-a}{c} \right) + \left(\frac{a^2+2ab-b}{c^2} \right) - \left(\frac{b^3-b^2+ab^2}{c^3} \right)$$

□

ตัวอย่าง 3.3.2.4 จงหาพจน์ที่ -3 ของลำดับ S_{-3} โดยกำหนดให้ $a=1, b=1$ และ $c=1$

วิธีทำ จาก บทนิยาม 3.3.2.1 แทนค่า $a=1, b=1$ และ $c=1$ จะได้ว่าลำดับ S_m คือ $\dots, 1, 1, -1$

$$\text{เนื่องจาก } vQ^{-m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} S_{-m+2} & S_{-m+1} & S_{-m} \end{bmatrix}$$

แทนค่า $a=1, b=1, c=1$ และ $m=3$ จะได้ว่า

$$vQ^{-3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-3} = \begin{bmatrix} S_{-3+2} & S_{-3+1} & S_{-3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ } v(Q^{-1})^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} S_{-3+2} & S_{-3+1} & S_{-3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1} & S_{-2} & S_{-3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1} & S_{-2} & S_{-3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1} & S_{-2} & S_{-3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1} & S_{-2} & S_{-3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $S_{-3} = 1$

□

3.4 ผลการศึกษาบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3)

3.4.1 ผลการศึกษาบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวก

ในหัวข้อนี้จะเป็นการสร้าง บางพหุนาม ที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม โดยการกำหนดลำดับของตัวเลขที่เป็นไปตามสมการเวียนเกิดที่มีพจน์สามตัวก่อนหน้า

บทนิยาม 3.4.1.1 บางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials

Defined by Recurrence Relations of Order 3) X_n สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ นิยามดังนี้

$$X_n = a(x)X_{n-1} + b(x)X_{n-2} + cX_{n-3} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ และ } c \neq 0$$

โดยที่ $a(x)$, $b(x)$ เป็นสัมประสิทธิ์พหุนาม x และ $c \neq 0$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $X_0 = 1, X_1 = x, X_2 = x^2$

ใช้ค่าตั้งต้นและสมการเวียนเกิดเพื่อคำนวณค่าของ X_n สำหรับ $n \geq 3$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } n=3 ; \quad X_3 &= a(x)X_{3-1} + b(x)X_{3-2} + cX_{3-3} \\ &= a(x)X_2 + b(x)X_1 + cX_0 \\ &= a(x)x^2 + b(x)x + c(1) \end{aligned}$$

$$X_3 = a(x)x^2 + b(x)x + c$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } n=4 ; \quad X_4 &= a(x)X_{4-1} + b(x)X_{4-2} + cX_{4-3} \\ &= a(x)X_3 + b(x)X_2 + cX_1 \\ &= (a(x))((a(x))x^2 + (b(x))x + c) + b(x)x^2 + cx \\ &= (a(x))^2 x^2 + a(x)b(x)x + ca(x) + b(x)x^2 + cx \\ X_4 &= ((a(x))^2 + b(x))x^2 + ((ax)(bx) + c)x + ca(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } n=5 ; \quad X_5 &= a(x)X_{5-1} + b(x)X_{5-2} + cX_{5-3} \\ &= a(x)X_4 + b(x)X_3 + cX_2 \\ &= a(x)((a(x))x^2 + a(x)b(x) + ca(x) + b(x)x^2 + cx) \\ &\quad + b(x)(a(x)x^2 + b(x)x + c) + cx^2 \\ &= (a(x))^3 x^2 + (a(x))^2 b(x)x + c(a(x))^2 + a(x)b(x)x^2 \\ &\quad + ca(x)x + a(x)b(x)x^2 + (b(x))^2 x + cb(x) + cx^2 \\ X_5 &= ((a(x))^3 + 2a(x)b(x) + c)x^2 + ((a(x))^2 b(x) + ((bx))^2 + ca(x))x \\ &\quad + ((a(x))^2 + b(x))c \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับของพหุนาม X_n คือ

$$1, x, x^2, a(x)x^2 + b(x)x + c, \left((a(x))^2 + b(x)\right)x^2 + ((ax)(bx) + c)x + ca(x), \\ \left((a(x))^3 + 2a(x)b(x) + c\right)x^2 + \left((a(x))^2 b(x) + ((bx))^2 + ca(x)\right)x + \left((a(x))^2 + b(x)\right)c, \dots$$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้นจะได้ลำดับของบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม แสดงในตารางที่ 10 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 10 n พจน์แรกของบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม

n	X_n
0	1
1	X
2	X^2
3	$a(x)x^2 + b(x)x + c$
4	$\left((a(x))^2 + b(x)\right)x^2 + ((ax)(bx) + c)x + ca(x)$
5	$\left((a(x))^3 + 2a(x)b(x) + c\right)x^2 + \left((a(x))^2 b(x) + ((bx))^2 + ca(x)\right)x + \left((a(x))^2 + b(x)\right)c$
$\vdots$	$\vdots$

ทฤษฎีบท 3.4.1.2 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (The generator matrix) ของบางพหุนามที่นิยามโดย

ความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3)

สำหรับ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$rQ^n = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} X_{n+2} & X_{n+1} & X_n \end{bmatrix}$$

โดยที่ r แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q แทนเมทริกซ์ก่อกำเนิด

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$

กำหนด $P(n)$ แทนข้อความ

$$rQ^n = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} X_{n+2} & X_{n+1} & X_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

1) สำหรับ $n=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(1) \text{ คือ } Q^1 &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1+2} & X_{1+1} & X_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(x)x^2 + b(x)x + c & x^2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_3 & X_2 & X_1 \end{bmatrix} \quad \text{เป็นจริง} \end{aligned}$$

2) ให้ $n=k$, $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$Q^k = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} X_{k+2} & X_{k+1} & X_k \end{bmatrix}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ให้ $n=k+1$, $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} rQ^{k+1} &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_{k+2} & X_{k+1} & X_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(x)X_{k+2} + b(x)X_{k+1} + cX_k & X_{k+2} & X_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_{k+3} & X_{k+2} & X_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น (12) เป็นจริงสำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

□

ตัวอย่าง 3.4.1.3 จงหาพจน์ที่ 5 ของพหุนาม X_5

วิธีทำ เนื่องจาก $rQ^n = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} X_{n+2} & X_{n+1} & X_n \end{bmatrix}$

แทนค่า $n=3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} sQ^3 &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} X_{3+2} & X_{3+1} & X_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_5 & X_4 & X_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a(x))^2 + b(x) & a(x) & 1 \\ a(x)b(x) + c & b(x) & 0 \\ ca(x) & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_5 & X_4 & X_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a(x))^3 + a(x)b(x) + a(x)b(x) + c & (a(x))^2 + b(x) & a(x) \\ (a(x))^2 b(x) + (b(x))^2 + ca(x) & a(x)b(x) + c & b(x) \\ c(a(x))^2 + cb(x) & ca(x) & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_5 & X_4 & X_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \left((a(x))^3 + 2a(x)b(x) + c \right) x^2 + \left((a(x))^2 b(x) + (b(x))^2 + ca(x) \right) x + \left(a(x)^2 + b(x) \right) c \\ \left((a(x))^2 + b(x) \right) x^2 + (a(x)b(x) + c) x + ca(x) & a(x)x^2 + b(x)x + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_5 & X_4 & X_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$X_5 = \left((a(x))^3 + 2a(x)b(x) + c \right) x^2 + \left((a(x))^2 b(x) + (b(x))^2 + ca(x) \right) x + \left(a(x)^2 + b(x) \right) c$$

□

ตัวอย่าง 3.4.1.4 จงหาพจน์ที่ 5 ของพหุนาม X_5 โดยกำหนดให้ $a(x)=1$, $b(x)=x$ และ $c=1$

วิธีทำ จาก บทนิยาม 3.4.1.1 แทนค่า $a(x)=1$, $b(x)=x$ และ $c=1$ จะได้ว่าลำดับ X_n คือ

$$1, x, x^2, 2x^2+1, x^3+2x^2+x+1, 3x^3+3x^2+2x+1, \dots$$

เนื่องจาก
$$rQ^n = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} X_{n+2} & X_{n+1} & X_n \end{bmatrix}$$

แทนค่า $a(x)=1$, $b(x)=x$, $c=1$ และ $n=3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} sQ^3 &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} X_{3+2} & X_{3+1} & X_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_5 & X_4 & X_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ x+1 & x & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_5 & X_4 & X_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x+2 & 1+x & 1 \\ x^2+x+1 & x+1 & x \\ x+1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_5 & X_4 & X_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3x^3+3x^2+2x+1 & x^3+2x^2+x+1 & 2x^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_5 & X_4 & X_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $X_5 = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ □

3.4.2 ผลการศึกษาบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

ในส่วนนี้จะเป็นการศึกษาบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ โดยเริ่มจากการศึกษาบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกแล้วขยายการศึกษาไปยังบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

จาก **บทนิยาม 3.4.1.1** บางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3) X_n สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ นิยามดังนี้

$$X_n = a(x)X_{n-1} + b(x)X_{n-2} + cX_{n-3} \quad (13)$$

โดยที่ $a(x)$, $b(x)$ เป็นสัมประสิทธิ์พหุนามของ x และ $c \neq 0$

$$\text{โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น } X_0 = 1, X_1 = x, X_2 = x^2 \quad (14)$$

$$\text{ให้ } n-3 = m$$

$$\text{จะได้ว่า } n = m+3 \quad (15)$$

แทนค่า (14), (15) ใน (13) จะได้ว่า

$$X_{m+3} = a(x)X_{m+2} + b(x)X_{m+1} + cX_m, \quad \text{สำหรับจำนวนเต็ม } m < 0$$

$$cX_m = X_{m+3} - a(x)X_{m+2} - b(x)X_{m+1}, \quad \text{สำหรับจำนวนเต็ม } m < 0$$

$$cX_m = \frac{X_{m+3} - a(x)X_{m+2} - b(x)X_{m+1}}{c}, \quad \text{สำหรับจำนวนเต็ม } m < 0$$

$$X_m = \frac{1}{c}X_{m+3} - \frac{a(x)}{c}X_{m+2} - \frac{b(x)}{c}X_{m+1}, \quad \text{สำหรับจำนวนเต็ม } m < 0$$

บทนิยาม 3.4.2.1 บางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3) X_m สำหรับจำนวนเต็ม $m < 0$ นิยามดังนี้

$$X_m = \frac{1}{c}X_{m+3} - \frac{a(x)}{c}X_{m+2} - \frac{b(x)}{c}X_{m+1}$$

โดยที่ $a(x)$, $b(x)$ เป็นสัมประสิทธิ์พหุนาม x และ $c \neq 0$

$$\text{โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น } X_0 = 1, X_1 = x, X_2 = x^2$$

ใช้ค่าตั้งต้นและสมการเวียนเกิดเพื่อคำนวณค่าของ X_m สำหรับ $m < 0$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } m = -1; \quad X_{-1} &= \frac{1}{c}X_{-1+3} - \frac{a(x)}{c}X_{-1+2} - \frac{b(x)}{c}X_{-1+1} \\ &= \frac{1}{c}X_2 - \frac{a(x)}{c}X_1 - \frac{b(x)}{c}X_0 \\ &= \frac{x^2}{c} - \frac{a(x)}{c}x - \frac{b(x)}{c}(1) \end{aligned}$$

$$X_{-1} = \frac{x^2 - a(x)x - b(x)}{c}$$

แทนค่า $m = -2$;

$$\begin{aligned} X_{-2} &= \frac{1}{c} X_{-2+3} - \frac{a(x)}{c} X_{-2+2} - \frac{b(x)}{c} X_{-2+1} \\ &= \frac{1}{c} X_1 - \frac{a(x)}{c} X_0 - \frac{b(x)}{c} X_{-1} \\ &= \frac{1}{c} x - \frac{a(x)}{c} - \frac{b(x)}{c} \left(\frac{x^2}{c} - \frac{a(x)x}{c} - \frac{b(x)}{c} \right) \\ &= \frac{1}{c} x - \frac{a(x)}{c} - \frac{b(x)x^2}{c^2} + \frac{a(x)b(x)x}{c^2} + \frac{(b(x))^2}{c^2} \\ X_{-2} &= \left(\frac{x - a(x)}{c} \right) - \left(\frac{b(x)x^2 - a(x)b(x)x - (b(x))^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

แทนค่า $m = -3$;

$$\begin{aligned} X_{-3} &= \frac{1}{c} X_{-3+3} - \frac{a(x)}{c} X_{-3+2} - \frac{b(x)}{c} X_{-3+1} \\ &= \frac{1}{c} X_0 - \frac{a(x)}{c} X_{-1} - \frac{b(x)}{c} X_{-2} \\ &= \frac{1}{c} (1) - \frac{a(x)}{c} \left(\frac{x^2}{c} - \frac{a(x)x}{c} - \frac{b(x)}{c} \right) \\ &\quad - \frac{b(x)}{c} \left(\frac{1}{c} x - \frac{a(x)}{c} - \frac{b(x)x^2}{c^2} + \frac{a(x)b(x)x}{c^2} + \frac{(b(x))^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{1}{c} - \frac{a(x)x^2}{c^2} + \frac{(a(x))^2 x}{c^2} + \frac{a(x)b(x)}{c^2} - \frac{b(x)x}{c^2} + \frac{a(x)b(x)}{c^2} \\ &\quad + \frac{(b(x))^2 x^2}{c^3} - \frac{a(x)(b(x))^2 x}{c^3} - \frac{(b(x))^3}{c^3} \\ X_{-3} &= \frac{1}{c} - \left(\frac{a(x)x^2 - (a(x))^2 x - 2a(x)b(x) + b(x)x}{c^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{(b(x))^2 x^2 - a(x)(b(x))^2 x - (b(x))^3}{c^3} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับของพหุนาม X_m คือ

$$\dots, \frac{1}{c} - \left(\frac{a(x)x^2 - (a(x))^2 x - 2a(x)b(x) + b(x)x}{c^2} \right) + \left(\frac{(b(x))^2 x^2 - a(x)(b(x))^2 x - (b(x))^3}{c^3} \right),$$

$$\left(\frac{x - a(x)}{c} \right) - \left(\frac{b(x)x^2 - a(x)b(x)x - (b(x))^2}{c^2} \right), \frac{x^2 - a(x)x - b(x)}{c}$$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้นจะได้ลำดับของบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ แสดงในตารางที่ 11 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 11 m พจน์แรกของบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสามที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ

m	X_m
$\vdots$	$\vdots$
-3	$\frac{1}{c} - \left(\frac{a(x)x^2 - (a(x))^2 x - 2a(x)b(x) + b(x)x}{c^2} \right) + \left(\frac{(b(x))^2 x^2 - a(x)(b(x))^2 x - (b(x))^3}{c^3} \right)$
-2	$\left(\frac{x - a(x)}{c} \right) - \left(\frac{b(x)x^2 - a(x)b(x)x - (b(x))^2}{c^2} \right)$
-1	$\frac{x^2 - a(x)x - b(x)}{c}$

ทฤษฎีบท 3.4.2.2 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (The generator matrix) ของบางพหุนามที่นิยามโดย

ความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3)

ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบสำหรับ $m > 0$ และ $m \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$rQ^{-m} = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} X_{-m+2} & X_{-m+1} & X_{-m} \end{bmatrix}$$

โดยที่ r แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q^{-1} แทนตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์

ก่อกำเนิด Q

พิสูจน์ จาก $Q = \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะตรวจสอบว่า Q มีตัวผกผันหรือไม่ โดยทำตามขั้นตอนดังนี้

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} a(x) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} a(x) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b(x) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2' = r_3 \\ r_3' = r_2 \end{array}$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a(x) & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1' = r_2 \\ r_2' = r_1 \end{array}$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/c \\ a(x) & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b(x) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] r_1' = \frac{1}{c}r_1$$

$$[Q|I_3] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -a(x)/c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -b(x)/c \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2' = -a(x)r_1 + r_2 \\ r_3' = -b(x)r_1 + r_3 \end{array}$$

จะได้ว่า $Q_3 \sim I_3$ ดังนั้น Q หาตัวผกผันได้ และจะได้ว่า $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a(x)/c \\ 0 & 1 & -b(x)/c \end{bmatrix}$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ $m \geq 1$ และ $m \in \mathbb{N}$

กำหนด $P(m)$ แทนข้อความ

$$rQ^{-m} = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} X_{-m+2} & X_{-m+1} & X_{-m} \end{bmatrix} \quad (16)$$

1) สำหรับ $m=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 P(1) \text{ คือ } rQ^{-1} &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a(x)/c \\ 0 & 1 & -b(x)/c \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} x & 1 & \frac{x^2 - a(x) - b(x)}{c} \end{bmatrix} = [X_1 \quad X_0 \quad X_{-1}] \quad \text{เป็นจริง}
 \end{aligned}$$

2) ให้ $m=k$, $k \in \mathbb{N}$ สมมติ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$rQ^{-k} = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-k} = [X_{-k+2} \quad X_{-k+1} \quad X_{-k}]$$

ต่อไปจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ให้ $m=k+1$, $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 rQ^{-(k+1)} &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-(k+1)} \\
 &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-k} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= [X_{-k+2} \quad X_{-k+1} \quad X_{-k}] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a(x)/c \\ 0 & 1 & -b(x)/c \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} X_{-k+1} & X_{-k} & \frac{1}{c}X_{-k+2} - \frac{a(x)}{c}X_{-k+1} - \frac{b(x)}{c}X_{-k} \end{bmatrix} \\
 &= [X_{-k+1} \quad X_{-k} \quad X_{-k-1}]
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น (16) เป็นจริงสำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

□

ตัวอย่าง 3.4.2.3 จงหาพจน์ที่ -2 ของลำดับ X_{-2}

วิธีทำ เนื่องจาก $rQ^{-m} = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} X_{-m+2} & X_{-m+1} & X_{-m} \end{bmatrix}$

แทนค่า $m=2$ จะได้ว่า

$$rQ^{-2} = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-2} = \begin{bmatrix} X_{-2+2} & X_{-2+1} & X_{-2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือ } r(Q^{-1})^2 &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a(x)/c \\ 0 & 1 & -b(x)/c \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} X_{-2+2} & X_{-2+1} & X_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a(x)/c \\ 0 & 1 & -b(x)/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 1 & 0 & -a(x)/c \\ 0 & 1 & -b(x)/c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 & X_{-1} & X_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/c & -b(x)/c^2 \\ 0 & -a(x)/c & 1/c + a(x)b(x)/c^2 \\ 1 & -b(x)/c & -a(x)/c + (b(x))^2/c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 & X_{-1} & X_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{x^2}{c} - \frac{a(x)x}{c} - \frac{b(x)}{c} & \frac{-b(x)x^2}{c^2} + \frac{x}{c} + \frac{a(x)b(x)x}{c^2} - \frac{a(x)}{c} + \frac{(b(x))^2}{c^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 & X_{-1} & X_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{x^2 - a(x)x - b(x)}{c} & \left(\frac{x - a(x)}{c} \right) - \left(\frac{b(x)x^2 - a(x)b(x)x - (b(x))^2}{c^2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 & X_{-1} & X_{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $X_{-2} = \left(\frac{x - a(x)}{c} \right) - \left(\frac{b(x)x^2 - a(x)b(x)x - (b(x))^2}{c^2} \right)$ □

ตัวอย่าง 3.4.2.4 จงหาพจน์ที่ -2 ของลำดับ X_{-2} โดยกำหนดให้ $a(x)=1$, $b(x)=x$ และ $c=1$

วิธีทำ จาก บทนิยาม 3.4.2.1 แทนค่า $a(x)=1$, $b(x)=x$ และ $c=1$ จะได้ว่าลำดับ X_m คือ

$$\dots, x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1, -x^3 + 2x^2 + x - 1, x^2 - 2x$$

$$\text{เนื่องจาก } rQ^{-m} = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} X_{-m+2} & X_{-m+1} & X_{-m} \end{bmatrix}$$

แทนค่า $a(x)=1$, $b(x)=x$, $c=1$ และ $m=2$ จะได้ว่า

$$rQ^{-2} = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-2} = \begin{bmatrix} X_{-2+2} & X_{-2+1} & X_{-2} \end{bmatrix}$$

$$\text{หรือ } r(Q^{-1})^2 = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} X_{-2+2} & X_{-2+1} & X_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 & X_{-1} & X_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -x \\ 0 & -1 & 1+x \\ 1 & -x & -1+x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 & X_{-1} & X_{-2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x^2 - 2x & -x^3 + 2x^2 + x - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 & X_{-1} & X_{-2} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $X_{-2} = -x^3 + 2x^2 + x - 1$

□

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา

การค้นคว้าอิสระนี้ ได้มุ่งเน้นการวิเคราะห์และพัฒนา เมทริกซ์ก่อกำเนิด (Generator Matrix) ของลำดับและพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม โดยได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

- 1) การสร้างและศึกษาคุณสมบัติของเมทริกซ์ก่อกำเนิด
- 2) ได้ค้นพบเมทริกซ์ก่อกำเนิดของ ลำดับพาโดแวน (Padovan sequence) และ พหุนามพาโดแวน (Padovan polynomials) ทั้งในกรณีที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ
- 3) เมทริกซ์ที่พัฒนาขึ้นสามารถใช้เป็นเครื่องมือในการคำนวณพจน์ที่ n ของลำดับพาโดแวนและพหุนามพาโดแวนได้อย่างเป็นระบบ
- 4) การขยายแนวคิดไปสู่ลำดับและพหุนามอื่น ๆ โดยได้นำแนวทาง เมทริกซ์ก่อกำเนิด ไปใช้กับลำดับและพหุนามอื่นที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม ทั้งในกรณีที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ

ทฤษฎีบท 4.1 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (The generator matrix) ของลำดับพาโดแวน (Padovan sequence)

สำหรับ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$sQ^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+1} & P_n \end{bmatrix}$$

โดยที่ s แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q แทนเมทริกซ์ก่อกำเนิด

ทฤษฎีบท 4.2 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของลำดับพาโดแวน (Padovan sequence)

ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ โดยที่ $m > 0$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$sQ^{-m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} P_{-m+2} & P_{-m+1} & P_{-m} \end{bmatrix}$$

โดยที่ s แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q^{-1} แทนตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์ก่อกำเนิด Q

ทฤษฎีบท 4.3 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของพหุนามพาโดแวน (Padovan polynomials) สำหรับ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$uQ^n = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+3}(x) & P_{n+2}(x) & P_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

โดยที่ u แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q แทนเมทริกซ์ก่อกำเนิด

บทนิยาม 4.4 พหุนามพาโดแวน (Padovan sequence) P_m สำหรับจำนวนเต็ม $m \leq 0$

นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด ดังนี้

$$P_m(x) = P_{m+3}(x) - xP_{m+1}(x), \text{ สำหรับจำนวนเต็ม } m \leq 0$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $P_1(x) = 1, P_2(x) = 0, P_3(x) = x$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับพหุนามพาโดแวน P_m คือ

$$\dots, -x^5 + 3x^2, x^4 - 2x, 1 - x^3, -x^2, -x, 1, 0, 0$$

ทฤษฎีบท 4.5 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (generator matrix) ของพหุนามพาโดแวน (Padovan polynomials) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ โดยที่ $m > 0$ และ $m \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$uQ^{-m} = \begin{bmatrix} x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} P_{-m+3}(x) & P_{-m+2}(x) & P_{-m+1}(x) \end{bmatrix}$$

โดยที่ u แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q^{-1} แทนตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์ก่อกำเนิด Q

บทนิยาม 4.6 บางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Relations of Order 3) S_n สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ นิยามดังนี้

$$S_n = aS_{n-1} + bS_{n-2} + cS_{n-3} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ และ } c \neq 0$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $S_0 = S_1 = S_2 = 1$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับ S_n คือ

$$1, 1, 1, a+b+c, a^2+ab+ac+b+c, a^3+a^2b+a^2c+2ab+ac+b^2+bc+c, \dots$$

ข้อสังเกต 4.7 จาก บทนิยาม 3.3.1.1 จะได้ว่า เมื่อแทนค่าคงตัวด้วย $a=0, b=1$ และ $c=1$ ในลำดับ S_n จะได้ว่า $S_n = S_{n-2} + S_{n-3}$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $S_0 = S_1 = S_2 = 1$ เป็นลำดับพาโดแวน

ทฤษฎีบท 4.8 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (The generator matrix) ของบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Recurrence Relations of Oder 3) สำหรับ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$vQ^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_{n+2} & S_{n+1} & S_n \end{bmatrix}$$

โดยที่ v แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q แทนเมทริกซ์ก่อกำเนิด

บทนิยาม 4.9 บางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Relations of Order 3) S_m สำหรับจำนวนเต็ม $m < 0$ นิยามดังนี้

$$S_m = \frac{1}{c}S_{m+3} - \frac{a}{c}S_{m+2} - \frac{b}{c}S_{m+1} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ และ } c \neq 0$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $S_0 = S_1 = S_2 = 1$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับ S_m คือ

$$\dots, \left(\frac{1-a}{c} \right) + \left(\frac{a^2 + 2ab - b}{c^2} \right) - \left(\frac{b^3 - b^2 + ab^2}{c^3} \right), \left(\frac{1-a}{c} \right) - \left(\frac{b - ab - b^2}{c^2} \right), \frac{1-a-b}{c}$$

ทฤษฎีบท 4.10 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (The generator matrix) ของบางลำดับที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some sequences Defined by Recurrence Relations of Oder 3) ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบ สำหรับ $m > 0$ และ $m \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$vQ^{-m} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} S_{-m+2} & S_{-m+1} & S_{-m} \end{bmatrix}$$

โดยที่ v แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q^{-1} แทนตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์ก่อกำเนิด Q

บทนิยาม 4.11 บางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3) X_n สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ นิยามดังนี้

$$X_n = a(x)X_{n-1} + b(x)X_{n-2} + cX_{n-3} \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ และ } c \neq 0$$

โดยที่ $a(x)$, $b(x)$ เป็นสัมประสิทธิ์พหุนาม x และ $c \neq 0$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $X_0 = 1, X_1 = x, X_2 = x^2$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับของพหุนาม X_n คือ

$$1, x, x^2, a(x)x^2 + b(x)x + c, \left((a(x))^2 + b(x)\right)x^2 + ((ax)(bx) + c)x + ca(x), \\ \left((a(x))^3 + 2a(x)b(x) + c\right)x^2 + \left((a(x))^2 b(x) + (bx)^2 + ca(x)\right)x + \left((a(x))^2 + b(x)\right)c, \dots$$

ข้อสังเกต 4.12 สำหรับสมการเวียนเกิดลำดับที่ n สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $x-n$ จะต้องเป็นจำนวนจริงเท่านั้น เพื่อจะได้พหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม ถ้าเป็นสัมประสิทธิ์ที่เป็นพหุนาม x ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะไม่ใช่พหุนาม

ทฤษฎีบท 4.13 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (The generator matrix) ของบางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3) สำหรับ $n \geq 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$rQ^n = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} X_{n+2} & X_{n+1} & X_n \end{bmatrix}$$

โดยที่ r แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q แทนเมทริกซ์ก่อกำเนิด

บทนิยาม 4.14 บางพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3) X_m สำหรับจำนวนเต็ม $m < 0$ นิยามดังนี้

$$X_m = \frac{1}{c}X_{m+3} - \frac{a(x)}{c}X_{m+2} - \frac{b(x)}{c}X_{m+1}$$

โดยที่ $a(x)$, $b(x)$ เป็นสัมประสิทธิ์พหุนาม x และ $c \neq 0$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $X_0 = 1, X_1 = x, X_2 = x^2$

ดังนั้น จะได้ว่าลำดับของพหุนาม X_m คือ

$$\dots, \frac{1}{c} \left(\frac{a(x)x^2 - (a(x))^2 x - 2a(x)b(x) + b(x)x}{c^2} \right) + \left(\frac{(b(x))^2 x^2 - a(x)(b(x))^2 x - (b(x))^3}{c^3} \right),$$

$$\left(\frac{x - a(x)}{c} \right) - \left(\frac{b(x)x^2 - a(x)b(x)x - (b(x))^2}{c^2} \right), \frac{x^2 - a(x)x - b(x)}{c}$$

ทฤษฎีบท 4.14 เมทริกซ์ก่อกำเนิด (The generator matrix) ของบางพหุนามที่นิยามโดย

ความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม (Some Polynomials Defined by Recurrence Relations of Order 3)

ที่มีดัชนีเป็นจำนวนเต็มลบสำหรับ $m > 0$ และ $m \in \mathbb{N}$ ถูกกำหนดดังนี้

$$rQ^{-m} = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ b(x) & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-m} = \begin{bmatrix} X_{-m+2} & X_{-m+1} & X_{-m} \end{bmatrix}$$

โดยที่ r แทนเวกเตอร์ค่าเริ่มต้นของลำดับ และ Q^{-1} แทนตัวผกผัน (inverse) ของเมทริกซ์ก่อกำเนิด Q

การค้นคว้าอิสระนี้ช่วยเสริมสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับโครงสร้างของลำดับและพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสาม ผ่านเมทริกซ์ก่อกำเนิด ซึ่งเป็นแนวทางที่สามารถนำไปพัฒนาต่อในงานวิจัยอื่น ๆ ในอนาคตได้

เอกสารอ้างอิง

- [1] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เป็นหญิง โรจนกุล, วิชุดคณิตสำหรับครู, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, คณะวิทยาศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์.
- [2] มุลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษาในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนากรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์
ทฤษฎีจำนวน มุลนิธิ สอวน. 2548.
- [3] รหัสเชิงเส้น (linear codes) [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก
[http://old-book.ru.ac.th/e-book/c/CO334\(51\)/CO334-3.pdf](http://old-book.ru.ac.th/e-book/c/CO334(51)/CO334-3.pdf) (วันที่ค้นข้อมูล : 1 พฤษภาคม 2565).
- [4] รองศาสตราจารย์ ดร.วราวุฒ อินถาก้อน, พีชคณิตเชิงเส้นสำหรับครู, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, คณะวิทยาศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์.
- [5] สมการพหุนามตัวแปรเดียว [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก
<https://dspace.bru.ac.th/xmlui/bitstream/handle/123456789/6195/2>. (วันที่ค้นข้อมูล : 30 เมษายน 2565).
- [6] Asci, M., & Gurel, E. (2012). On bivariate complex Fibonacci and Lucas Polynomials. Conference on Mathematical Sciences ICM 2012, 11-14 March 2012.
- [7] Ayse Nalli, Pentti Haukkanen, On generalized Fibonacci and Lucas polynomials, Chaos, Solutions and Fractals 42, pp. 3179-3186, April 2009.
- [8] Generator matrix [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก
https://en.wikipedia.org/wiki/Generator_matrix (วันที่ค้นข้อมูล : 30 เมษายน 2565).
- [9] Li, H., & MacHenry, T. (2012). Permanent and Determinants, Weighted Isobaric Polynomials, and Integer Sequences. arXiv preprint arXiv: 1209.4591.
- [10] Padovan, R: Dom Hans van der Laan: Modern Primitive. Architectura & Natura Press, Amsterdam (1994).
- [11] Padovan's polynomials [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก
https://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_polynomials (วันที่ค้นข้อมูล : 1 เมษายน 2565).

- [12] Padovan's sequence [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก
https://en.wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence (วันที่ค้นข้อมูล : 1 เมษายน 2565).
- [13] Renata Passos Machado Vieira, Francisco Regis Vieira Alves & Paula Maria Machado Cruz
 Catarino, A Historical Analysis of The Padovan Sequence. International Journal of Trends
 in Mathematics Education Research, Vol.3, No.1, pp. 8-12, March 2020.
- [14] Renata Passos Machado Viera, Milenna Carolina dos Santos Manguiera, Francisco Regis
 Vieira Alves and Paula Machado Cruz Catarino, Perrin's bivariate and complex
 polynomials, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol. 2, No. 2, 70-78,
 2021.
- [15] Stewart, I: Tales of a neglected number. Sci. Am. 274, 102-103 (1996).

ประวัติผู้เขียน

- ชื่อ-นามสกุล** นางสาวอัญชิสา พรหมบุตร
- ประวัติการศึกษา** พ.ศ. 2560 วิทยาศาสตรบัณฑิตและการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยพะเยา
- ประสบการณ์** พ.ศ. 2562 - ปัจจุบัน ตำแหน่ง ครู โรงเรียนบ้านแปะ ตำบลบ้านแปะ อำเภอ
จอมทอง จังหวัดเชียงใหม่ สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษา
เชียงใหม่เขต 6