Teaching Mathematic Independent Study (TMIS) Repository

Volume 2025

https://math.science.cmu.ac.th/tmis.php

สมบัติบางประการของระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน

ณัฐดนัย ตุลาชม และ ปรียานุช โหนแหยม

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 50200

บทคัดย่อ

ให้ k เป็นจำนวนจริงบวก เราได้นิยามระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน ดังนี้

$$\alpha_{k,n+1} = k\beta_{k,n} + \gamma_{k,n-1}$$

$$\beta_{k,n+1} = k\left(\frac{\alpha_{k,n} + \gamma_{k,n}}{2}\right) + \beta_{k,n-1}$$

$$\gamma_{k,n+1} = k\beta_{k,n} + \alpha_{k,n-1}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 1$ โดยมีพจน์เริ่มต้น คือ $\alpha_{k,0} = 2a, \beta_{k,0} = b, \gamma_{k,0} = 2c, \alpha_{k,1} = 2d,$ $\beta_{k,1} = e$ และ $\gamma_{k,1} = 2f$ เมื่อ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริง ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราได้ศึกษาสมบัติบางประการของระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน

คำสำคัญ: ลำดับ k ฟีโบนัชชี, ลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน, ระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน

ผู้แต่งหลัก

อีเมลล์ : natdanai_tulachom@cmu.ac.th, preeyanuch.h@cmu.ac.th

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

โดยทั่วไปรู้จักกันดีว่าลำดับฟีโบนัชชี เป็นตัวอย่างที่สำคัญของลำดับความสัมพันธ์เวียนเกิด โดยลำดับฟีโบนัชชี มีชื่อเสียงมากสำหรับสมบัติที่น่ามหัศจรรย์ ซึ่งลำดับฟีโบนัชชี มีการปรากฏอยู่ในหลายปัญหาทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้เลโอนาร์โด ฟีโบนัชชี ยังเขียนหนังสือเกี่ยวกับตัวเลขซึ่งเขาได้ทำงานสำคัญในทฤษฎีจำนวนและการหาคำตอบของสมการ หนังสือของเขามีชื่อเสียงมากที่สุดคือ "Liber Abaci" ที่เผยแพร่ในปี ค.ศ. 1202 ซึ่งในส่วนที่สามของหนังสือเล่มนี้ เขาได้ตั้งคำถามเกี่ยวกับการเพิ่มขึ้นของจำนวนกระต่าย ซึ่งเป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์แรกสำหรับการเติบโตของประชากร จากการอธิบายของปัญหากระต่ายนี้ สามารถสร้างจำนวนฟีโบนัชชี ที่มีชื่อเสียงได้ดังนี้

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

ลำดับฟีโบนัชชี เป็นลำดับของจำนวนที่แต่ละจำนวนเกิดจากผลรวมของจำนวนก่อนหน้าสองตัว ซึ่งลำดับฟีโบนัชชีมีการนำไปใช้ในงานวิจัยที่มากมายทั้งในสาขาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์

ลำดับฟีโบนัชชี ลำดับลูคัส ลำดับเพลล์ ลำดับเพลล์-ลูคัส ลำดับจาคอบส์ทอล และลำดับจาคอบส์ทอล-ลูคัส เป็นตัวอย่างสำคัญของความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เกิดขึ้นโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสองซึ่งประกอบด้วย 2 อย่าง คือ เงื่อนไขเริ่มต้น และสมการความสัมพันธ์เวียนเกิด

ในปี ค.ศ. 2002 Kalman และ Mena [6] ได้นิยามลำดับที่เป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี ดังนี้

$$F_n = aF_{n-1} + bF_{n-2}$$

โดยที่ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก

ในปี ค.ศ. 2007 Falcon และ Plaza [3, 4] ได้นิยามลำดับ k ฟีโบนัชชี สำหรับทุกจำนวนจริงบวก k ดังนี้

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}$$

โดยที่ $F_{k,0} = 0$ และ $F_{k,1} = 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 1$

ถ้า $k = 1$ แล้วจะได้ว่าลำดับ k ฟีโบนัชชี เป็นลำดับฟีโบนัชชี นั่นคือ ลำดับ k ฟีโบนัชชีเป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี

ในปี ค.ศ. 2010 Bolat และ Kose [2] ได้ศึกษาเอกลักษณ์ใหม่และฟังก์ชันก่อกำเนิดของจำนวน k ฟีโบนัชชี พร้อมทั้งหาสูตรทั่วไปของลำดับ k ฟีโบนัชชี

นอกจากนี้ได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านได้นิยามลำดับที่มีรูปแบบเหมือนลำดับฟีโบนัชชี ตัวอย่างเช่น

ในปี ค.ศ. 2012 Gupta และคณะ [5] ได้นิยามลำดับที่เป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี ดังนี้

$$F_k = pF_{k-1} + qF_{k-2}$$

โดยที่ $F_0 = a$ และ $F_1 = b$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq 2$ เมื่อ p, q, a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก

ในปี ค.ศ. 2015 Suvarnamani และ Tatong [9] ได้ศึกษาลำดับ (p,q) ฟีโบนัชชีซึ่งมีนิยาม ดังนี้

$$F_{p,q,n} = pF_{p,q,n-1} + qF_{p,q,n-2}$$

โดยที่ $F_{p,q,0} = 0$ และ $F_{p,q,1} = 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็มบวก

ในปี ค.ศ. 2021 Panwar [8] ได้นิยามและศึกษาสมบัติบางประการของการวางนัยทั่วไปของลำดับ k ฟีโบนัชชี โดยมีนิยามดังนี้

$$F_{k,n} = pkF_{k,n-1} + qF_{k,n-2}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $F_{k,0} = a$ และ $F_{k,1} = b$ สำหรับ k เป็นจำนวนจริงบวก และ p, q, a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 2$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2022 Atanassov และคณะ [1] ได้นิยามระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือน พร้อมทั้งพิสูจน์สมบัติบางประการของระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือน โดยที่ระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือนมีนิยามดังนี้

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \beta_n + \gamma_{n-1}\\ \beta_{n+1} &= \frac{\alpha_n + \gamma_n}{2} + \beta_{n-1}\\ \gamma_{n+1} &= \beta_n + \alpha_{n-1}\end{aligned}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 1$ โดยมีพจน์เริ่มต้น คือ $\alpha_0 = 2a, \beta_0 = b, \gamma_0 = 2c, \alpha_1 = 2d, \beta_1 = e$ และ $\gamma_1 = 2f$ เมื่อ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริง

จากผลงานวิจัยข้างต้น ผู้ศึกษาจึงได้นิยามระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน ดังนี้

ให้ k เป็นจำนวนจริงบวก กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$\alpha_{k,n+1} = k\beta_{k,n} + \gamma_{k,n-1}$$

$$\beta_{k,n+1} = k\left(\frac{\alpha_{k,n} + \gamma_{k,n}}{2}\right) + \beta_{k,n-1}$$

$$\gamma_{k,n+1} = k\beta_{k,n} + \alpha_{k,n-1}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 1$ โดยมีพจน์เริ่มต้น คือ $\alpha_{k,0} = 2a, \beta_{k,0} = b, \gamma_{k,0} = 2c, \alpha_{k,1} = 2d,$ $\beta_{k,1} = e$ และ $\gamma_{k,1} = 2f$ เมื่อ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริง

จะเห็นว่าเมื่อแทน $k = 1$ จะได้ระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือน นั่นคือ ระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือนเป็นการวางนัยทั่วไปของระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือน

เป้าหมายของการค้นคว้าอิสระนี้เพื่อศึกษาสมบัติบางประการของระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือนและระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน ผู้ศึกษาคาดว่าจะช่วยเพิ่มพูนความเข้าใจในเชิงลึกเกี่ยวกับลำดับฟีโบนัชชีเสมือน $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\}$ และลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน $\{\alpha_{k,n}\},\{\beta_{k,n}\},\{\gamma_{k,n}\}$ ซึ่งเป็นลำดับที่มีโครงสร้างซับซ้อนและความน่าสนใจในเชิงทฤษฎี อาจนำผลลัพธ์ที่ได้ไปสู่การประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในอนาคต

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

2.1 ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci Sequence)

บทนิยาม 2.1.1 ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence) คือ ลำดับที่เกิดจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

โดยที่ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 2$

เราจะเรียกแต่ละพจน์ของลำดับฟีโบนัชชี $\{F_n\}$ ว่า **จำนวนฟีโบนัชชี (Fibonacci number)**

จากบทนิยาม 2.1.1 ได้ว่าลำดับฟีโบนัชชี $\{F_n\}$ คือ $0,1,1,2,3,5,8,13,\ldots$ เขียนลำดับได้ดังตารางต่อไปดังนี้

n	F_n
0	0
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 2.1 : ลำดับฟีโบนัชชี

ทฤษฎีบท 2.1.1 [7] สูตรของบิเนต์สำหรับลำดับฟีโบนัชชี $\{F_n\}$ (Binet's formula Fibonacci sequence) คือ

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \ge 0$

ตัวอย่าง 2.1.1

$$F_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\right\} = 5$$

$$F_{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}\right\} = 55$$

$$F_{13} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{13} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{13}\right\} = 233$$

ในปี ค.ศ. 2002 Kalman และ Mena [6] ได้นิยามลำดับที่เป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี ดังนี้

บทนิยาม 2.1.2 การวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี (generalized Fibonacci sequence) คือ ลำดับที่เกิดจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$F_n = aF_{n-1} + bF_{n-2}$$

โดยที่ $F_0 = 0$ และ $F_1 = 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \ge 2$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก

เขียนลำดับได้ดังตารางต่อไปนี้

n	F_n
0	0
1	1
2	a
3	$a^2 + b$
4	$a^3 + 2ab$

n	F_n
5	$a^4+3a^2b+b^2$
6	$a^5+4a^3b+3ab^2$
7	$a^6+5a^4b+6a^2b^2+b^3$
8	$a^7+6a^5b+10a^3b^2+4ab^3$
9	$a^8+7a^6b+15a^4b^2+10a^2b^3+b^4$
10	$a^9+8a^7b+21a^5b^2+20a^3b^3+5ab^4$
11	$a^{10}+9a^8b+28a^6b^2+35a^4b^3+15a^2b^4+b^5$
12	$a^{11}+10a^9b+36a^7b^2+56a^5b^3+35a^3b^4+6ab^5$
$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 2.2 : ลำดับที่เป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี

ตัวอย่าง 2.1.2

ให้ $a=2$ และ $b=3$ จากบทนิยาม 2.1.2 ได้ว่า

$$\{F_n\}=0,1,2,7,20,61,182,547,1640,4921,14762,44287,132860,\ldots$$

ในปี ค.ศ. 2007 Falcon และ Plaza [3, 4] ได้นิยามลำดับ k ฟีโบนัชชี สำหรับทุกจำนวนจริงบวก k ดังนี้

บทนิยาม 2.1.3 สำหรับจำนวนจริงบวก k **ลำดับ k ฟีโบนัชชี (k-Fibonacci sequence)** $\{F_{k,n}\}$ เป็นลำดับที่เกิดจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$F_{k,n}=kF_{k,n-1}+F_{k,n-2} \tag{2.4}$$

โดยที่ $F_{k,0}=0$ และ $F_{k,1}=1$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n\geq 2$

ลำดับ k ฟีโบนัชชีเขียนดังตารางต่อไปนี้

n	$F_{k,n}$
0	0
1	1
2	k
3	k^2+1

n	$F_{k,n}$
4	k^3+2k
5	k^4+3k^2+1
6	k^5+4k^3+3k
7	$k^6+5k^4+6k^2+1$
8	$k^7+6k^5+10k^3+4k$
9	$k^8+7k^6+15k^4+10k^2+1$
10	$k^9+8k^7+21k^5+20k^3+5k$
11	$k^{10}+9k^8+28k^6+35k^4+15k^2+1$
12	$k^{11}+10k^9+36k^7+56k^5+35k^3+6k$
$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 2.3 : ลำดับ k ฟีโบนัชชี

ตัวอย่าง 2.1.3 ให้ $k=2$ จากบทนิยาม 2.1.3 ได้ว่า

$$\{F_{2,n}\}=0,1,2,5,12,29,70,169,408,985,2378,5741,13860,\ldots$$

เขียนได้ดังตารางต่อไปนี้

n	$F_{2,n}$
0	0
1	1
2	2
3	5
4	12
5	29
6	70
7	169
8	408
9	985
10	2378

n	$F_{2,n}$
11	5741
12	13860

ตารางที่ 2.4 : ลำดับ k ฟีโบนัชชี เมื่อ $k=2$

จากสมการ (2.4) ถ้า $k=1$ แล้วจะได้ว่าลำดับ k ฟีโบนัชชี เป็นลำดับฟีโบนัชชี นั่นคือ ลำดับ k ฟีโบนัชชีเป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี นอกจากนี้ได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านได้นิยามลำดับที่มีรูปแบบคล้ายกับลำดับฟีโบนัชชี ตัวอย่างเช่น

ในปี ค.ศ. 2012 Gupta และคณะ [5] ได้นิยามลำดับที่เป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี ดังนี้

บทนิยาม 2.1.4 กำหนดลำดับที่เกิดจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$F_k = pF_{k-1} + qF_{k-2}$$

โดยที่ $F_0 = a$ และ $F_1 = b$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq 2$ เมื่อ p, q, a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก

เขียนลำดับได้ดังตารางต่อไปนี้

n	F_k
0	a
1	b
2	$pb+qa$
3	$p^2b+pqa+qb$
4	$p^3b+p^2qa+2pqb+q^2a$
5	$p^4b+p^3qa+3p^2qb+2pq^2a+q^2b$
$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 2.5 : ลำดับที่เป็นการวางนัยทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี

ตัวอย่าง 2.1.4

กำหนดให้ $a=0,b=1,p=2,q=3$ ในบทนิยาม 2.1.4 ได้ว่า

$$\{F_k\}=0,1,2,7,20,61,182,547,1640,4921,14762,44287,132860,\ldots$$

ในปี ค.ศ. 2015 Suvarnamani และ Tatong [9] ได้ศึกษาลำดับ (p,q) ฟีโบนัชชีซึ่งมีนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.1.5 ลำดับ (p,q) ฟีโบนัชชี ((p,q) Fibonacci sequence) คือ ลำดับที่เกิดจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$F_{p,q,n}=pF_{p,q,n-1}+qF_{p,q,n-2}$$

โดยที่ $F_{p,q,0}=0$ และ $F_{p,q,1}=1$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n\geq 2$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็มบวก

เขียนลำดับได้ดังตารางต่อไปนี้

n	$F_{p,q,n}$
0	0
1	1
2	p
3	p^2+q
4	p^3+2pq
5	$p^4+3p^2q+q^2$
6	$p^5+4p^3q+3pq^2$
7	$p^6+5p^4q+6p^2q^2+q^3$
8	$p^7+6p^5q+10p^3q^2+4pq^3$
9	$p^8+7p^6q+15p^4q^2+10p^2q^3+q^4$
10	$p^9+8p^7q+21p^5q^2+20p^3q^3+5pq^4$

n	$F_{p,q,n}$
11	$p^{10}+9p^8q+28p^6q^2+35p^4q^3+15p^2q^4+q^5$
12	$p^{11}+10p^9q+36p^7q^2+56p^5q^3+35p^3q^4+6pq^5$
$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 2.6 : ลำดับ (p,q) ฟีโบนัชชี

ตัวอย่าง 2.1.5

1.ให้ $p=2$ และ $q=2$ ในบทนิยาม 2.1.5 ได้ว่า

$$\{F_{2,2,n}\}=0,1,2,6,16,44,120,328,896,2448,6688,18272,49920,\ldots$$

2.ให้ $p=2$ และ $q=3$ ในบทนิยาม 2.1.5 ได้ว่า

$$\{F_{2,3,n}\}=0,1,2,7,20,61,182,547,1640,4921,14762,44287,132860,\ldots$$

ในปี ค.ศ. 2010 Bolat และ Kose [2] ได้ศึกษาสมบัติของลำดับ k ฟีโบนัชชี ดังนี้ จากสมการที่กำหนดโดย (2.4) เป็นสมการผลต่างอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ ดังนั้น จะได้สมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$r^2=kr+1 \tag{2.5}$$

คำตอบสมการลักษณะเฉพาะของสมการ (2.5) คือ

$$r_1=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \text{ หรือ } r_2=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

เนื่องจาก $0<k$ ดังนั้น

$$r_2<0<r_1,\ |r_2|<r_1$$

$$r_1+r_2=k,\quad r_1r_2=-1,\quad r_1-r_2=\sqrt{k^2+4} \tag{2.6}$$

ทฤษฎีบท 2.1.6 [2] สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ได้ว่า

$$r_1^{n+2} = kr_1^{n+1} + r_1^n \text{ และ } r_2^{n+2} = kr_2^{n+1} + r_2^n$$

เมื่อ r_1, r_2 เป็นคำตอบของสมการลักษณะเฉพาะ (2.5)

ทฤษฎีบท 2.1.7 [2] ให้ n เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $n \geq 0$ ได้ว่า

$$F_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$$

เมื่อ r_1, r_2 เป็นคำตอบของสมการลักษณะเฉพาะ (2.5) และ $r_1 > r_2$

ตัวอย่าง 2.1.6

ให้ $k = 2$ ใน (2.4) จะได้ว่า

$$r_1, r_2 = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

ดังนั้น $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ และ $r_2 = 1 - \sqrt{2}$

จากทฤษฎีบท 2.1.7 จะได้ $F_{2,n} = \dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{\left(1+\sqrt{2}\right) - \left(1-\sqrt{2}\right)}$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

ในปี ค.ศ. 2021 Panwar [8] ได้นิยามและศึกษาสมบัติของการวางนัยทั่วไปของลำดับ k ฟีโบนัชชี ดังนี้

บทนิยาม 2.1.8 ให้ k เป็นจำนวนจริงบวก และ p, q เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 2$ การวางนัยทั่วไปของลำดับ k ฟีโบนัชชี $\{F_{k,n}\}$ (generalized *k*-Fibonacci sequence) กำหนดโดย

$$F_{k,n} = pkF_{k,n-1} + qF_{k,n-2}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $F_{k,0} = a$ และ $F_{k,1} = b$

เขียนลำดับ $\{F_{k,n}\}$ ได้ดังตารางต่อไปนี้

n	$F_{k,n}$
0	a
1	b
2	$pkb+qa$
3	$p^2k^2b+pkqa+qb$
4	$p^3k^3b+p^2k^2qa+2pkqb+aq^2$
5	$p^4k^4b+p^3k^3qa+3p^2k^2qb+2pkaq^2+bq^2$
$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 2.7 : การวางนัยทั่วไปของลำดับ k ฟีโบนัชชี $\{F_{k,n}\}$

กรณีเฉพาะของการวางนัยทั่วไปของลำดับ k ฟีโบนัชชี เช่น

1. ถ้า $a=0, p=q=b=1$ แล้วจะได้ลำดับ k ฟีโบนัชชี

$F_{k,0}=0, F_{k,1}=1$ และ $F_{k,n}=kF_{k,n-1}+F_{k,n-2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n\geq 2$

$\{F_{k,n}\}=0,1,k,k^2+1,k^3+2k,k^4+3k^2+1,\dots$

2. ถ้า $a=0,k=p=q=b=1$ แล้วจะได้ลำดับฟีโบนัชชี

$F_0=0, F_1=1$ และ $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n\geq 2$

$\{F_n\}=0,1,1,2,3,5,8,\dots$

2.2 ระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือน (Fibonacci-like sequence equation system)

ในปี ค.ศ. 2022 Atanassov และคณะ [1] ได้นิยามระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือน พร้อมทั้งพิสูจน์สมบัติบางประการของระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือน

บทนิยาม 2.2.1 กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$\alpha_{n+1}=\beta_n+\gamma_{n-1}$$

$$\beta_{n+1}=\frac{\alpha_n+\gamma_n}{2}+\beta_{n-1}$$

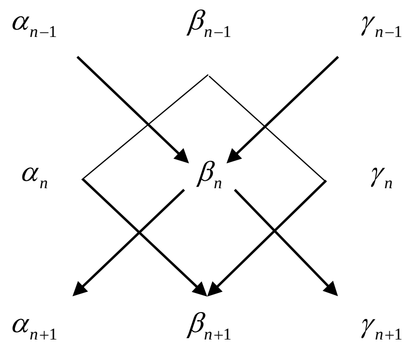
$$\gamma_{n+1}=\beta_n+\alpha_{n-1}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 1$ โดยมีพจน์ไขเริ่มต้น คือ

$$\alpha_0 = 2a, \beta_0 = b, \gamma_0 = 2c, \alpha_1 = 2d, \beta_1 = e \text{ และ } \gamma_1 = 2f$$

เมื่อ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริง

เราสามารถเขียนเป็นแผนผังความสัมพันธ์ของลำดับฟีโบนัชชีเสมือนสามลำดับได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 2.1 : รูปแบบของการสร้างของลำดับ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$

11 พจน์แรกของลำดับ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ แสดงดังตารางต่อไปนี้

n	α_n	β_n	γ_n
0	$2a$	b	$2c$
1	$2d$	e	$2f$
2	$2c+e$	$b+d+f$	$2a+e$
3	$b+d+3f$	$a+c+2e$	$b+3d+f$
4	$3a+c+3e$	$2b+3d+3f$	$a+3c+3e$
5	$3b+6d+4f$	$3a+3c+5e$	$3b+4d+6f$
6	$4a+6c+8e$	$5b+8d+8f$	$6a+4c+8e$
7	$8b+12d+14f$	$8a+8c+13e$	$8b+14d+12f$
8	$14a+12c+21e$	$13b+21d+21f$	$12a+14c+21e$
9	$21b+35d+33f$	$21a+21c+34e$	$21b+33d+35f$
10	$33a+35c+55e$	$34b+55d+55f$	$35a+33c+55e$
11	$55b+88d+90f$	$55a+55c+89e$	$55b+90d+88f$

n	α_n	β_n	γ_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 2.8 : ลำดับฟีโบนัชชีเสมือน $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$

ตัวอย่าง 2.2.1 กำหนดให้ $a = b = c = d = e = f = 1$

จะได้ว่า $\alpha_0 = 2, \beta_0 = 1, \gamma_0 = 2, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 1$ และ $\gamma_1 = 2$

จาก

$$\alpha_{n+1} = \beta_n + \gamma_{n-1}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{\alpha_n + \gamma_n}{2} + \beta_{n-1}$$

$$\gamma_{n+1} = \beta_n + \alpha_{n-1}$$

จะได้ลำดับทั้งสามดังตารางต่อไปนี้

n	α_n	β_n	γ_n
0	2	1	2
1	2	1	2
2	3	3	3
3	5	4	5
4	7	8	7
5	13	11	13
6	18	21	18
7	34	29	34
8	47	55	47
9	89	76	89
10	123	144	123
11	233	199	233
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 2.9 : ลำดับฟีโบนัชชีเสมือน $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$
เมื่อ $\alpha_0 = 2, \beta_0 = 1, \gamma_0 = 2, \alpha_1 = 2, \beta_1 = 1$ และ $\gamma_1 = 2$

ดังนั้น $\{\alpha_n\} = 2,2,3,5,7,13,18,34,47,89,123,\ldots$

$\{\beta_n\} = 1,1,3,4,8,11,21,29,55,76,144,\ldots$

$\{\gamma_n\} = 2,2,3,5,7,13,18,34,47,89,123,\ldots$

นอกจากนี้ Atanassov และคณะ [1] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างลำดับทั้งสามกับลำดับฟีโบนัชชี ซึ่งได้ผลลัพธ์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1 [1] สำหรับจำนวนเต็มบวก n ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\alpha_{4n} &= (F_{4n-1}+1)a + (F_{4n-1}-1)c + F_{4n}e \\
\beta_{4n} &= F_{4n-1}b + F_{4n}d + F_{4n}f \\
\gamma_{4n} &= (F_{4n-1}-1)a + (F_{4n-1}+1)c + F_{4n}e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{4n+1} &= F_{4n}b + (F_{4n+1}+1)d + (F_{4n+1}-1)f \\
\beta_{4n+1} &= F_{4n}a + F_{4n}c + F_{4n+1}e \\
\gamma_{4n+1} &= F_{4n}b + (F_{4n+1}-1)d + (F_{4n+1}+1)f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{4n+2} &= (F_{4n+1}-1)a + (F_{4n+1}+1)c + F_{4n+2}e \\
\beta_{4n+2} &= F_{4n+1}b + F_{4n+2}d + F_{4n+2}f \\
\gamma_{4n+2} &= (F_{4n+1}+1)a + (F_{4n+1}-1)c + F_{4n+2}e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{4n+3} &= F_{4n+2}b + (F_{4n+3}-1)d + (F_{4n+3}+1)f \\
\beta_{4n+3} &= F_{4n+2}a + F_{4n+2}c + F_{4n+3}e \\
\gamma_{4n+3} &= F_{4n+2}b + (F_{4n+3}+1)d + (F_{4n+3}-1)f
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.2.2 จากตัวอย่างที่ 2.2.1 เลือก $n=2$ จะได้ว่า

$\alpha_8 = (F_7+1)a + (F_7-1)c + F_8e$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= (13+1)+(13-1)+21$ (จาก $F_7 = 13$ และ $F_8 = 21$)

$= 47$

$\beta_8 = F_7b + F_8d + F_8f$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= 13+21+21$ (จาก $F_7 = 13$ และ $F_8 = 21$)

$= 55$

$\gamma_8 = (F_7 - 1)a + (F_7 + 1)c + F_8 e$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= (13-1) + (13+1) + 21$ (จาก $F_7 = 13$ และ $F_8 = 21$)

$= 47$

$\alpha_9 = F_8 b + (F_9 + 1)d + (F_9 - 1)f$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= 21 + (34+1) + (34-1)$ (จาก $F_8 = 21$ และ $F_9 = 34$)

$= 89$

$\beta_9 = F_8 a + F_8 c + F_9 e$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= 21 + 21 + 34$ (จาก $F_8 = 21$ และ $F_9 = 34$)

$= 76$

$\gamma_9 = F_8 b + (F_9 - 1)d + (F_9 + 1)f$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= 21 + (34-1) + (34+1)$ (จาก $F_8 = 21$ และ $F_9 = 34$)

$= 89$

$\alpha_{10} = (F_9 - 1)a + (F_9 + 1)c + F_{10} e$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= (34-1) + (34+1) + 55$ (จาก $F_9 = 34$ และ $F_{10} = 55$)

$= 123$

$\beta_{10} = F_9 b + F_{10} d + F_{10} f$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= 34 + 55 + 55$ (จาก $F_9 = 34$ และ $F_{10} = 55$)

$= 144$

$\gamma_{10} = (F_9 + 1)a + (F_9 - 1)c + F_{10} e$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= (34+1) + (34-1) + 55$ (จาก $F_9 = 34$ และ $F_{10} = 55$)

$= 123$

$\alpha_{11} = F_{10} b + (F_{11} - 1)d + (F_{11} + 1)f$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= 55 + (89-1) + (89+1)$ (จาก $F_{10} = 55$ และ $F_{11} = 89$)

$= 233$

$\beta_{11} = F_{10}a + F_{10}c + F_{11}e$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= 55 + 55 + 89$ (จาก $F_{10} = 55$ และ $F_{11} = 89$)

$= 199$

$\gamma_{11} = F_{10}b + \left(F_{11} + 1\right)d + \left(F_{11} - 1\right)f$ (จากทฤษฎีบท 2.2.1)

$= 55 + \left(89 + 1\right) + \left(89 - 1\right)$ (จาก $F_{10} = 55$ และ $F_{11} = 89$)

$= 233$

จะเห็นว่าค่าที่ได้ทั้งหมดตรงกับค่าในตาราง 2.9

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Main results)

ในบทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน โดยศึกษานิยามและสมบัติบางประการของระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน

3.1 ระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน (*k*-Fibonacci-like sequence equation system)

บทนิยาม 3.1.1 ให้ k เป็นจำนวนจริงบวก กำหนดความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$\alpha_{k,n+1} = k\beta_{k,n} + \gamma_{k,n-1}$$

$$\beta_{k,n+1} = k\left(\frac{\alpha_{k,n} + \gamma_{k,n}}{2}\right) + \beta_{k,n-1}$$

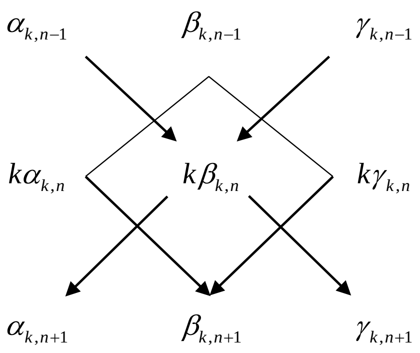
$$\gamma_{k,n+1} = k\beta_{k,n} + \alpha_{k,n-1}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 1$ โดยมีพจน์เริ่มต้น คือ

$$\alpha_{k,0} = 2a, \beta_{k,0} = b, \gamma_{k,0} = 2c, \alpha_{k,1} = 2d, \beta_{k,1} = e \text{ และ } \gamma_{k,1} = 2f$$

เมื่อ $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ และ f เป็นจำนวนจริง

เราสามารถเขียนเป็นแผนผังความสัมพันธ์ของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือนสามลำดับได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 2.2 : รูปแบบของการสร้างของลำดับ $\{\alpha_{k,n}\}, \{\beta_{k,n}\}$ และ $\{\gamma_{k,n}\}$

7 พจน์แรกของลำดับ $\{\alpha_{k,n}\}$, $\{\beta_{k,n}\}$ และ $\{\gamma_{k,n}\}$ แสดงดังตารางต่อไปนี้

n	$\{\alpha_{k,n}\}$	$\{\beta_{k,n}\}$	$\{\gamma_{k,n}\}$
0	$2a$	b	$2c$

n	$\{\alpha_{k,n}\}$	$\{\beta_{k,n}\}$	$\{\gamma_{k,n}\}$
1	$2d$	e	$2f$
2	$2c+ke$	$b+kd+kf$	$2a+ke$
3	kb $+k^2d$ $+(k^2+2)f$	ka $+kc$ $+(k^2+1)e$	kb $+(k^2+2)d$ $+k^2f$
4	$(k^2+2)a$ $+k^2c$ $+(k^3+2k)e$	$(k^2+1)b$ $+(k^3+2k)d$ $+(k^3+2k)f$	k^2a $+(k^2+2)c$ $+(k^3+2k)e$
5	$(k^3+2k)b$ $+(k^4+3k^2+2)d$ $+(k^4+3k^2)f$	$(k^3+2k)a$ $+(k^3+2k)c$ $+(k^4+3k^2+1)e$	$(k^3+2k)b$ $+(k^4+3k^2)d$ $+(k^4+3k^2+2)f$
6	$(k^4+3k^2)a$ $+(k^4+3k^2+2)c$ $+(k^5+4k^3+3k)e$	$(k^4+3k^2+1)b$ $+(k^5+4k^3+3k)d$ $+(k^5+4k^3+3k)f$	$(k^4+3k^2+2)a$ $+(k^4+3k^2)c$ $+(k^5+4k^3+3k)e$
7	$(k^5+4k^3+3k)b$ $+(k^6+5k^4+6k^2)d$ $+(k^6+5k^4+6k^2+2)f$	$(k^5+4k^3+3k)a$ $+(k^5+4k^3+3k)c$ $+(k^6+5k^4+6k^2+1)e$	$(k^5+4k^3+3k)b$ $+(k^6+5k^4+6k^2+2)d$ $+(k^6+5k^4+6k^2)f$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 3.1 : ลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน $\{\alpha_{k,n}\}$, $\{\beta_{k,n}\}$ และ $\{\gamma_{k,n}\}$

ให้ $k=1$ ในบทนิยาม 3.1.1 จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดดังนี้

$$\alpha_{1,n+1}=\beta_{1,n}+\gamma_{1,n-1}$$
$$\beta_{1,n+1}=\left(\frac{\alpha_{1,n}+\gamma_{1,n}}{2}\right)+\beta_{1,n-1}$$
$$\gamma_{1,n+1}=\beta_{1,n}+\alpha_{1,n-1}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n\geq 1$ โดยมี พจน์เริ่มต้น คือ

$$\alpha_{1,0}=2a,\beta_{1,0}=b,\gamma_{1,0}=2c,\alpha_{1,1}=2d,\beta_{1,1}=e \text{ และ } \gamma_{1,1}=2f$$

เมื่อ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริง

จะเห็นว่าเมื่อแทน $k=1$ ในบทนิยาม 3.1.1 จะได้ระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือน ดังบทนิยาม 2.2.1 นั่นคือ ระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือนเป็นการวางนัยทั่วไปของระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือน

ตัวอย่าง 3.1.1 กำหนดให้ $k=2$ และ $a=b=c=d=e=f=1$

จะได้ว่า $\alpha_{2,0}=2, \beta_{2,0}=1, \gamma_{2,0}=2, \alpha_{2,1}=2, \beta_{2,1}=1$ และ $\gamma_{2,1}=2$

จาก

$$\alpha_{2,n+1}=2\beta_{2,n}+\gamma_{2,n-1}$$

$$\beta_{2,n+1}=2\left(\frac{\alpha_{2,n}+\gamma_{2,n}}{2}\right)+\beta_{2,n-1}$$

$$\gamma_{2,n+1}=2\beta_{2,n}+\alpha_{2,n-1}$$

จะได้ลำดับทั้งสามดังตารางต่อไปนี้

n	$\alpha_{2,n}$	$\beta_{2,n}$	$\gamma_{2,n}$
0	2	1	2
1	2	1	2
2	4	5	4
3	12	9	12
4	22	29	22
5	70	53	70
6	128	169	128
7	408	309	408
8	746	985	746
9	2378	1801	2378
10	4348	5741	4348
11	13860	10497	13860
12	25342	33461	25342

n	$\alpha_{2,n}$	$\beta_{2,n}$	$\gamma_{2,n}$
13	80782	61181	80782
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

ตารางที่ 3.2 : ลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน $\{\alpha_{k,n}\}$, $\{\beta_{k,n}\}$ และ $\{\gamma_{k,n}\}$
เมื่อ $k=2$ และ $a=b=c=d=e=f=1$

ดังนั้น $\{\alpha_{2,n}\}=2,2,4,12,22,70,128,408,746,2378,4348,13860,25342,80782,...$

$\{\beta_{2,n}\}=1,1,5,9,29,53,169,309,985,1801,5741,10497,33461,61181,...$

$\{\gamma_{2,n}\}=2,2,4,12,22,70,128,408,746,2378,4348,13860,25342,80782,......$

3.2 สมบัติบางประการของระบบสมการของลำดับฟีโบนัชชีเสมือน (Some Properties of Fibonacci-like Sequence Equation System)

ทฤษฎีบท 3.2.1 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ได้ว่า

$$\begin{aligned}\alpha_{4n}-\gamma_{4n}&=\alpha_0-\gamma_0\\ \alpha_{4n+1}-\gamma_{4n+1}&=\alpha_1-\gamma_1\\ \alpha_{4n+2}-\gamma_{4n+2}&=\gamma_0-\alpha_0\\ \alpha_{4n+3}-\gamma_{4n+3}&=\gamma_1-\alpha_1\end{aligned}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\begin{aligned}\alpha_{4n}-\gamma_{4n}&=\alpha_0-\gamma_0\\ \alpha_{4n+1}-\gamma_{4n+1}&=\alpha_1-\gamma_1\\ \alpha_{4n+2}-\gamma_{4n+2}&=\gamma_0-\alpha_0\\ \alpha_{4n+3}-\gamma_{4n+3}&=\gamma_1-\alpha_1\end{aligned}$$

1. จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

1.1) จะแสดงว่า $\alpha_4 - \gamma_4 = \alpha_0 - \gamma_0$

จากตารางที่ 2.8 ได้ว่า
$$\begin{aligned}\alpha_4 - \gamma_4 &= (3a + c + 3e) - (a + 3c + 3e)\\ &= 2a - 2c\\ &= \alpha_0 - \gamma_0\end{aligned}$$

1.2) จะแสดงว่า $\alpha_5 - \gamma_5 = \alpha_1 - \gamma_1$

จากตารางที่ 2.8 ได้ว่า
$$\begin{aligned}\alpha_5 - \gamma_5 &= (3b + 6d + 4f) - (3b + 4d + 6f)\\ &= 2d - 2f\\ &= \alpha_1 - \gamma_1\end{aligned}$$

1.3) จะแสดงว่า $\alpha_6 - \gamma_6 = \gamma_0 - \alpha_0$

จากตารางที่ 2.8 ได้ว่า
$$\begin{aligned}\alpha_6 - \gamma_6 &= (4a + 6c + 8e) - (6a + 4c + 8e)\\ &= -2a + 2c\\ &= 2c - 2a\\ &= \gamma_0 - \alpha_0\end{aligned}$$

1.4) จะแสดงว่า $\alpha_7 - \gamma_7 = \gamma_1 - \alpha_1$

จากตารางที่ 2.8 ได้ว่า
$$\begin{aligned}\alpha_7 - \gamma_7 &= (8b + 12d + 14f) - (8b + 14d + 12f)\\ &= 2f - 2d\\ &= \gamma_1 - \alpha_1\end{aligned}$$

จาก 1.1) - 1.4) ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. ให้ $m \in \mathbb{N}$ สมมติให้ $P(m)$ เป็นจริง

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\alpha_{4m} - \gamma_{4m} &= \alpha_0 - \gamma_0\\ \alpha_{4m+1} - \gamma_{4m+1} &= \alpha_1 - \gamma_1\\ \alpha_{4m+2} - \gamma_{4m+2} &= \gamma_0 - \alpha_0\\ \alpha_{4m+3} - \gamma_{4m+3} &= \gamma_1 - \alpha_1\end{aligned}$$

จะแสดงว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ ต้องแสดงว่า
$$\begin{aligned}\alpha_{4(m+1)} - \gamma_{4(m+1)} &= \alpha_0 - \gamma_0\\ \alpha_{4(m+1)+1} - \gamma_{4(m+1)+1} &= \alpha_1 - \gamma_1\\ \alpha_{4(m+1)+2} - \gamma_{4(m+1)+2} &= \gamma_0 - \alpha_0\\ \alpha_{4(m+1)+3} - \gamma_{4(m+1)+3} &= \gamma_1 - \alpha_1\end{aligned}$$

2.1) จะแสดงว่า $\alpha_{4(m+1)} - \gamma_{4(m+1)} = \alpha_0 - \gamma_0$

พิจารณา $\alpha_{4(m+1)} - \gamma_{4(m+1)} = \alpha_{4m+4} - \gamma_{4m+4}$

$= (\beta_{4m+3} + \gamma_{4m+2}) - (\beta_{4m+3} + \alpha_{4m+2})$ (จากบทนิยาม 2.2.1)

$= \gamma_{4m+2} - \alpha_{4m+2}$

$= -(\alpha_{4m+2} - \gamma_{4m+2})$

$= -(\gamma_0 - \alpha_0)$

$= \alpha_0 - \gamma_0$

2.2) จะแสดงว่า $\alpha_{4(m+1)+1} - \gamma_{4(m+1)+1} = \alpha_1 - \gamma_1$

พิจารณา $\alpha_{4(m+1)+1} - \gamma_{4(m+1)+1} = \alpha_{4m+5} - \gamma_{4m+5}$

$= (\beta_{4m+4} + \gamma_{4m+3}) - (\beta_{4m+4} + \alpha_{4m+3})$ (จากบทนิยาม 2.2.1)

$= \gamma_{4m+3} - \alpha_{4m+3}$

$= -(\alpha_{4m+3} - \gamma_{4m+3})$

$= -(\gamma_1 - \alpha_1)$

$= \alpha_1 - \gamma_1$

2.3) จะแสดงว่า $\alpha_{4(m+1)+2} - \gamma_{4(m+1)+2} = \gamma_0 - \alpha_0$

พิจารณา $\alpha_{4(m+1)+2} - \gamma_{4(m+1)+2} = \alpha_{4m+6} - \gamma_{4m+6}$

$= (\beta_{4m+5} + \gamma_{4m+4}) - (\beta_{4m+5} + \alpha_{4m+4})$ (จากบทนิยาม 2.2.1)

$= \gamma_{4m+4} - \alpha_{4m+4}$

$= -(\alpha_{4m+4} - \gamma_{4m+4})$

$= -(\alpha_0 - \gamma_0)$ (จากข้อ 2.1)

$= \gamma_0 - \alpha_0$

2.4) จะแสดงว่า $\alpha_{4(m+1)+3}-\gamma_{4(m+1)+3}=\gamma_1-\alpha_1$

พิจารณา $\alpha_{4(m+1)+3}-\gamma_{4(m+1)+3}=\alpha_{4m+7}-\gamma_{4m+7}$

$$=\left(\beta_{4m+6}+\gamma_{4m+5}\right)-\left(\beta_{4m+6}+\alpha_{4m+5}\right) \quad \text{(จากบทนิยาม 2.2.1)}$$

$$=\gamma_{4m+5}-\alpha_{4m+5}$$

$$=-\left(\alpha_{4m+5}-\gamma_{4m+5}\right)$$

$$=-\left(\alpha_1-\gamma_1\right) \quad \text{(จากข้อ 2.2)}$$

$$=\gamma_1-\alpha_1$$

จาก 2.1) - 2.4) ได้ว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ ■

จากทฤษฎีบท 3.2.1 สามารถสรุปรวมเป็นบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 3.2.1 สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

$$\alpha_n-\gamma_n=\begin{cases}\alpha_0-\gamma_0 & \text{ถ้า } n\equiv 0\pmod 4\\ \alpha_1-\gamma_1 & \text{ถ้า } n\equiv 1\pmod 4\\ \gamma_0-\alpha_0 & \text{ถ้า } n\equiv 2\pmod 4\\ \gamma_1-\alpha_1 & \text{ถ้า } n\equiv 3\pmod 4\end{cases}$$

บทแทรก 3.2.2 ถ้า $\alpha_0=\gamma_0$ และ $\alpha_1=\gamma_1$ แล้ว $\alpha_n=\gamma_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

พิสูจน์ สมมติให้ $\alpha_0=\gamma_0$ และ $\alpha_1=\gamma_1$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จากทฤษฎีบท 3.2.1 ได้ว่า

1. $\alpha_{4n}-\gamma_{4n}=\alpha_0-\gamma_0=\alpha_0-\alpha_0=0$
2. $\alpha_{4n+1}-\gamma_{4n+1}=\alpha_1-\gamma_1=\alpha_1-\alpha_1=0$
3. $\alpha_{4n+2}-\gamma_{4n+2}=\gamma_0-\alpha_0=\gamma_0-\gamma_0=0$
4. $\alpha_{4n+3}-\gamma_{4n+3}=\gamma_1-\alpha_1=\gamma_1-\gamma_1=0$

จะเห็นว่า $\alpha_{4n}=\gamma_{4n}, \alpha_{4n+1}=\gamma_{4n+1}, \alpha_{4n+2}=\gamma_{4n+2}$ และ $\alpha_{4m+3}=\gamma_{4m+3}$

ดังนั้น $\alpha_n=\gamma_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ■

3.3 สมบัติบางประการของระบบสมการของลำดับ k ฟีโบนัชชีเสมือน (Some properties of k-Fibonacci-like sequence equation system)

ทฤษฎีบท 3.3.1 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,4n} &= \left(F_{k,4n-1}+1\right)a+\left(F_{k,4n-1}-1\right)c+F_{k,4n}e \\
\beta_{k,4n} &= F_{k,4n-1}b+F_{k,4n}d+F_{k,4n}f \\
\gamma_{k,4n} &= \left(F_{k,4n-1}-1\right)a+\left(F_{k,4n-1}+1\right)c+F_{k,4n}e \\
\alpha_{k,4n+1} &= F_{k,4n}b+\left(F_{k,4n+1}+1\right)d+\left(F_{k,4n+1}-1\right)f \\
\beta_{k,4n+1} &= F_{k,4n}a+F_{k,4n}c+F_{k,4n+1}e \\
\gamma_{k,4n+1} &= F_{k,4n}b+\left(F_{k,4n+1}-1\right)d+\left(F_{k,4n+1}+1\right)f \\
\alpha_{k,4n+2} &= \left(F_{k,4n+1}-1\right)a+\left(F_{k,4n+1}+1\right)c+F_{k,4n+2}e \\
\beta_{k,4n+2} &= F_{k,4n+1}b+F_{k,4n+2}d+F_{k,4n+2}f \\
\gamma_{k,4n+2} &= \left(F_{k,4n+1}+1\right)a+\left(F_{k,4n+1}-1\right)c+F_{k,4n+2}e \\
\alpha_{k,4n+3} &= F_{k,4n+2}b+\left(F_{k,4n+3}-1\right)d+\left(F_{k,4n+3}+1\right)f \\
\beta_{k,4n+3} &= F_{k,4n+2}a+F_{k,4n+2}c+F_{k,4n+3}e \\
\gamma_{k,4n+3} &= F_{k,4n+2}b+\left(F_{k,4n+3}+1\right)d+\left(F_{k,4n+3}-1\right)f
\end{aligned}$$

พิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,4n} &= \left(F_{k,4n-1}+1\right)a+\left(F_{k,4n-1}-1\right)c+F_{k,4n}e \\
\beta_{k,4n} &= F_{k,4n-1}b+F_{k,4n}d+F_{k,4n}f \\
\gamma_{k,4n} &= \left(F_{k,4n-1}-1\right)a+\left(F_{k,4n-1}+1\right)c+F_{k,4n}e \\
\alpha_{k,4n+1} &= F_{k,4n}b+\left(F_{k,4n+1}+1\right)d+\left(F_{k,4n+1}-1\right)f \\
\beta_{k,4n+1} &= F_{k,4n}a+F_{k,4n}c+F_{k,4n+1}e \\
\gamma_{k,4n+1} &= F_{k,4n}b+\left(F_{k,4n+1}-1\right)d+\left(F_{k,4n+1}+1\right)f \\
\alpha_{k,4n+2} &= \left(F_{k,4n+1}-1\right)a+\left(F_{k,4n+1}+1\right)c+F_{k,4n+2}e \\
\beta_{k,4n+2} &= F_{k,4n+1}b+F_{k,4n+2}d+F_{k,4n+2}f \\
\gamma_{k,4n+2} &= \left(F_{k,4n+1}+1\right)a+\left(F_{k,4n+1}-1\right)c+F_{k,4n+2}e
\end{aligned}$$

$$\alpha_{k,4n+3} = F_{k,4n+2}b + \left(F_{k,4n+3} - 1\right)d + \left(F_{k,4n+3} + 1\right)f$$
$$\beta_{k,4n+3} = F_{k,4n+2}a + F_{k,4n+2}c + F_{k,4n+3}e$$
$$\gamma_{k,4n+3} = F_{k,4n+2}b + \left(F_{k,4n+3} + 1\right)d + \left(F_{k,4n+3} - 1\right)f$$

1. จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

1.1) จะแสดงว่า $\alpha_{k,4} = \left(F_{k,3} + 1\right)a + \left(F_{k,3} - 1\right)c + F_{k,4}e$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\alpha_{k,4} = \left(k^2 + 2\right)a + k^2c + (k^3 + 2k)e$

$$= \left((k^2 + 1) + 1\right)a + \left((k^2 + 1) - 1\right)c + (k^3 + 2k)e$$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,3} = k^2 + 1$ และ $F_{k,4} = k^3 + 2k$

ดังนั้น $\alpha_{k,4} = \left((k^2 + 1) + 1\right)a + \left((k^2 + 1) - 1\right)c + (k^3 + 2k)e$

$$= \left(F_{k,3} + 1\right)a + \left(F_{k,3} - 1\right)c + F_{k,4}e$$

1.2) จะแสดงว่า $\beta_{k,4} = F_{k,3}b + F_{k,4}d + F_{k,4}f$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\beta_{k,4} = (k^2 + 1)b + (k^3 + 2k)d + (k^3 + 2k)f$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,3} = k^2 + 1$ และ $F_{k,4} = k^3 + 2k$

ดังนั้น $\beta_{k,4} = (k^2 + 1)b + (k^3 + 2k)d + (k^3 + 2k)f$

$$= F_{k,3}b + F_{k,4}d + F_{k,4}f$$

1.3) จะแสดงว่า $\gamma_{k,4} = \left(F_{k,3} - 1\right)a + \left(F_{k,3} + 1\right)c + F_{k,4}e$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\gamma_{k,4} = k^2a + \left(k^2 + 2\right)c + \left(k^3 + 2k\right)e$

$$= \left((k^2 + 1) - 1\right)a + \left((k^2 + 1) + 1\right)c + (k^3 + 2k)e$$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,3} = k^2 + 1$ และ $F_{k,4} = k^3 + 2k$

ดังนั้น $\gamma_{k,4} = \left((k^2 + 1) - 1\right)a + \left((k^2 + 1) + 1\right)c + (k^3 + 2k)e$

$$= \left(F_{k,3} - 1\right)a + \left(F_{k,3} + 1\right)c + F_{k,4}e$$

1.4) จะแสดงว่า $\alpha_{k,5} = F_{k,4}b + \left(F_{k,5} + 1\right)d + \left(F_{k,5} - 1\right)f$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\alpha_{k,5} = \left(k^3 + 2k\right)b + \left(k^4 + 3k^2 + 2\right)d + \left(k^4 + 3k^2\right)f$

$$= (k^3 + 2k)b + \left((k^4 + 3k^2 + 1) + 1\right)d + \left((k^4 + 3k^2 + 1) - 1\right)f$$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,4} = k^3 + 2k$ และ $F_{k,5} = k^4 + 3k^2 + 1$

ดังนั้น $\alpha_{k,5} = (k^3+2k)b + \left((k^4+3k^2+1)+1\right)d + \left((k^4+3k^2+1)-1\right)f$

$= F_{k,4}b + \left(F_{k,5}+1\right)d + \left(F_{k,5}-1\right)f$

1.5) จะแสดงว่า $\beta_{k,5} = F_{k,4}a + F_{k,4}c + F_{k,5}e$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\beta_{k,5} = (k^3+2k)a + (k^3+2k)c + (k^4+3k^2+1)e$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,4} = k^3+2k$ และ $F_{k,5} = k^4+3k^2+1$

ดังนั้น $\beta_{k,5} = (k^3+2k)a + (k^3+2k)c + (k^4+3k^2+1)e$

$= F_{k,4}a + F_{k,4}c + F_{k,5}e$

1.6) จะแสดงว่า $\gamma_{k,5} = F_{k,4}b + \left(F_{k,5}-1\right)d + \left(F_{k,5}+1\right)f$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\gamma_{k,5} = \left(k^3+2k\right)b + \left(k^4+3k^2\right)d + \left(k^4+3k^2+2\right)f$

$= (k^3+2k)b + \left((k^4+3k^2+1)-1\right)d + \left((k^4+3k^2+1)+1\right)f$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,4} = k^3+2k$ และ $F_{k,5} = k^4+3k^2+1$

ดังนั้น $\gamma_{k,5} = (k^3+2k)b + \left((k^4+3k^2+1)-1\right)d + \left((k^4+3k^2+1)+1\right)f$

$= F_{k,4}b + \left(F_{k,5}-1\right)d + \left(F_{k,5}+1\right)f$

1.7) จะแสดงว่า $\alpha_{k,6} = \left(F_{k,5}-1\right)a + \left(F_{k,5}+1\right)c + F_{k,6}e$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\alpha_{k,6} = \left((k^4+3k^2+1)-1\right)a + \left((k^4+3k^2+1)+1\right)c + (k^5+4k^3+3k)e$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,5} = k^4+3k^2+1$ และ $F_{k,6} = k^5+4k^3+3k$

ดังนั้น $\alpha_{k,6} = \left(k^4+3k^2\right)a + \left(k^4+3k^2+2\right)c + \left(k^5+4k^3+3k\right)e$

$= \left((k^4+3k^2+1)-1\right)a + \left((k^4+3k^2+1)+1\right)c + (k^5+4k^3+3k)e$

$= \left(F_{k,5}-1\right)a + \left(F_{k,5}+1\right)c + F_{k,6}e$

1.8) จะแสดงว่า $\beta_{k,6} = F_{k,5}b + F_{k,6}d + F_{k,6}f$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\beta_{k,6} = (k^4+3k^2+1)b + (k^5+4k^3+3k)d + (k^5+4k^3+3k)f$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,5} = k^4+3k^2+1$ และ $F_{k,6} = k^5+4k^3+3k$

ดังนั้น $\beta_{k,6} = (k^4+3k^2+1)b + (k^5+4k^3+3k)d + (k^5+4k^3+3k)f$

$= F_{k,5}b + F_{k,6}d + F_{k,6}f$

1.9) จะแสดงว่า $\gamma_{k,6} = \left(F_{k,5}+1\right)a + \left(F_{k,5}-1\right)c + F_{k,6}e$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\gamma_{k,6} = \left(k^4+3k^2+2\right)a + \left(k^4+3k^2\right)c + \left(k^5+4k^3+3k\right)e$

$$= \left((k^4+3k^2+1)+1\right)a + \left((k^4+3k^2+1)-1\right)c + (k^5+4k^3+3k)e$$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,5} = k^4+3k^2+1$ และ $F_{k,6} = k^5+4k^3+3k$

ดังนั้น $\gamma_{k,6} = \left((k^4+3k^2+1)+1\right)a + \left((k^4+3k^2+1)-1\right)c + (k^5+4k^3+3k)e$

$$= \left(F_{k,5}+1\right)a + \left(F_{k,5}-1\right)c + F_{k,6}e$$

1.10) จะแสดงว่า $\alpha_{k,7} = F_{k,6}b + \left(F_{k,7}-1\right)d + \left(F_{k,7}+1\right)f$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\alpha_{k,7} = \left(k^5+4k^3+3k\right)b + \left(k^6+5k^4+6k^2\right)d + \left(k^6+5k^4+6k^2+2\right)f$

$$= (k^5+4k^3+3k)b + \left((k^6+5k^4+6k^2+1)-1\right)d$$

$$+ \left((k^6+5k^4+6k^2+1)+1\right)f$$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,6} = k^5+4k^3+3k$ และ $F_{k,7} = k^6+5k^4+6k^2+1$

ดังนั้น $\alpha_{k,7} = (k^5+4k^3+3k)b + \left((k^6+5k^4+6k^2+1)-1\right)d$

$$+ \left((k^6+5k^4+6k^2+1)+1\right)f$$

$$\alpha_{k,7} = F_{k,6}b + \left(F_{k,7}-1\right)d + \left(F_{k,7}+1\right)f$$

1.11) จะแสดงว่า $\beta_{k,7} = F_{k,6}a + F_{k,6}c + F_{k,7}e$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\beta_{k,7} = (k^5+4k^3+3k)a + (k^5+4k^3+3k)c + (k^6+5k^4+6k^2+1)e$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,6} = k^5+4k^3+3k$ และ $F_{k,7} = k^6+5k^4+6k^2+1$

ดังนั้น $\beta_{k,7} = (k^5+4k^3+3k)a + (k^5+4k^3+3k)c + (k^6+5k^4+6k^2+1)e$

$$= F_{k,6}a + F_{k,6}c + F_{k,7}e$$

1.12) จะแสดงว่า $\gamma_{k,7} = F_{k,6}b + \left(F_{k,7}+1\right)d + \left(F_{k,7}-1\right)f$

จากตารางที่ 3.1 ได้ว่า $\gamma_{k,7} = \left(k^5+4k^3+3k\right)b + \left(k^6+5k^4+6k^2+2\right)d + \left(k^6+5k^4+6k^2\right)f$

$$= (k^5+4k^3+3k)b + \left((k^6+5k^4+6k^2+1)+1\right)d$$

$$+ \left((k^6+5k^4+6k^2+1)-1\right)f$$

จากตารางที่ 2.3 ได้ว่า $F_{k,6} = k^5+4k^3+3k$ และ $F_{k,7} = k^6+5k^4+6k^2+1$

ดังนั้น $\gamma_{k,7} = (k^5+4k^3+3k)b + \left((k^6+5k^4+6k^2+1)+1\right)d + \left((k^6+5k^4+6k^2+1)-1\right)f$

$$= F_{k,6}b + \left(F_{k,7}+1\right)d + \left(F_{k,7}-1\right)f$$

จาก 1.1) - 1.12) ทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

2. ให้ $m \in \mathbb{N}$ สมมติให้ $P(m)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k,4m} &= \left(F_{k,4m-1}+1\right)a+\left(F_{k,4m-1}-1\right)c+F_{k,4m}e \\
\beta_{k,4m} &= F_{k,4m-1}b+F_{k,4m}d+F_{k,4m}f \\
\gamma_{k,4m} &= \left(F_{k,4m-1}-1\right)a+\left(F_{k,4m-1}+1\right)c+F_{k,4m}e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k,4m+1} &= F_{k,4m}b+\left(F_{k,4m+1}+1\right)d+\left(F_{k,4m+1}-1\right)f \\
\beta_{k,4m+1} &= F_{k,4m}a+F_{k,4m}c+F_{k,4m+1}e \\
\gamma_{k,4m+1} &= F_{k,4m}b+\left(F_{k,4m+1}-1\right)d+\left(F_{k,4m+1}+1\right)f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k,4m+2} &= \left(F_{k,4m+1}-1\right)a+\left(F_{k,4m+1}+1\right)c+F_{k,4m+2}e \\
\beta_{k,4m+2} &= F_{k,4m+1}b+F_{k,4m+2}d+F_{k,4m+2}f \\
\gamma_{k,4m+2} &= \left(F_{k,4m+1}+1\right)a+\left(F_{k,4m+1}-1\right)c+F_{k,4m+2}e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k,4m+3} &= F_{k,4m+2}b+\left(F_{k,4m+3}-1\right)d+\left(F_{k,4m+3}+1\right)f \\
\beta_{k,4m+3} &= F_{k,4m+2}a+F_{k,4m+2}c+F_{k,4m+3}e \\
\gamma_{k,4m+3} &= F_{k,4m+2}b+\left(F_{k,4m+3}+1\right)d+\left(F_{k,4m+3}-1\right)f
\end{aligned}
$$

จะแสดงว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ ต้องแสดงว่า

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k,4(m+1)} &= \left(F_{k,4(m+1)-1}+1\right)a+\left(F_{k,4(m+1)-1}-1\right)c+F_{k,4(m+1)}e \\
\beta_{k,4(m+1)} &= F_{k,4(m+1)-1}b+F_{k,4(m+1)}d+F_{k,4(m+1)}f \\
\gamma_{k,4(m+1)} &= \left(F_{k,4(m+1)-1}-1\right)a+\left(F_{k,4(m+1)-1}+1\right)c+F_{k,4(m+1)}e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k,4(m+1)+1} &= F_{k,4(m+1)}b+\left(F_{k,4(m+1)+1}+1\right)d+\left(F_{k,4(m+1)+1}-1\right)f \\
\beta_{k,4(m+1)+1} &= F_{k,4(m+1)}a+F_{k,4(m+1)}c+F_{k,4(m+1)+1}e \\
\gamma_{k,4(m+1)+1} &= F_{k,4(m+1)}b+\left(F_{k,4(m+1)+1}-1\right)d+\left(F_{k,4(m+1)+1}+1\right)f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k,4(m+1)+2} &= \left(F_{k,4(m+1)+1}-1\right)a+\left(F_{k,4(m+1)+1}+1\right)c+F_{k,4(m+1)+2}e \\
\beta_{k,4(m+1)+2} &= F_{k,4(m+1)+1}b+F_{k,4(m+1)+2}d+F_{k,4(m+1)+2}f \\
\gamma_{k,4(m+1)+2} &= \left(F_{k,4(m+1)+1}+1\right)a+\left(F_{k,4(m+1)+1}-1\right)c+F_{k,4(m+1)+2}e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{k,4(m+1)+3} &= F_{k,4(m+1)+2}b+\left(F_{k,4(m+1)+3}-1\right)d+\left(F_{k,4(m+1)+3}+1\right)f \\
\beta_{k,4(m+1)+3} &= F_{k,4(m+1)+2}a+F_{k,4(m+1)+2}c+F_{k,4(m+1)+3}e
\end{aligned}
$$

$$\gamma_{k,4(m+1)+3} = F_{k,4(m+1)+2}b + \left(F_{k,4(m+1)+3}+1\right)d + \left(F_{k,4(m+1)+3}-1\right)f$$

2.1) จะแสดงว่า $\alpha_{k,4(m+1)} = \left(F_{k,4(m+1)-1}+1\right)a + \left(F_{k,4(m+1)-1}-1\right)c + F_{k,4(m+1)}e$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\alpha_{k,4(m+1)} &= \alpha_{k,4m+4} \\
&= k\beta_{k,4m+3} + \gamma_{k,4m+2} && \text{(จากบทนิยาม 3.1.1)} \\
&= k\left(F_{k,4m+2}a + F_{k,4m+2}c + F_{k,4m+3}e\right) && \text{(จาก } \mathrm{P}(m) \text{ เป็นจริง)} \\
&\quad + \left(\left(F_{k,4m+1}+1\right)a + \left(F_{k,4m+1}-1\right)c + F_{k,4m+2}e\right) \\
&= \left(kF_{k,4m+2} + F_{k,4m+1}+1\right)a + \left(kF_{k,4m+2} + F_{k,4m+1}-1\right)c \\
&\quad + \left(kF_{k,4m+3} + F_{k,4m+2}\right)e \\
&= \left(F_{k,4m+3}+1\right)a + \left(F_{k,4m+3}-1\right)c + F_{k,4m+4}e && \text{(จากบทนิยาม 2.1.3)} \\
&= \left(F_{k,4m+4-1}+1\right)a + \left(F_{k,4m+4-1}-1\right)c + F_{k,4m+4}e \\
&= \left(F_{k,4(m+1)-1}+1\right)a + \left(F_{k,4(m+1)-1}-1\right)c + F_{k,4(m+1)}e
\end{aligned}$$

2.2) จะแสดงว่า $\beta_{k,4(m+1)} = F_{k,4(m+1)-1}b + F_{k,4(m+1)}d + F_{k,4(m+1)}f$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\beta_{k,4(m+1)} &= \beta_{k,4m+4} \\
&= k\left(\frac{\alpha_{k,4m+3} + \gamma_{k,4m+3}}{2}\right) + \beta_{k,4m+2} && \text{(จากบทนิยาม 3.1.1)} \\
&= \frac{k\alpha_{k,4m+3}}{2} + \frac{k\gamma_{k,4m+3}}{2} + \beta_{k,4m+2} \\
&= \frac{k\left(F_{k,4m+2}b + \left(F_{k,4m+3}-1\right)d + \left(F_{k,4m+3}+1\right)f\right)}{2} && \text{(จาก } \mathrm{P}(m) \text{ เป็นจริง)} \\
&\quad + \frac{k\left(F_{k,4m+2}b + \left(F_{k,4m+3}+1\right)d + \left(F_{k,4m+3}-1\right)f\right)}{2} \\
&\quad + \left(F_{k,4m+1}b + F_{k,4m+2}d + F_{k,4m+2}f\right) \\
&= \frac{2kF_{k,4m+2}b + \left(2kF_{k,4m+3}\right)d + \left(2kF_{k,4m+3}\right)f}{2} \\
&\quad + \left(F_{k,4m+1}b + F_{k,4m+2}d + F_{k,4m+2}f\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(kF_{k,4m+2}b + kF_{k,4m+3}d + kF_{k,4m+3}f\right) + \left(F_{k,4m+1}b + F_{k,4m+2}d + F_{k,4m+2}f\right)$$

$$= \left(kF_{k,4m+2} + F_{k,4m+1}\right)b + \left(kF_{k,4m+3} + F_{k,4m+2}\right)d + \left(kF_{k,4m+3} + F_{k,4m+2}\right)f$$

$$= F_{k,4m+3}b + F_{k,4m+4}d + F_{k,4m+4}f$$ (จากบทนิยาม 2.1.3)

$$= F_{k,4m+4-1}b + F_{k,4m+4}d + F_{k,4m+4}f$$

$$= F_{k,4(m+1)-1}b + F_{k,4(m+1)}d + F_{k,4(m+1)}f$$

2.3) จะแสดงว่า $\gamma_{k,4(m+1)} = \left(F_{k,4(m+1)-1} - 1\right)a + \left(F_{k,4(m+1)-1} + 1\right)c + F_{k,4(m+1)}e$

พิจารณา

$$\gamma_{k,4(m+1)} = \gamma_{4m+4}$$

$$= k\beta_{k,4m+3} + \alpha_{k,4m+2}$$ (จากบทนิยาม 3.1.1)

$$= k\left(F_{k,4m+2}a + F_{k,4m+2}c + F_{k,4m+3}e\right)$$ (จาก $\mathrm{P}(m)$ เป็นจริง)

$$+ \left(\left(F_{k,4m+1} - 1\right)a + \left(F_{k,4m+1} + 1\right)c + F_{k,4m+2}e\right)$$

$$= \left(kF_{k,4m+2} + F_{k,4m+1} - 1\right)a + \left(kF_{k,4m+2} + F_{k,4m+1} + 1\right)c$$

$$+ \left(kF_{k,4m+3} + F_{k,4m+2}\right)e$$

$$= \left(F_{k,4m+3} - 1\right)a + \left(F_{k,4m+3} + 1\right)c + F_{k,4m+4}e$$ (จากบทนิยาม 2.1.3)

$$= \left(F_{k,4m+4-1} - 1\right)a + \left(F_{k,4m+4-1} + 1\right)c + F_{k,4m+4}e$$

$$= \left(F_{k,4(m+1)-1} - 1\right)a + \left(F_{k,4(m+1)-1} + 1\right)c + F_{k,4(m+1)}e$$

2.4) จะแสดงว่า $\alpha_{k,4(m+1)+1} = F_{k,4(m+1)}b + \left(F_{k,4(m+1)+1} + 1\right)d + \left(F_{k,4(m+1)+1} - 1\right)f$

พิจารณา

$$\alpha_{k,4(m+1)+1} = \alpha_{k,4m+5}$$

$$= k\beta_{k,4m+4} + \gamma_{k,4m+3}$$ (จากบทนิยาม 3.1.1)

$$= k\left(F_{k,4m+3}b + F_{k,4m+4}d + F_{k,4m+4}f\right) + \gamma_{k,4m+3}$$ (จากข้อ 2.2)

$$= k\left(F_{k,4m+3}b + F_{k,4m+4}d + F_{k,4m+4}f\right)$$ (จาก $\mathrm{P}(m)$ เป็นจริง)

$$+ \left(F_{k,4m+2}b + \left(F_{k,4m+3} + 1\right)d + \left(F_{k,4m+3} - 1\right)f\right)$$

$$=\left(kF_{k,4m+3}+F_{k,4m+2}\right)b+\left(kF_{k,4m+4}+F_{k,4m+3}+1\right)d$$
$$+\left(kF_{k,4m+4}+F_{k,4m+3}-1\right)f$$
$$=F_{k,4m+4}b+\left(F_{k,4m+5}+1\right)d+\left(F_{k,4m+5}-1\right)f$$ (จากบทนิยาม 2.1.3)
$$=F_{k,4m+4}b+\left(F_{k,4m+4+1}+1\right)d+\left(F_{k,4m+4+1}-1\right)f$$
$$=F_{k,4(m+1)}b+\left(F_{k,4(m+1)+1}+1\right)d+\left(F_{k,4(m+1)+1}-1\right)f$$

2.5) จะแสดงว่า $\beta_{k,4(m+1)+1}=F_{k,4(m+1)}a+F_{k,4(m+1)}c+F_{k,4(m+1)+1}e$

พิจารณา

$$\beta_{k,4(m+1)+1}=\beta_{k,4m+5}$$
$$=k\left(\frac{\alpha_{k,4m+4}+\gamma_{k,4m+4}}{2}\right)+\beta_{k,4m+3}$$ (จากบทนิยาม 3.1.1)
$$=\frac{k\alpha_{k,4m+4}}{2}+\frac{k\gamma_{k,4m+4}}{2}+\beta_{k,4m+3}$$
$$=\frac{k\left(\left(F_{k,4m+3}+1\right)a+\left(F_{k,4m+3}-1\right)c+F_{k,4m+4}e\right)}{2}$$ (จากข้อ 2.1 และข้อ 2.3)
$$+\frac{k\left(\left(F_{k,4m+3}-1\right)a+\left(F_{k,4m+3}+1\right)c+F_{k,4m+4}e\right)}{2}$$
$$+\beta_{k,4m+3}$$
$$=\frac{k\left(\left(F_{k,4m+3}+1\right)a+\left(F_{k,4m+3}-1\right)c+F_{k,4m+4}e\right)}{2}$$ (จาก $\mathrm{P}(m)$ เป็นจริง)
$$+\frac{k\left(\left(F_{k,4m+3}-1\right)a+\left(F_{k,4m+3}+1\right)c+F_{k,4m+4}e\right)}{2}$$
$$+\left(F_{k,4m+2}a+F_{k,4m+2}c+F_{k,4m+3}e\right)$$
$$=\frac{\left(2kF_{k,4m+3}\right)a+\left(2kF_{k,4m+3}\right)c+\left(2kF_{k,4m+4}\right)e}{2}$$
$$+\left(F_{k,4m+2}a+F_{k,4m+2}c+F_{k,4m+3}e\right)$$
$$=\left(kF_{k,4m+3}a+kF_{k,4m+3}c+kF_{k,4m+4}e\right)+\left(F_{k,4m+2}a+F_{k,4m+2}c+F_{k,4m+3}e\right)$$
$$=\left(kF_{k,4m+3}+F_{k,4m+2}\right)a+\left(kF_{k,4m+3}+F_{k,4m+2}\right)c+\left(kF_{k,4m+4}+F_{k,4m+3}\right)e$$
$$=F_{k,4m+4}a+F_{k,4m+4}c+F_{k,4m+5}e$$ (จากบทนิยาม 2.1.3)

$$= F_{k,4m+4}a + F_{k,4m+4}c + F_{k,4m+4+1}e$$

$$= F_{k,4m+4}a + F_{k,4m+4}c + F_{k,4m+4+1}e$$

2.6) จะแสดงว่า $\gamma_{k,4(m+1)+1} = F_{k,4(m+1)}b + \left(F_{k,4(m+1)+1} - 1\right)d + \left(F_{k,4(m+1)+1} + 1\right)f$

พิจารณา

$\gamma_{k,4(m+1)+1} = \gamma_{k,4m+5}$

$= k\beta_{k,4m+4} + \alpha_{k,4m+3}$ (จากบทนิยาม 3.1.1)

$= k\left(F_{k,4m+3}b + F_{k,4m+4}d + F_{k,4m+4}f\right) + \alpha_{k,4m+3}$ (จากข้อ 2.2)

$= k\left(F_{k,4m+3}b + F_{k,4m+4}d + F_{k,4m+4}f\right) + \left(F_{k,4m+2}b + \left(F_{k,4m+3} - 1\right)d + \left(F_{k,4m+3} + 1\right)f\right)$ (จาก $\mathrm{P}(m)$ เป็นจริง)

$= \left(kF_{k,4m+3} + F_{k,4m+2}\right)b + \left(kF_{k,4m+4} + F_{k,4m+3} - 1\right)d + \left(kF_{k,4m+4} + F_{k,4m+3} + 1\right)f$

$= F_{k,4m+4}b + \left(F_{k,4m+5} - 1\right)d + \left(F_{k,4m+5} + 1\right)f$ (จากบทนิยาม 2.1.3)

$= F_{k,4m+4}b + \left(F_{k,4m+4+1} - 1\right)d + \left(F_{k,4m+4+1} + 1\right)f$

$= F_{k,4(m+1)}b + \left(F_{k,4(m+1)+1} - 1\right)d + \left(F_{k,4(m+1)+1} + 1\right)f$

2.7) จะแสดงว่า $\alpha_{k,4(m+1)+2} = \left(F_{k,4(m+1)+1} - 1\right)a + \left(F_{k,4(m+1)+1} + 1\right)c + F_{k,4(m+1)+2}e$

พิจารณา

$\alpha_{k,4(m+1)+2} = \alpha_{k,4m+6}$

$= k\beta_{k,4m+5} + \gamma_{k,4m+4}$ (จากบทนิยาม 3.1.1)

$= k\left(F_{k,4m+4}a + F_{k,4m+4}c + F_{k,4m+5}e\right) + \left(\left(F_{k,4m+3} - 1\right)a + \left(F_{k,4m+3} + 1\right)c + F_{k,4m+4}e\right)$ (จากข้อ 2.3 และข้อ 2.5)

$= \left(kF_{k,4m+4} + F_{k,4m+3} - 1\right)a + \left(kF_{k,4m+4} + F_{k,4m+3} + 1\right)c + \left(kF_{k,4m+5} + F_{k,4m+4}\right)e$

$= \left(F_{k,4m+5} - 1\right)a + \left(F_{k,4m+5} + 1\right)c + F_{k,4m+6}e$ (จากบทนิยาม 2.1.3)

$$=\left(F_{k,4m+4+1}-1\right)a+\left(F_{k,4m+4+1}+1\right)c+F_{k,4m+4+2}e$$
$$=\left(F_{k,4(m+1)+1}-1\right)a+\left(F_{k,4(m+1)+1}+1\right)c+F_{k,4(m+1)+2}e$$

2.8) จะแสดงว่า $\beta_{k,4(m+1)+2}=F_{k,4(m+1)+1}b+F_{k,4(m+1)+2}d+F_{k,4(m+1)+2}f$

พิจารณา

$$\beta_{k,4(m+1)+2}=\beta_{k,4m+6}$$
$$=k\left(\frac{\alpha_{k,4m+5}+\gamma_{k,4m+5}}{2}\right)+\beta_{k,4m+4} \qquad \text{(จากบทนิยาม 3.1.1)}$$
$$=\frac{\alpha_{k,4m+5}}{2}+\frac{\gamma_{k,4m+5}}{2}+\beta_{k,4m+4}$$
$$=\frac{k\left(F_{k,4m+4}b+\left(F_{k,4m+5}+1\right)d+\left(F_{k,4m+5}-1\right)f\right)}{2} \qquad \text{(จากข้อ 2.2 ข้อ 2.4 และข้อ 2.6)}$$
$$+\frac{k\left(F_{k,4m+4}b+\left(F_{k,4m+5}-1\right)d+\left(F_{k,4m+5}+1\right)f\right)}{2}$$
$$+\left(F_{k,4m+3}b+F_{k,4m+4}d+F_{k,4m+4}f\right)$$
$$=\frac{\left(2kF_{k,4m+4}\right)b+\left(2kF_{k,4m+5}\right)d+\left(2kF_{k,4m+5}\right)f}{2}$$
$$+\left(F_{k,4m+3}b+F_{k,4m+4}d+F_{k,4m+4}f\right)$$
$$=kF_{k,4m+4}b+kF_{k,4m+5}d+kF_{k,4m+5}f+F_{k,4m+3}b+F_{k,4m+4}d+F_{k,4m+4}f$$
$$=\left(kF_{k,4m+4}+F_{k,4m+3}\right)b+\left(kF_{k,4m+5}+F_{k,4m+4}\right)d+\left(kF_{k,4m+5}+F_{k,4m+4}\right)f$$
$$=F_{k,4m+5}b+F_{k,4m+6}d+F_{k,4m+6}f \qquad \text{(จากบทนิยาม 2.1.3)}$$
$$=F_{k,4m+4+1}b+F_{k,4m+4+2}d+F_{k,4m+4+2}f$$
$$=F_{k,4(m+1)+1}b+F_{k,4(m+1)+2}d+F_{k,4(m+1)+2}f$$

2.9) จะแสดงว่า $\gamma_{k,4(m+1)+2}=\left(F_{k,4(m+1)+1}+1\right)a+\left(F_{k,4(m+1)+1}-1\right)c+F_{k,4(m+1)+2}e$

พิจารณา

$$\gamma_{k,4(m+1)+2}=\gamma_{k,4m+6}$$
$$=k\beta_{k,4m+5}+\alpha_{k,4m+4} \qquad \text{(จากบทนิยาม 3.1.1)}$$

$$= k\left(F_{k,4m+4}a + F_{k,4m+4}c + F_{k,4m+5}e\right)$$ (จากข้อ 2.1 และข้อ 2.5)
$$+\left(\left(F_{k,4m+3}+1\right)a + \left(F_{k,4m+3}-1\right)c + F_{k,4m+4}e\right)$$

$$= \left(kF_{k,4m+4} + F_{k,4m+3} + 1\right)a + \left(kF_{k,4m+4} + F_{k,4m+3} - 1\right)c$$
$$+\left(kF_{k,4m+5} + F_{k,4m+4}\right)e$$

$$= \left(F_{k,4m+5}+1\right)a + \left(F_{k,4m+5}-1\right)c + F_{k,4m+6}e$$ (จากบทนิยาม 2.1.3)

$$= \left(F_{k,4m+4+1}+1\right)a + \left(F_{k,4m+4+1}-1\right)c + F_{k,4m+4+2}e$$

$$= \left(F_{k,4(m+1)+1}+1\right)a + \left(F_{k,4(m+1)+1}-1\right)c + F_{k,4(m+1)+2}e$$

2.10) จะแสดงว่า $\alpha_{k,4(m+1)+3} = F_{k,4(m+1)+2}b + \left(F_{k,4(m+1)+3}-1\right)d + \left(F_{k,4(m+1)+3}+1\right)f$

พิจารณา

$$\alpha_{k,4(m+1)+3} = \alpha_{k,4m+7}$$

$$= k\beta_{k,4m+6} + \gamma_{k,4m+5}$$ (จากบทนิยาม 3.1.1)

$$= k\left(F_{k,4m+5}b + F_{k,4m+6}d + F_{k,4m+6}f\right)$$ (จากข้อ 2.6 และข้อ 2.8)
$$+\left(F_{k,4m+4}b + \left(F_{k,4m+5}-1\right)d + \left(F_{k,4m+5}+1\right)f\right)$$

$$= \left(kF_{k,4m+5} + F_{k,4m+4}\right)b + \left(kF_{k,4m+6} + F_{k,4m+5} - 1\right)d$$
$$+\left(kF_{k,4m+6} + F_{k,4m+5} + 1\right)f$$

$$= F_{k,4m+6}b + \left(F_{k,4m+7}-1\right)d + \left(F_{k,4m+7}+1\right)f$$ (จากบทนิยาม 2.1.3)

$$= F_{k,4m+4+2}b + \left(F_{k,4m+4+3}-1\right)d + \left(F_{k,4m+4+3}+1\right)f$$

$$= F_{k,4(m+1)+2}b + \left(F_{k,4(m+1)+3}-1\right)d + \left(F_{k,4(m+1)+3}+1\right)f$$

2.11) จะแสดงว่า $\beta_{k,4(m+1)+3} = F_{k,4(m+1)+2}a + F_{k,4(m+1)+2}c + F_{k,4(m+1)+3}e$

พิจารณา

$$\beta_{k,4(m+1)+3} = \beta_{k,4m+7}$$

$$= k\left(\frac{\alpha_{k,4m+6} + \gamma_{k,4m+6}}{2}\right) + \beta_{k,4m+5}$$ (จากบทนิยาม 3.1.1)

$$= \frac{k\alpha_{k,4m+6}}{2} + \frac{k\gamma_{k,4m+6}}{2} + \beta_{k,4m+5}$$

$$= \frac{k\left(\left(F_{k,4m+5}-1\right)a+\left(F_{k,4m+5}+1\right)c+F_{k,4m+6}e\right)}{2} \quad \text{(จากข้อ 2.5 ข้อ 2.7 และข้อ 2.9)}$$

$$+\frac{k\left(\left(F_{k,4m+5}+1\right)a+\left(F_{k,4m+5}-1\right)c+F_{k,4m+6}e\right)}{2}$$

$$+\left(F_{k,4m+4}a+F_{k,4m+4}c+F_{k,4m+5}e\right)$$

$$= \frac{\left(2kF_{k,4m+5}-1+1\right)a+\left(2kF_{k,4m+5}-1+1\right)c+\left(2kF_{k,4m+6}\right)e}{2}$$

$$+F_{k,4m+4}a+F_{k,4m+4}c+F_{k,4m+5}e$$

$$= kF_{k,4m+5}a+kF_{k,4m+5}c+kF_{k,4m+6}e+F_{k,4m+4}a+F_{k,4m+4}c+F_{k,4m+5}e$$

$$= \left(kF_{k,4m+5}+F_{k,4m+4}\right)a+\left(kF_{k,4m+5}+F_{k,4m+4}\right)c+\left(kF_{k,4m+6}+F_{k,4m+5}\right)e$$

$$= F_{k,4m+6}a+F_{k,4m+6}c+F_{k,4m+7}e \quad \text{(จากบทนิยาม 2.1.3)}$$

$$= F_{k,4m+4+2}a+F_{k,4m+4+2}c+F_{k,4m+4+3}e$$

$$= F_{k,4(m+1)+2}a+F_{k,4(m+1)+2}c+F_{k,4(m+1)+3}e$$

2.12) จะแสดงว่า $\gamma_{k,4(m+1)+3}=F_{k,4(m+1)+2}b+\left(F_{k,4(m+1)+3}+1\right)d+\left(F_{k,4(m+1)+3}-1\right)f$

พิจารณา

$$\gamma_{k,4(m+1)+3}=\gamma_{k,4m+7}$$

$$= k\beta_{k,4m+6}+\alpha_{k,4m+5} \quad \text{(จากบทนิยาม 3.1.1)}$$

$$= k\left(F_{k,4m+5}b+F_{k,4m+6}d+F_{k,4m+6}f\right)$$

$$+\left(F_{k,4m+4}b+\left(F_{k,4m+5}+1\right)d+\left(F_{k,4m+5}-1\right)f\right) \quad \text{(จากข้อ 2.4 และข้อ 2.8)}$$

$$= \left(kF_{k,4m+5}+F_{k,4m+4}\right)b+\left(kF_{k,4m+6}+F_{k,4m+5}+1\right)d$$

$$+\left(kF_{k,4m+6}+F_{k,4m+5}-1\right)f$$

$$= F_{k,4m+6}b+\left(F_{k,4m+7}+1\right)d+\left(F_{k,4m+7}-1\right)f \quad \text{(จากบทนิยาม 2.1.3)}$$

$$= F_{k,4m+4+2}b+\left(F_{k,4m+4+3}+1\right)d+\left(F_{k,4m+4+3}-1\right)f$$

$$= F_{k,4(m+1)+2}b+\left(F_{k,4(m+1)+3}+1\right)d+\left(F_{k,4(m+1)+3}-1\right)f$$

จาก 2.1) - 2.12) ได้ว่า $P(m+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ ■

ตัวอย่างที่ 3.3.1 กำหนดให้ $k=2$ และ $a=b=c=d=e=f=1$

จะได้ว่า $\alpha_{2,0}=2, \beta_{2,0}=1, \gamma_{2,0}=2, \alpha_{2,1}=2, \beta_{2,1}=1$ และ $\gamma_{2,1}=2$

จากทฤษฎีบท 3.3.1 ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\alpha_{2,4n} &= \left(F_{2,4n-1}+1\right)+\left(F_{2,4n-1}-1\right)+F_{2,4n} \\
\beta_{2,4n} &= F_{2,4n-1}b+F_{2,4n}d+F_{2,4n}f \\
\gamma_{2,4n} &= \left(F_{2,4n-1}-1\right)+\left(F_{2,4n-1}+1\right)+F_{2,4n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{2,4n+1} &= F_{2,4n}+\left(F_{2,4n+1}+1\right)+\left(F_{2,4n+1}-1\right) \\
\beta_{2,4n+1} &= F_{2,4n}+F_{2,4n}c+F_{2,4n+1}e \\
\gamma_{2,4n+1} &= F_{2,4n}+\left(F_{2,4n+1}-1\right)+\left(F_{2,4n+1}+1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{2,4n+2} &= \left(F_{2,4n+1}-1\right)+\left(F_{2,4n+1}+1\right)+F_{2,4n+2} \\
\beta_{2,4n+2} &= F_{2,4n+1}+F_{2,4n+2}+F_{2,4n+2} \\
\gamma_{2,4n+2} &= \left(F_{2,4n+1}+1\right)+\left(F_{2,4n+1}-1\right)+F_{2,4n+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{2,4n+3} &= F_{2,4n+2}+\left(F_{2,4n+3}-1\right)+\left(F_{2,4n+3}+1\right) \\
\beta_{2,4n+3} &= F_{2,4n+2}+F_{2,4n+2}+F_{2,4n+3} \\
\gamma_{2,4n+3} &= F_{2,4n+2}+\left(F_{2,4n+3}+1\right)+\left(F_{2,4n+3}-1\right)
\end{aligned}
$$

เลือก $n=2$ จะได้ว่า

$$\alpha_{2,8}=\left(F_{2,7}+1\right)+\left(F_{2,7}-1\right)+F_{2,8}$$

$=(169+1)+(169-1)+408$ จาก $\mathrm{F}_{2,7}=169$ และ $\mathrm{F}_{2,8}=408$

$=746$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$$\beta_{2,8}=F_{2,7}+F_{2,8}+F_{2,8}$$

$=169+408+408$ จาก $\mathrm{F}_{2,7}=169$ และ $\mathrm{F}_{2,8}=408$

$=985$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$$\gamma_{2,8}=\left(F_{2,7}-1\right)+\left(F_{2,7}+1\right)+F_{2,8}$$

$=(169-1)+(169+1)+408$ จาก $\mathrm{F}_{2,7}=169$ และ $\mathrm{F}_{2,8}=408$

$=746$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$\alpha_{2,9} = F_{2,8} + \left(F_{2,9} + 1\right) + \left(F_{2,9} - 1\right)$

$= 408 + (985 + 1) + (985 - 1)$ จาก $F_{2,8} = 408$ และ $F_{2,9} = 985$

$= 2378$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$\beta_{2,9} = F_{2,8} + F_{2,8} + F_{2,9}$

$= 408 + 408 + 985$ จาก $F_{2,8} = 408$ และ $F_{2,9} = 985$

$= 1801$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$\gamma_{2,9} = F_{2,8} + \left(F_{2,9} - 1\right) + \left(F_{2,9} + 1\right)$

$= 408 + (985 - 1) + (985 + 1)$ จาก $F_{2,8} = 408$ และ $F_{2,9} = 985$

$= 2378$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$\alpha_{2,10} = \left(F_{2,9} - 1\right) + \left(F_{2,9} + 1\right) + F_{2,10}$

$= (985 - 1) + (985 + 1) + 2378$ จาก $F_{2,9} = 985$ และ $F_{2,10} = 2378$

$= 4348$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$\beta_{2,10} = F_{2,9} + F_{2,10} + F_{2,10}$

$= 985 + 2378 + 2378$ จาก $F_{2,9} = 985$ และ $F_{2,10} = 2378$

$= 5741$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$\gamma_{2,10} = \left(F_{2,9} + 1\right) + \left(F_{2,9} - 1\right) + F_{2,10}$

$= (985 + 1) + (985 - 1) + 2378$ จาก $F_{2,9} = 985$ และ $F_{2,10} = 2378$

$= 4348$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$\alpha_{2,11} = F_{2,10} + \left(F_{2,11} - 1\right) + \left(F_{2,11} + 1\right)$

$= 2378 + (5741 - 1) + (5741 + 1)$ จาก $F_{2,10} = 2378$ และ $F_{2,11} = 5741$

$= 13860$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$\beta_{2,11} = F_{2,10} + F_{2,10} + F_{2,11}$

$= 2378 + 2378 + 5741$ จาก $F_{2,10} = 2378$ และ $F_{2,11} = 5741$

$= 10497$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

$$\gamma_{2,11}=F_{2,10}+\left(F_{2,11}+1\right)+\left(F_{2,11}-1\right)$$

$=2378+(5741+1)+(5741-1)$ จาก $\mathrm{F}_{2,10}=2378$ และ $\mathrm{F}_{2,11}=5741$

$=13860$ ซึ่งมีค่าตรงกับตารางที่ 3.2

นอกจากนี้จากตัวอย่างที่ 2.1.6 ได้ว่า $\mathrm{F}_{2,n}=\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{n}}{2\sqrt{2}}$

พิจารณา

$$\alpha_{2,20}=\left(F_{2,19}+1\right)+\left(F_{2,19}-1\right)+F_{2,20}$$

$$=\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{19}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{19}}{2\sqrt{2}}+1\right)+\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{19}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{19}}{2\sqrt{2}}-1\right)$$

$$+\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{20}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{20}}{2\sqrt{2}}$$

$$=29244646$$

$$\alpha_{2,21}=F_{2,20}b+\left(F_{2,21}+1\right)d+\left(F_{2,21}-1\right)f$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{20}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{20}}{2\sqrt{2}}+\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{21}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{21}}{2\sqrt{2}}+1\right)$$

$$+\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{21}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{21}}{2\sqrt{2}}-1\right)$$

$$=93222358$$

$$\alpha_{2,22}=\left(F_{2,21}-1\right)a+\left(F_{2,21}+1\right)c+F_{2,22}e$$

$$=\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{21}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{21}}{2\sqrt{2}}-1\right)+\left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{21}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{21}}{2\sqrt{2}}+1\right)$$

$$+\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{22}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{22}}{2\sqrt{2}}$$

$$=170450288$$

$$\alpha_{2,23} = F_{2,22}b + \left(F_{2,23} - 1\right)d + \left(F_{2,23} + 1\right)f$$

$$= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{22} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{22}}{2\sqrt{2}} + \left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{23} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{23}}{2\sqrt{2}} - 1\right)$$

$$+ \left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{23} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{23}}{2\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$= 543339720$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ทฤษฎีบทและบทแทรกต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.2 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ได้ว่า

$$\alpha_{k,4n} - \gamma_{k,4n} = \alpha_{k,0} - \gamma_{k,0}$$
$$\alpha_{k,4n+1} - \gamma_{k,4n+1} = \alpha_{k,1} - \gamma_{k,1}$$
$$\alpha_{k,4n+2} - \gamma_{k,4n+2} = \gamma_{k,0} - \alpha_{k,0}$$
$$\alpha_{k,4n+3} - \gamma_{k,4n+3} = \gamma_{k,1} - \alpha_{k,1}$$

บทแทรก 3.3.1 สำหรับ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

$$\alpha_{k,n} - \gamma_{k,n} = \begin{cases} \alpha_{k,0} - \gamma_{k,0} & \text{ถ้า } n \equiv 0 \pmod 4 \\ \alpha_{k,1} - \gamma_{k,1} & \text{ถ้า } n \equiv 1 \pmod 4 \\ \gamma_{k,0} - \alpha_{k,0} & \text{ถ้า } n \equiv 2 \pmod 4 \\ \gamma_{k,1} - \alpha_{k,1} & \text{ถ้า } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

เอกสารอ้างอิง

[1] K. T. Atanassov, L. C. Atanassova and A. G. Shannon. On Combined 3-Fibonacci Sequences, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 28(4), (2022), 764-785.

[2] C. Bolat and H. Kose. On the Properties of k-Fibonacci Numbers, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 5(22), (2010), 1097-1105.

[3] S. Falcon and A. Plaza. On the k-Fibonacci Numbers, Chaos, Solitons and Fractals, 32(5), (2007), 1615-1624.

[4] S. Falcon and A. Plaza. The k-Fibonacci Sequence and the Pascal 2-triangle, Chaos, Solitons and Fractals, 33(1), (2007), 38-49.

[5] V. K. Gupta, Y. K. Panwar and O. Sikhwal. Generalized Fibonacci Sequences, Theoretical Mathematics & Applications, 2(2), (2012), 115-124.

[6] D. Kalman and R. Mena. The Fibonacci Numbers-Exposed, The Mathematical Magazine, 76(3), (2002), 167-181.

[7] T. Koshy. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, New York, Wiley-Interscience, (2001).

[8] Y. K. Panwar. A Note on the Generalized k-Fibonacci Sequence, MTU Journal of Engineering and Natural Sciences, 2(2), (2021), 29-39.

[9] A. Suvarnamani and M. Tatong. Some Properties of (p,q)-Fibonacci Numbers, Science and Technology RMUTT Journal, 5(2), (2015), 17-21.

[10] ธานินทร์ สิทธิวิรัชธรรม. เอกสารประกอบการสอนวิชา 422324 คณิตศาสตร์เชิงการจัดและการประยุกต์, (2556).

[11] สรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี, นที ทองศิริ. วิยุตคณิต. เชียงใหม่, บริษัท กลางเวียงการพิมพ์ จำกัด, (2552).

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ - สกุล	นายณัฐดนัย ตุลาชม
ประวัติการศึกษา	สำเร็จการศึกษามัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนสามัคคีวิทยาคม จังหวัดเชียงราย ปีการศึกษา 2557
	สำเร็จการศึกษาปริญญาตรี ศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยสวนดุสิต ปีการศึกษา 2563
ประสบการณ์	ปี 2563 - 2565 รับราชการ ตำแหน่ง ครูผู้ช่วย โรงเรียนบ้านศรีเวียง จังหวัดเชียงราย
	ปี 2565 - ปัจจุบัน รับราชการ ตำแหน่ง ครู โรงเรียนบ้านศรีเวียง จังหวัดเชียงราย