



จัดเรียงกับบันทึกล้านนา

โดย

นางสาววรรณิษา อภัยรัตน์

นักศึกษาชั้นปีที่ 3

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

# กิตติกรรมประกาศ

การทำวิจัยเรื่อง จัตุรัสกัลกับยันต์โทน ประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ด้วยดี เนื่องด้วยความ  
กรุณา ของ ดร.อติชาติ เกตตะพันธ์ อาจารย์ที่ปรึกษาการทำวิจัยทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้ให้ความรู้ ให้  
คำปรึกษา แนะนำมาโดยตลอด จนกระทั่งการวิจัยประสบผลสำเร็จเป็นอย่างดี ข้าพเจ้าขอขอบคุณเป็นอย่าง  
สูง มา ณ โอกาสนี้ ขอขอบคุณ โครงการพัฒนากำลังคนด้านวิทยาศาสตร์ ที่ได้ให้การสนับสนุนในการทำ  
วิจัย รวมถึงขอขอบคุณครูบาอาจารย์ทุกท่าน ที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้แก่ข้าพเจ้า ท้ายที่สุดนี้ข้าพเจ้า  
ขอขอบคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และเพื่อนๆทุกคนที่คอยเป็นกำลังใจและให้ความช่วยเหลือ ทำให้การทำวิจัยนี้  
ประสบความสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

วรรณิษา อภัยรัตน์

พฤษภาคม 2556

หัวข้องานวิจัย จัตุรัสกลกับยันต์โทน

ผู้จัดทำ นางสาววรรณิษา อภัยรัตน์

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.อดิชาติ เกตตะพันธุ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

## บทคัดย่อ

การทำวิจัยเรื่องจัตุรัสกลกับยันต์โทน มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษายันต์โทนชนิดหนึ่งของล้านนาในเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งมีลักษณะเป็นจัตุรัสกล ขนาด  $4 \times 4$  และมีรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจหลายประการ ซึ่งยันต์ลูกนี้เคยมีผู้ศึกษามาก่อนแล้ว แต่ยังไม่เคยมีการระบุถึงระเบียบวิธีการลงตัวเลข ซึ่งผู้วิจัยเห็นว่าการลงตัวเลขให้มีความสัมพันธ์ที่สวยงามทางคณิตศาสตร์ดังเช่นที่พบในยันต์โทนลูกนี้ จะต้องมีการที่เป็นแบบแผนอย่างแน่นอน ผู้วิจัยจึงศึกษาค้นคว้าหาระเบียบวิธีการเขียนเลขลงในยันต์ โดยใช้ความรู้เรื่องจัตุรัสกล (Magic Square) แบบต่างๆ เนื่องจากจัตุรัสกลบางชนิดนั้นได้มีการศึกษาและระบุได้ถึงวิธีการลงตัวเลขไว้ อย่างชัดเจน[4]

จากการศึกษา ผู้วิจัยสามารถสร้างระเบียบวิธีการลงตัวเลขได้สำเร็จ นอกจากนี้ยังพบว่าจัตุรัสกลขนาด  $4 \times 4$  ที่มีสมบัติแบบเหมือนกับยันต์ต้นแบบนั้น ไม่ได้มีเพียงแบบเดียว เพราะผู้วิจัยสามารถยกตัวอย่างจัตุรัสกลขนาด  $4 \times 4$  รูปแบบอื่นที่มีสมบัติแบบเหมือนกับยันต์ต้นแบบได้

# สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
สารบัญ	ค
<b>บทที่ 1 บทนำ</b>	<b>1</b>
ที่มาและความสำคัญ	1
วัตถุประสงค์	2
ขอบเขตการศึกษา	2
ระยะเวลาการดำเนินงานวิจัย	2
วิธีการดำเนินงานวิจัย	2
ประโยชน์ที่ได้รับ	3
<b>บทที่ 2 ความรู้เบื้องต้นที่เกี่ยวข้อง</b>	<b>4</b>
จัตุรัสกาล (Magic Square)	4
วิธีการสร้างจัตุรัสกาล	5
ตัวอย่างจัตุรัสกาลอันดับสี่แบบต่างๆ	7
ลักษณะขั้นต้นโทน	8
<b>บทที่ 3 ผลการศึกษา</b>	<b>18</b>
พิสูจน์สมบัติบางประการ	18
วิธีการลงตัวเลขในขั้นต้นโทน	27
จัตุรัสกาล (Magic Square) ที่มีสมบัติคล้ายขั้นต้นโทนต้นแบบ	30
<b>บทที่ 4 สรุปผลและข้อเสนอแนะ</b>	<b>32</b>
บรรณานุกรม	33

# บทที่ 1

## บทนำ

### ที่มาและความสำคัญ

จัตุรัสกลคือผลงานทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่ง โดยเป็นการบรรจุตัวเลขลงในตารางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $n \times n$  แล้วทำให้ผลรวมของตัวเลขในแต่ละแถว เท่ากับผลรวมของตัวเลขในแต่ละหลัก และเท่ากับผลรวมของตัวเลขในแต่ละแนวทแยงมุม

จัตุรัสกลมีมายาวนาน ปรากฏหลักฐานในหลายสถานที่ทั่วทุกมุมโลก เช่น จัตุรัส Lo Shu บนกระดองเต่าของจีน พบในหนังสืออี้จิง (Yih King) เป็นต้น ซึ่งนอกจากจัตุรัสกลจะเป็นงานทางคณิตศาสตร์แล้ว หลายชนชาติยังถือเป็นเรื่องราง ของขลัง เช่น ชาวล้านนาโบราณได้ใช้ความมหัศจรรย์ของตัวเลขนี้ในยันต์ นั่นคือยันต์โทนชนิดหนึ่งของล้านนา ซึ่งมีความเชื่อว่าจะทำให้เดินทางปลอดภัย โดยยันต์ล้านนาจะมีอักษรล้านนาโบราณเขียนอยู่บนแผ่นยันต์ ทั้งที่เป็นตัวอักษรและที่เป็นตัวเลข เช่น พับโหรายันต์ วิชาตุคำ ตำบลหายยา อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ พับคาถายันต์ วัดดอกเอื้อง ตำบลศรีภูมิ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ เป็นต้น แม้แต่ในกำแพงเมืองเชียงใหม่ ในส่วนของจารึกประตูท่าแพก็ปรากฏเป็นตัวเลขที่เรียกว่าเลขในธัมม์ ซึ่งสลักไว้อย่างพิสดาร ทั้งนี้ตัวเลขที่อยู่บนยันต์ทั้งหลายล้วนแฝงไว้ด้วยความหมายและความสัมพันธ์ซึ่งกัน โดยในแต่ละยันต์จะมีรูปแบบการลงตัวเลขแตกต่างกันไป ซึ่งตัวเลขมีความสัมพันธ์กันในเชิงคณิตศาสตร์และมีสมบัติที่น่าสนใจหลายประการ ดังบทความเรื่อง จัตุรัสมหัศจรรย์ของล้านนา ผลงานของอาจารย์ยุทธพร นาคสุข ในวารสารสภากาชาดธรรม จังหวัดเชียงใหม่ ฉบับที่ 7 ประจำเดือน พฤษภาคม-กรกฎาคม พ.ศ. 2543 ซึ่งยันต์โทนลูกนี้ได้รับการคัดลอกสืบต่อกันมาจนถึงปัจจุบัน แต่ยังไม่มีการระบุระเบียบวิธีการเขียนตัวเลขลงในยันต์นี้

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษายันต์โทนชนิดนี้ในเชิงคณิตศาสตร์จึงต้องการค้นคว้าระเบียบวิธีการเขียนตัวเลขลงในยันต์ดังกล่าว โดยใช้ความรู้เรื่องจัตุรัสกล (Magic Square) ต่างๆเป็นแนวทาง เช่น Albrecht Dürer's magic square Sagrada Familia magic square เป็นต้น ซึ่งหากเราค้นพบระเบียบวิธีการลงเลขในยันต์ได้ก็จะเป็นประโยชน์ต่อการจำและนำไปใช้มากขึ้น รวมถึงสามารถเป็นแนวทางและแรงบันดาลใจให้ผู้สนใจได้ศึกษาความมหัศจรรย์ของยันต์ล้านนาแบบอื่นๆต่อไป

## วัตถุประสงค์

- 1) เพื่อศึกษายันต์โทนชนิดหนึ่งของล้านนา และสามารถนำความองค์รู้ทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ได้
- 2) เพื่อศึกษาค้นคว้า หาระบบวิธีการ การเขียนตัวเลขลงในยันต์โทน
- 3) เพื่อพัฒนาทักษะกระบวนการคิดอย่างเป็นระบบ และ ฝึกประสบการณ์การทำวิจัยให้มากยิ่งขึ้น

## ขอบเขตการศึกษา

ศึกษายันต์โทนชนิดหนึ่งของล้านนา และค้นคว้าหาวิธีการเขียนตัวเลขลงในยันต์ดังกล่าว โดยใช้ความรู้ เรื่องจัตุรัสกล (Magic Square) และองค์ความรู้คณิตศาสตร์

## ระยะเวลาการดำเนินงานวิจัย

25 มีนาคม 2556 – 25 พฤษภาคม 2556

## วิธีการดำเนินงานวิจัย

- 1) เลือกงานวิจัยที่สนใจ และเป็นประโยชน์ต่อการศึกษา
- 2) ติดต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิจัย
- 3) ค้นหา รวบรวมข้อมูล จากแหล่งความรู้ต่างๆ
- 4) ทำความเข้าใจกับเนื้อหา และข้อมูลที่ได้อมา พร้อมทั้งปรึกษาอาจารย์เมื่อเกิดข้อสงสัย
- 5) สรุปผลที่ได้รับจากการทำวิจัย
- 6) จัดทำรายงานการวิจัย

## ประโยชน์ที่ได้รับ

- 1) ได้เรียนรู้เกี่ยวกับเลขล้านนา และยันต์โทนของล้านนา รวมถึงการนำองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์และความรู้เกี่ยวกับ จัตุรัสกล ( Magic Square) มาประยุกต์ใช้
- 2) ได้ฝึกทักษะกระบวนการคิดและแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 3) ได้พัฒนาทักษะกระบวนการวางแผนการทำงาน
- 4) ได้เรียนรู้การทำวิจัย และสามารถนำไปปรับใช้ในการศึกษาในระดับสูงขึ้นได้

# บทที่ 2

## ความรู้เบื้องต้นที่เกี่ยวข้อง

### 1. จัตุรัสกาล (Magic Square)

จัตุรัสกาล (Magic Square) หมายถึง ตารางที่มีจำนวนช่องในแนวดิ่ง(หลัก)และจำนวนช่องในแนวนอน(แถว)เท่ากัน ภายในแต่ละช่องของตารางจะมีตัวเลขจำนวนเต็มหนึ่งจำนวนที่ไม่ซ้ำกับตัวเลขในช่องอื่นๆ โดยตัวเลขจากทุกช่องจะเป็นจำนวนนับที่เรียงกัน และผลบวกของตัวเลขทั้งหมดในแต่ละแนวนอน(แถว)เท่ากัน และเท่ากับผลบวกของตัวเลขจากทุกช่องในแต่ละแนวดิ่ง(หลัก) และยังเท่ากับผลบวกของตัวเลขจากทุกช่องในแต่ละแนวทแยงมุมด้วย เช่น

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

สังเกตว่าตารางขนาด 3x3 ผลบวกของตัวเลขทั้งหมดในแต่ละแถวคือ 15 เท่ากับผลบวกของตัวเลขจากทุกช่องในแต่ละหลัก และยังเท่ากับผลบวกของตัวเลขจากทุกช่องในแต่ละแนวทแยงมุมด้วย ในทำนองเดียวกัน ตารางขนาด 4x4 ผลบวกของตัวเลขทั้งหมดในแต่ละแถวคือ 34 เท่ากับผลบวกของตัวเลขจากทุกช่องในแต่ละหลัก และยังเท่ากับผลบวกของตัวเลขจากทุกช่องในแต่ละแนวทแยงมุมด้วย



จัตุรัสกาล (Magic Square) อันดับ  $n$  คือ การเรียงตัวเลขซึ่งมีทั้งหมด  $n^2$  จำนวน ลงในตารางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $n \times n$  ซึ่งผลบวกของตัวเลขทุกตัวในแต่ละแถว หลัก และแนวทแยงจะเท่ากับค่าคงตัวค่าหนึ่ง เรียกว่า ค่าคงตัวกาล (magic constant) หรือ ผลบวกกาล ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า  $n$  และมีค่าเท่ากับ

$$M(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

## 2. วิธีการสร้างจัตุรัสกาล

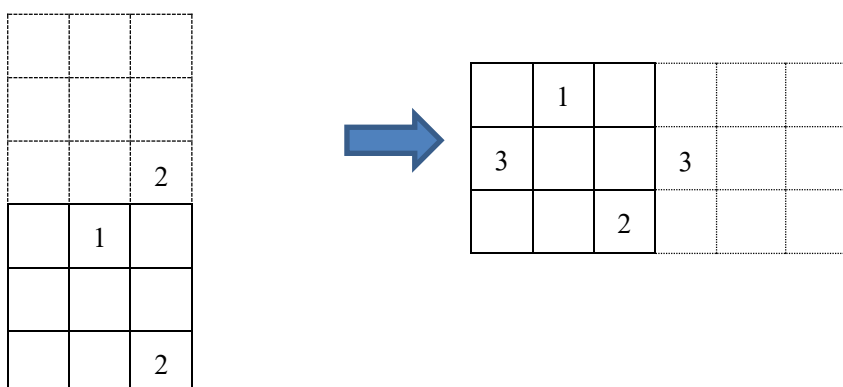
### ▪ อันดับคี่

การสร้าง จัตุรัสกาล ( Magic Square ) อันดับคี่ คือสร้างจัตุรัสกาลในกรณีที  $n$  เป็นจำนวนคี่ ในที่นี้จะยกตัวอย่างจัตุรัส  $3 \times 3$  เนื่องจากเป็นจัตุรัสกาลที่ทำความเข้าใจได้ง่ายที่สุด ส่วนในกรณี  $5 \times 5, 7 \times 7, 9 \times 9$  และอันดับคี่อื่นๆก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน โดยใช้ขั้นตอนต่อไปนี้

1. เขียนเลข 1 ลงในช่องตรงกลางแถวบนสุด

	1	

2. เขียนเลขต่อไปในช่องแนวทแยงขึ้นบน โดยจินตนาการถึงการต่อตารางจัตุรัส



3. ถ้าในช่องที่จะใส่เลขถัดไปมีเลขอื่นแล้ว ให้ใส่ตัวเลขถัดไปลงในช่องด้านล่างเลขเดิม

	1	
3		
4		2

4. ทำตามขั้นตอนที่ 1 2 และ 3 จนใส่เลขครบทุกช่อง

8	1	6
3	5	7
4	9	2

#### ■ อันดับคู่

การสร้าง จัตุรัสกาล ( Magic Square ) อันดับคู่ คือสร้างจัตุรัสกาลในกรณีที่  $n$  เป็นจำนวนที่จัตุรัสกาลอันดับคู่ มีวิธีการสร้างที่หลากหลายสำหรับจัตุรัสกาลอันดับคู่ขนาดใดขนาดหนึ่งเป็นการเฉพาะ ในที่นี้จะยกตัวอย่างกรณีที่  $n = 4$  เนื่องจากเป็นจัตุรัสกาลอันดับคู่ที่สามารถทำความเข้าใจได้ง่ายที่สุด และเกี่ยวข้องโดยตรงกับงานวิจัยนี้ ส่วนกรณีอันดับคู่อื่นๆ จะมีความแตกต่างกันเล็กน้อย ซึ่งสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากแหล่งความรู้ต่างๆ

ขั้นตอนการสร้าง

1. เขียนตัวเลขเรียงตามลำดับตั้งแต่ 1 ถึง  $n^2 = 4^2 = 16$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2. สลับตัวเลขที่อยู่ในแนวทแยงมุม ตามลูกศร ดังรูป

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

3. จะได้ จัตุรัสกอลอันดับ 4 (Magic Square order 4)

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

3. ตัวอย่างจัตุรัสกอลอันดับสี่แบบต่างๆ

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

อินเดีย

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Sagrada Família magic square

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Albrecht Dürer's magic square

#### 4. ลักษณะยันต์โทน



ภาพจากหนังสือยันต์และคาถาของดีเมืองเหนือ ของอินสม ไชยชมภู หน้า 130

แปลงเป็นตัวเลขอารบิกได้ดังนี้

16	14	18	8
19	7	17	13
10	10	12	14
11	15	9	21

เลขในตารางช่อง แถวที่สามหลักที่สอง ผู้วิจัยมีความเห็นว่าควรเป็น 20 ซึ่งจากเหตุผลหลายประการ คือ

1. มีการคัดลอกสืบทอดกันมายาวนานอาจเกิดความชำรุดเสียหายต่อต้นฉบับ ทำให้การคัดลอกต่อมาเกิดความผิดพลาด

2. เลข 1 กับเลข 2 ในภาษาล้านนา มีความคล้ายคลึงกันมาก อาจมีการคัดลอกมาผิดพลาดได้ โดยตัวเลขที่ใช้ในการเขียนอักษรล้านนามีอยู่ 2 ระบบ คือ เลขโหรา ใช้ในการเขียนบอกจำนวนในเอกสารต่างๆ ทัวไป ส่วนเลขในธัมม์นิยมใช้เขียนกับเรื่องราวทางศาสนา ซึ่งมักจะเป็นเอกสารประเภทใบลาน ซึ่งขอแสดงลักษณะตัวเลขในภาษาล้านนาไว้ด้านล่างนี้

เลขไทย	เลขโหรา	เลขในธัมม์
๑	ง	๑
๒	จ	໒
๓	ข	໓
๔	ง	໔
๕	ງ	໕
๖	ด	໖
๗	ด	໗
๘	ด	໘
๙	ด	໙
๐	๐	໐

ภาพจาก <http://www.dek-d.com/board/view.php?id=2072298>

3. ลักษณะความสัมพันธ์ของตัวเลขในเชิงคณิตศาสตร์ทำให้คาดการณ์ได้ว่า ตัวเลขควรจะเป็น 20 เนื่องจากจะทำให้ผลบวกของตัวเลขในแต่ละแถว เท่ากับผลบวกของตัวเลขในแต่ละหลัก และเท่ากับผลบวกของตัวเลขในแต่ละแนวทแยงมุม นั่นคือ 56 ซึ่งจะทำให้ยันต์โทนลูกนี้มีสมบัติเป็นจัตุรัสกอล ขนาด 4x4 ดังนั้นตารางที่ถูกต้องควรเป็นตารางนี้

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

ซึ่งเมื่อนำตารางด้านบนมาต่อกันจะได้ตารางขนาดใหญ่ดังด้านล่าง โดยที่สมบัติต่างๆที่จะกล่าวต่อไป  
ยังเป็นจริงและสอดคล้องกัน

16	14	18	8	16	14	18	8	16	14	18	8
19	7	17	13	19	7	17	13	19	7	17	13
10	20	12	14	10	20	12	14	10	20	12	14
11	15	9	21	11	15	9	21	11	15	9	21
16	14	18	8	16	14	18	8	16	14	18	8
19	7	17	13	19	7	17	13	19	7	17	13
10	20	12	14	10	20	12	14	10	20	12	14
11	15	9	21	11	15	9	21	11	15	9	21
16	14	18	8	16	14	18	8	16	14	18	8
19	7	17	13	19	7	17	13	19	7	17	13
10	20	12	14	10	20	12	14	10	20	12	14
11	15	9	21	11	15	9	21	11	15	9	21

**สมบัติ** ( จากบทความของอาจารย์ยุทธพร นาคสุข และการค้นคว้าของ ดร.อดิชาติ เกตตะพันธุ์ )

### ผลบวก

1. ผลบวกของตัวเลขในแถวเดียวกัน แต่ละแถวใดๆมีค่าเท่ากับ 56 เสมอ (อาจารย์ยุทธพร นาคสุข)

$$16+14+18+8 = 56$$

$$19+7+17+13 = 56$$

$$10+20+12+14 = 56$$

$$11+15+9+21 = 56$$

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

2. ผลบวกของตัวเลขในหลักเดียวกัน แต่ละหลักใดๆมีค่าเท่ากับ 56 เสมอ (อาจารย์ยุทธพร นาคสุข)

$$16+19+10+11 = 56$$

$$14+7+20+15 = 56$$

$$18+17+12+9 = 56$$

$$8+13+14+21 = 56$$

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

3. ผลบวกของตัวเลขในแนวทแยงมุมเดียวกัน แต่ละแนวใดๆมีค่าเท่ากับ 56 เสมอ(อาจารย์ยุทธพร นาคสุข)

ซึ่งเป็นจริงสำหรับกรณีของการต่อตารางด้วย (ตารางที่ 2 และ 3 มองในลักษณะของการต่อตาราง)

(ดร.อติชาติ เกตตะพันธุ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$16+7+12+21 = 56$$

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$10+7+18+21 = 56$$

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$10+15+18+13 = 56$$

$$11+20+17+8 = 56$$

$$16+15+12+13 = 56$$

$$19+14+9+14 = 56$$

4. ผลรวมของตัวเลขในตาราง 2x2 ใดๆ จะได้ 56 เสมอ ดังตัวอย่าง (อาจารย์ยุทธพร นาคสุข)

$$16+14+19+7 = 56$$

$$18+8+17+13 = 56$$

$$10+20+11+15 = 56$$

$$12+14+9+21 = 56$$

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

## 5. ผลบวกแต่ละคู่ติดกันดังภาพมีค่าเท่ากัน (อาจารย์ยุทธพร นาคสุข)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$16+14 = 17+13 = 10+20 = 9+21 = 30$$

$$18+8 = 19+7 = 12+14 = 11+15 = 26$$

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$16+19 = 20+15 = 18+17 = 14+21 = 35$$

$$10+11 = 14+7 = 12+9 = 8+13 = 21$$

ในกรณีของการต่อตารางก็เป็นไปในทำนองเดียวกัน (ดร.อดิชาติ เกตตะพันธุ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$6+8 = 7+17 = 10+14 = 15+9 = 24$$

$$14+18 = 19+13 = 20+12 = 11+21 = 32$$

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$16+11 = 7+20 = 18+9 = 13+14 = 27$$

$$19+10 = 14+15 = 18+9 = 8+21 = 29$$

ถ้ามองในลักษณะของการต่อตาราง ตัวเลขในหลักที่ 1 กับหลักที่ 4 เป็นตัวเลขที่ติดกัน และตัวเลขในแถวที่ 1 กับหลักที่ 4 ก็เป็นตัวเลขที่ติดกันเช่นกัน

## 6. ผลรวมตัวเลขแต่ละสีดังภาพมีค่าเป็น 56 เสมอ ดังตัวอย่าง (ดร.อดิชาติ เกตตะพันธุ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21



7. เมื่อระบายสีเป็นตารางหมากฮอส จะได้ว่าผลรวมของตัวเลขในช่องสีขาว เท่ากับผลรวมของตัวเลขในช่องสีดำ คือ 112 (ดร.อติชาต เกตตะพันธุ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

8. ทุกจัตุรัส ขนาด  $2 \times 2$   $3 \times 3$  และ  $4 \times 4$  ผลรวมของเลขที่มุม มีค่าเท่ากับ 56 เสมอ ดังตัวอย่าง (ดร.อติชาต เกตตะพันธุ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

9. มองแบบการเดินม้าหรือรูปตัว L ดังรูป แต่ละท่อนจะได้ผลบวกเป็น 61 ดังตัวอย่าง  
(ดร.อดิชาติ เกตตะพันธุ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

### ผลต่าง

1. ผลต่างของเลขหลักเดียวกันในแถวที่ต่างกันสองแถว จะมีค่าเท่ากันเสมอ ดังตัวอย่าง  
(ดร.อดิชาติ เกตตะพันธุ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$|16-10|=|14-20|=|18-12|=|8-14|=6$$

ในทำนองเดียวกัน ผลต่างของเลขแถวเดียวกันในหลักที่ต่างกันสองหลักจะมีค่าเท่ากันเสมอดังตัวอย่าง

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$|16-18|=|19-17|=|10-12|=|11-9|=2$$

2. ไม่ว่าเลือกจุดใดเป็นจุดกึ่งกลางของตาราง  $4 \times 4$  จะได้เลขแต่ละคู่จากศูนย์กลางไปทแยงมุมจะมีผลต่างเท่ากันเสมอ ในลักษณะของการต่อตารางก็เป็นเช่นเดียวกัน ดังตัวอย่าง (ดร.อดิชาติ เกตตะพันธุ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$|16-7|=|8-17|=|21-12|=|11-20|=9$$

8	16	14	18	8
13	19	7	17	13
14	10	20	12	14
21	11	15	9	21

$$|16-7|=|8-17|=|21-12|=|11-20|=9$$

3. ผลต่างของตัวเลขแต่ละคู่ที่อยู่ติดกัน ดังรูป จะมีค่าเท่ากันเสมอ ดังรูป (ดร.อดิชาติ เกตตะพันธุ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$|16-14|=2=|12-14| \quad |19-7|=12=|9-21| \quad |10-20|=10=|18-8| \quad |11-15|=4=|17-13|$$

4. ผลต่างของผลต่าง ของตัวเลขที่ติดกัน ในแถวเดียวกัน จะมีค่าเท่ากับผลต่างของผลต่าง ของตัวเลขที่ติดกัน ในแถวที่อยู่ห่างกันสองแถว (ดร.อดิชาติ เกตตะพันธุ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$||16-14|-|18-8|| = 8 = ||10-20|-|12-14||$$

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$||19-7|-|17-13|| = 8 = ||11-15|-|9-21||$$

ในการทำงานเดียวกันผลต่างของผลต่าง ของตัวเลขที่ติดกัน ในหลักเดียวกัน จะมีค่าเท่ากับ ผลต่างของผลต่าง ของตัวเลขที่ติดกัน ในหลักที่อยู่ห่างกันสองหลักด้วย

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$\|16-19\|-\|10-11\| = 2 = \|18-17\|-\|12-9\|$$

$$\|14-7\|-\|20-15\| = 2 = \|8-13\|-\|14-21\|$$

### ✚ กำลังสอง

1. ผลบวกเลขยกกำลังสองของแต่ละหลักจะเท่ากับหลักที่ตั้งห่างออกไปสองหลักดังรูป

(อาจารย์ยุทธพร นาคสุข)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$16^2 + 19^2 + 10^2 + 11^2 = 838 = 18^2 + 17^2 + 12^2 + 9^2$$

$$14^2 + 7^2 + 20^2 + 15^2 = 870 = 8^2 + 11^2 + 14^2 + 21^2$$

ในการทำงานเดียวกัน ผลบวกเลขยกกำลังสองของแต่ละแถวจะเท่ากับแถวที่ตั้งห่างออกไปสองแถว ดังรูป

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$16^2 + 14^2 + 18^2 + 8^2 = 840 = 10^2 + 20^2 + 12^2 + 14^2$$

$$19^2 + 7^2 + 17^2 + 13^2 = 868 = 11^2 + 15^2 + 9^2 + 21^2$$

2. ผลบวกกำลังสองของจัตุรัสขนาด  $2 \times 2$  ดังรูป มีค่าเท่ากัน ดังตัวอย่าง (ดร.อดิชาติ เกตตะพันธ์)

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

$$16^2 + 19^2 + 10^2 + 11^2 = 838 = 18^2 + 17^2 + 12^2 + 9^2$$

$$16^2 + 19^2 + 10^2 + 11^2 = 838 = 18^2 + 17^2 + 12^2 + 9^2$$

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

# บทที่ 3

## ผลการศึกษา


---

### ❖ พิสูจน์สมบัติบางประการ

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

สังเกตว่า จัตุรัสกรรูปแบบนี้มีเลขซ้ำ คือ 14 จึงไม่เหมือนกับจัตุรัสกรอันดับ  $n$  เมื่อ  $n$  คือจำนวนนับแต่มีสมบัติต่างๆสอดคล้องกับจัตุรัสกรอันดับ  $n$  และมีความมหัศจรรย์เชิงคณิตศาสตร์ ดังนั้น จึงต้องการแสดงว่าหาก นำค่าคงที่ไป บวกเพิ่ม ลบออก หรือ คูณเข้ากับตัวเลขทุกตัวในตาราง สมบัติต่างๆ จะยังเหมือนเดิมหรือไม่  
ในที่นี้จะแสดงเพียงสมบัติที่สำคัญ บางประการคือ

- ก. ผลรวมของตัวเลขในแต่ละแถว
- ข. ผลรวมของตัวเลขในแต่ละหลักและแต่ละแนวทแยงมุม
- ค. ผลรวมกำลังสองของตัวเลขในแต่ละแถว
- ง. ผลรวมกำลังสองของตัวเลขในแต่ละหลัก

 บวกเพิ่มด้วยค่าคงที่  $k$  เมื่อ  $k$  คือจำนวนเต็มใดๆ

$16+k$	$14+k$	$18+k$	$8+k$
$19+k$	$7+k$	$17+k$	$13+k$
$10+k$	$20+k$	$12+k$	$14+k$
$11+k$	$15+k$	$9+k$	$21+k$

ก. ผลรวมของตัวเลขในแต่ละแถว

แสดง

$$\text{แถวที่ 1: } (16 + k) + (14 + k) + (18 + k) + (8 + k) = 56 + 4k$$

$$\text{แถวที่ 2: } (19 + k) + (7 + k) + (17 + k) + (13 + k) = 56 + 4k$$

$$\text{แถวที่ 3: } (10 + k) + (20 + k) + (12 + k) + (14 + k) = 56 + 4k$$

$$\text{แถวที่ 4: } (11 + k) + (15 + k) + (9 + k) + (21 + k) = 56 + 4k$$

สังเกตว่าผลบวกของแต่ละแถว เท่ากับ  $56 + 4k$  หมดทุกแถว ดังนั้น สรุปได้ว่าเมื่อบวกเพิ่มด้วยค่าคงที่  $k$  ทุกตัวเลขในตาราง ผลรวมของแต่ละแถวจะเท่ากัน

ข. ผลรวมของตัวเลขในแต่ละหลัก

แสดง

$$\text{หลักที่ 1: } (16 + k) + (19 + k) + (10 + k) + (11 + k) = 56 + 4k$$

$$\text{หลักที่ 2: } (14 + k) + (7 + k) + (20 + k) + (15 + k) = 56 + 4k$$

$$\text{หลักที่ 3: } (18 + k) + (17 + k) + (12 + k) + (9 + k) = 56 + 4k$$

$$\text{หลักที่ 4: } (8 + k) + (13 + k) + (14 + k) + (21 + k) = 56 + 4k$$

สังเกตว่าผลบวกของแต่ละหลัก เท่ากับ  $56 + 4k$  หมดทุกหลัก ดังนั้นสรุปได้ว่าเมื่อบวกเพิ่มด้วยค่าคงที่  $k$  ทุกตัวเลขในตาราง ผลรวมของแต่ละหลักจะเท่ากัน ทุก  $k$  ที่เป็นจำนวนเต็มใดๆ

ผลรวมของตัวเลขในแต่ละแนวทแยงมุมก็แสดงได้ในทำนองเดียวกัน

ค. ผลรวมกำลังสองของตัวเลขในแต่ละแถว

แสดง

$$\text{แถวที่ 1: } (16 + k)^2 + (14 + k)^2 + (18 + k)^2 + (8 + k)^2$$

$$= 256 + 32k + k^2 + 196 + 28k + k^2 + 324 + 36k + k^2 + 64 + 16k + k^2$$

$$= 840 + 112k + 4k^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{แถวที่ 2: } & (19 + k)^2 + (7 + k)^2 + (17 + k)^2 + (13 + k)^2 \\
 & = 361 + 38k + k^2 + 49 + 14k + k^2 + 289 + 34k + k^2 + 169 + 26k + k^2 \\
 & = 868 + 112k + 4k^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{แถวที่ 3: } & (10 + k)^2 + (20 + k)^2 + (12 + k)^2 + (14 + k)^2 \\
 & = 100 + 20k + k^2 + 400 + 40k + k^2 + 144 + 24k + k^2 + 196 + 28k + k^2 \\
 & = 840 + 112k + 4k^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{แถวที่ 4: } & (11 + k)^2 + (15 + k)^2 + (9 + k)^2 + (21 + k)^2 \\
 & = 121 + 22k + k^2 + 225 + 30k + k^2 + 81 + 18k + k^2 + 441 + 42k + k^2 \\
 & = 868 + 112k + 4k^2
 \end{aligned}$$

สังเกตว่าผลรวมกำลังสองของแถวที่ 1 กับแถวที่ 3 เท่ากับ  $840 + 112k + 4k^2$  เท่ากัน และผลรวมกำลังสองของแถวที่ 2 กับแถวที่ 4 เท่ากับ  $868 + 112k + 4k^2$  เท่ากัน ทุกจำนวนเต็ม  $k$  ใดๆ

ง. ผลรวมกำลังสองของตัวเลขในแต่ละหลัก

แสดง

$$\begin{aligned}
 \text{หลักที่ 1: } & (16 + k)^2 + (19 + k)^2 + (10 + k)^2 + (11 + k)^2 \\
 & = 256 + 32k + k^2 + 361 + 38k + k^2 + 100 + 20k + k^2 + 121 + 22k + k^2 \\
 & = 838 + 112k + 4k^2
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 \text{หลักที่ 2: } & (14 + k)^2 + (7 + k)^2 + (20 + k)^2 + (15 + k)^2 \\
 & = 196 + 28k + k^2 + 49 + 14k + k^2 + 400 + 40k + k^2 + 225 + 30k + k^2 \\
 & = 870 + 112k + 4k^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{หลักที่ 3: } & (18 + k)^2 + (17 + k)^2 + (12 + k)^2 + (9 + k)^2 \\
 & = 324 + 36k + k^2 + 289 + 34k + k^2 + 144 + 24k + k^2 + 81 + 18k + k^2 \\
 & = 838 + 112k + 4k^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{หลักที่ 4: } & (8 + k)^2 + (13 + k)^2 + (14 + k)^2 + (21 + k)^2 \\
 & = 64 + 16k + k^2 + 169 + 26k + k^2 + 196 + 28k + k^2 + 441 + 42k + k^2 \\
 & = 870 + 112k + 4k^2
 \end{aligned}$$



สังเกตว่าผลรวมกำลังสองของหลักที่ 1 กับหลักที่ 3 เท่ากับ  $838 + 112k + 4k^2$  เท่ากัน และผลรวมกำลังสองของหลักที่ 2 กับหลักที่ 4 เท่ากับ  $870 + 112k + 4k^2$  เท่ากัน ทุกจำนวนเต็ม  $k$  ใดๆ

 **คูณด้วยค่าคงที่  $a$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ**

16a	14a	18a	8a
19a	7a	17a	13a
10a	20a	12a	14a
11a	15a	9a	21a

ก. ผลรวมของตัวเลขในแต่ละแถว

แสดง

$$\text{แถวที่ 1: } (16a) + (14a) + (18a) + (8a) = 56a$$

$$\text{แถวที่ 2: } (19a) + (7a) + (17a) + (13a) = 56a$$

$$\text{แถวที่ 3: } (10a) + (20a) + (12a) + (14a) = 56a$$

$$\text{แถวที่ 4: } (11a) + (15a) + (9a) + (21a) = 56a$$

สังเกตว่าผลบวกของแต่ละแถว เท่ากับ  $56a$  หมดทุกแถว ดังนั้น เมื่อคูณด้วยค่าคงที่  $a$  ทุกตัวเลขในตาราง ผลรวมของแต่ละแถวจะเท่ากัน ทุกจำนวนเต็ม  $a$  ใดๆ

ข. ผลรวมของตัวเลขในแต่ละหลักและแต่ละแนวทแยงมุม

แสดง

$$\text{หลักที่ 1: } (16a) + (19a) + (10a) + (11a) = 56a$$

$$\text{หลักที่ 2: } (14a) + (7a) + (20a) + (15a) = 56a$$

$$\text{หลักที่ 3: } (18a) + (17a) + (12a) + (9a) = 56a$$

$$\text{หลักที่ 4: } (8a) + (13a) + (14a) + (21a) = 56a$$

สังเกตว่าผลบวกของแต่ละหลัก เท่ากับ  $56a$  หมดทุกหลัก ดังนั้นเมื่อคูณด้วยค่าคงที่  $a$  ทุกตัวเลขในตาราง ผลรวมของแต่ละหลักจะเท่ากัน ทุกจำนวนเต็ม  $a$  ใดๆ

ผลรวมของตัวเลขในแต่ละแนวทแยงมุมก็แสดงได้ในทำนองเดียวกัน

ค. ผลรวมกำลังสองของตัวเลขในแต่ละแถว

แสดง

$$\begin{aligned}\text{แถวที่ 1: } & (16a)^2 + (14a)^2 + (18a)^2 + (8a)^2 \\ & = 256a^2 + 196a^2 + 324a^2 + 64 \\ & = 840a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{แถวที่ 2: } & (19a)^2 + (7a)^2 + (17a)^2 + (13a)^2 \\ & = 361a^2 + 49a^2 + 289a^2 + 169a^2 \\ & = 868a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{แถวที่ 3: } & (10a)^2 + (20a)^2 + (12a)^2 + (14a)^2 \\ & = 100a^2 + 400a^2 + 144a^2 + 196a^2 \\ & = 840a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{แถวที่ 4: } & (11 + k)^2 + (15 + k)^2 + (9 + k)^2 + (21 + k)^2 \\ & = 121a^2 + 225a^2 + 81a^2 + 441a^2 \\ & = 868a^2\end{aligned}$$

สังเกตว่าผลรวมกำลังสองของแถวที่ 1 กับแถวที่ 3 เท่ากับ  $840a^2$  เท่ากัน และผลรวมกำลังสองของแถวที่ 2 กับแถวที่ 4 เท่ากับ  $868a^2$  เท่ากัน ทุกจำนวนเต็ม  $a$  ใดๆ

ง. ผลรวมกำลังสองของตัวเลขในแต่ละหลัก

แสดง

$$\begin{aligned}\text{หลักที่ 1: } & (16a)^2 + (19a)^2 + (10a)^2 + (11a)^2 \\ & = 256a^2 + 361a^2 + 100a^2 + 121a^2 \\ & = 838a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{หลักที่ 2: } & (14a)^2 + (7a)^2 + (20a)^2 + (15a)^2 \\ & = 196a^2 + 49a^2 + 400a^2 + 225a^2 \\ & = 870a^2\end{aligned}$$

$$\text{หลักที่ 3: } (18 + k)^2 + (17 + k)^2 + (12 + k)^2 + (9 + k)^2$$

$$= 324a^2 + 289a^2 + 144a^2 + 81a^2$$


$$= 838a^2$$

$$\text{หลักที่ 4: } (8 + k)^2 + (13 + k)^2 + (14 + k)^2 + (21 + k)^2$$

$$= 64a^2 + 169a^2 + 196a^2 + 441a^2$$

$$= 870a^2$$

สังเกตว่าผลรวมกำลังสองของหลักที่ 1 กับหลักที่ 3 เท่ากับ  $838a^2$  เท่ากัน และผลรวมกำลังสองของหลักที่ 2 กับหลักที่ 4 เท่ากับ  $870a^2$  เท่ากัน ทุกจำนวนเต็ม  $a$  ใดๆ

 คุณด้วยค่าคงที่  $a$  และ บวกเพิ่มด้วยค่าคงที่  $k$  เมื่อ  $a$  และ  $k$  เป็นจำนวนเต็มใดๆ

$16a+k$	$14a+k$	$18a+k$	$8a+k$
$19a+k$	$7a+k$	$17a+k$	$13a+k$
$10a+k$	$20a+k$	$12a+k$	$14a+k$
$11a+k$	$15a+k$	$9a+k$	$21a+k$

ก. ผลรวมของตัวเลขในแต่ละแถว

แสดง

$$\text{แถวที่ 1: } (16a + k) + (14a + k) + (18a + k) + (8a + k) = 56a + 4k$$

$$\text{แถวที่ 2: } (19a + k) + (7a + k) + (17a + k) + (13a + k) = 56a + 4k$$

$$\text{แถวที่ 3: } (10a + k) + (20a + k) + (12a + k) + (14a + k) = 56a + 4k$$

$$\text{แถวที่ 4: } (11a + k) + (15a + k) + (9a + k) + (21a + k) = 56a + 4k$$

สังเกตว่าผลบวกของแต่ละแถว เท่ากับ  $56a + 4k$  หมดทุกแถว

ดังนั้น เมื่อคูณด้วยค่าคงที่  $a$  และ บวกเพิ่มด้วยค่าคงที่  $k$  ทุกตัวเลขในตาราง จะได้ว่าผลรวมของแต่ละแถวจะเท่ากัน

ข. ผลรวมของตัวเลขในแต่ละหลักและแต่ละแนวทแยงมุม

แสดง

$$\text{หลักที่ 1: } (16a + k) + (19a + k) + (10a + k) + (11a + k) = 56a + 4k$$

$$\text{หลักที่ 2: } (14a + k) + (7a + k) + (20a + k) + (15a + k) = 56a + 4k$$

$$\text{หลักที่ 3: } (18a + k) + (17a + k) + (12a + k) + (9a + k) = 56a + 4k$$

$$\text{หลักที่ 4: } (8a + k) + (13a + k) + (14a + k) + (21a + k) = 56a + 4k$$

สังเกตว่าผลบวกของแต่ละหลัก เท่ากับ  $56a + 4k$  หมดทุกหลัก

ดังนั้น เมื่อคูณด้วยค่าคงที่  $a$  และ บวกเพิ่มด้วยค่าคงที่  $k$  ทุกตัวเลขในตาราง ผลรวมของแต่ละหลักจะเท่ากับผลรวมของตัวเลขในแต่ละแนวทแยงมุมก็แสดงได้ในทำนองเดียวกัน

ค. ผลรวมกำลังสองของตัวเลขในแต่ละแถว

แสดง

$$\text{แถวที่ 1: } (16a + k)^2 + (14a + k)^2 + (18a + k)^2 + (8a + k)^2$$

$$= 256a^2 + 32ak + k^2 + 196a^2 + 28ak + k^2 + 324a^2 + 36ak + k^2 + 64a^2 + 16ak + k^2$$

$$= 840a^2 + 112ak + 4k^2$$

$$\text{แถวที่ 2: } (19a + k)^2 + (7a + k)^2 + (17a + k)^2 + (13a + k)^2$$

$$= 361a^2 + 38ak + k^2 + 49a^2 + 14k + k^2 + 289a^2 + 34k + k^2 + 169a^2 + 26k + k^2$$

$$= 868a^2 + 112k + 4k^2$$

$$\text{แถวที่ 3: } (10a + k)^2 + (20a + k)^2 + (12a + k)^2 + (14a + k)^2$$

$$= 100a^2 + 20ak + k^2 + 400a^2 + 40ak + k^2 + 144a^2 + 24ak + k^2 + 196a^2 + 28ak + k^2$$

$$= 840a^2 + 112k + 4k^2$$

$$\text{แถวที่ 4: } (11a + k)^2 + (15a + k)^2 + (9a + k)^2 + (21a + k)^2$$

$$= 121a^2 + 22ak + k^2 + 225a^2 + 30ak + k^2 + 81a^2 + 18ak + k^2 + 441a^2 + 42ak + k^2$$

$$= 868a^2 + 112k + 4k^2$$

สังเกตว่าผลรวมกำลังสองของแถวที่ 1 กับแถวที่ 3 เท่ากับ  $840a^2 + 112k + 4k^2$  เท่ากัน และผลรวมกำลังสองของแถวที่ 2 กับแถวที่ 4 เท่ากับ  $868a^2 + 112k + 4k^2$  เท่ากัน ทุกจำนวนเต็ม  $a$  และ  $k$  ใดๆ

ง. ผลรวมกำลังสองของตัวเลขในแต่ละหลัก

แสดง

$$\text{หลักที่ 1: } (16a + k)^2 + (19a + k)^2 + (10a + k)^2 + (11a + k)^2$$

$$\begin{aligned} &= 256a^2 + 32ak + k^2 + 361a^2 + 38ak + k^2 + 100a^2 + 20ak + k^2 + 121a^2 + 22ak + k^2 \\ &= 838a^2 + 112k + 4k^2 \end{aligned}$$

$$\text{หลักที่ 2: } (14a + k)^2 + (7a + k)^2 + (20a + k)^2 + (15a + k)^2$$

$$\begin{aligned} &= 196a^2 + 28ak + k^2 + 49a^2 + 14ak + k^2 + 400a^2 + 40ak + k^2 + 225a^2 + 30ak + k^2 \\ &= 870a^2 + 112k + 4k^2 \end{aligned}$$

$$\text{หลักที่ 3: } (18a + k)^2 + (17a + k)^2 + (12a + k)^2 + (9a + k)^2$$

$$\begin{aligned} &= 324a^2 + 36ak + k^2 + 289a^2 + 34ak + k^2 + 144a^2 + 24ak + k^2 + 81a^2 + 18ak + k^2 \\ &= 838a^2 + 112k + 4k^2 \end{aligned}$$

$$\text{หลักที่ 4: } (8a + k)^2 + (13a + k)^2 + (14a + k)^2 + (21a + k)^2$$

$$\begin{aligned} &= 64a^2 + 28ak + k^2 + 169a^2 + 14ak + k^2 + 196a^2 + 40ak + k^2 + 441a^2 + 30ak + k^2 \\ &= 870a^2 + 112ak + 4k^2 \end{aligned}$$

สังเกตว่าผลรวมกำลังสองของหลักที่ 1 กับหลักที่ 3 เท่ากับ  $838a^2 + 112k + 4k^2$  เท่ากัน และผลรวมกำลังสองของหลักที่ 2 กับหลักที่ 4 เท่ากับ  $870a^2 + 112ak + 4k^2$  เท่ากัน ทุกจำนวนเต็ม  $a$  และ  $k$  ใดๆ

สมบัติที่กล่าวมาทั้งหมดในเบื้องต้นนั้น สามารถอธิบายได้อย่างกระชับด้วยตารางด้านล่างนี้

$x+2$	$x$	$x+4$	$x-6$
$x+5$	$x-7$	$x+3$	$x-1$
$x-4$	$x+6$	$x-2$	$x$
$x-3$	$x+1$	$x-5$	$x+7$

โดยที่  $x$  คือ จำนวนเต็มใดๆ ตัวอย่างเช่น ถ้า  $x = 14$  ก็จะได้ตารางที่เหมือนกับจัตุรัสกลในอันดับโทนตันแบบ ถ้าค่า  $x$  เปลี่ยนไปตารางก็จะเปลี่ยน แต่สมบัติทั้งหลายที่พบก็ยังคงเป็นจริง ไม่ว่าจะเป็น

ผลบวก ผลต่าง หรือผลบวกกำลังสอง ซึ่งสามารถแสดงได้โดยง่าย ในที่นี้จะขอยกตัวอย่าง กรณีผลบวก และผลบวกกำลังสอง เพื่อเป็นแนวทาง ในการทำความเข้าใจ

### ผลบวก

#### แสดง

$$\text{แถวที่ 1: } (x + 2) + (x) + (x + 4) + (x - 6) = 4x$$

$$\text{แถวที่ 2: } (x + 5) + (x - 7) + (x + 3) + (x - 1) = 4x$$

$$\text{แถวที่ 3: } (x - 4) + (x + 6) + (x - 2) + (x) = 4x$$

$$\text{แถวที่ 4: } (x - 3) + (x + 1) + (x - 5) + (x + 7) = 4x$$

สังเกตว่า ในแต่ละแถว และแต่ละหลัก ผลบวกจะเท่ากับ  $4x$  นั่นคือ ถ้า  $x = 14$  จะได้ว่าตารางจัตุรัสกลนี้จะเหมือนกับยันต์โทนตันแบบ ซึ่งผลรวมของแต่ละแถว จะมีค่าเท่ากับ  $4 \times 14 = 56$  และผลบวกแต่ละหลัก ผลบวกแต่ละแนวทแยงมุม ก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

### ผลบวกกำลังสอง

#### แสดง

$$\text{แถวที่ 1: } (x + 2)^2 + (x)^2 + (x + 4)^2 + (x - 6)^2 = 4x^2 + 56$$

$$\text{แถวที่ 2: } (x + 5)^2 + (x - 7)^2 + (x + 3)^2 + (x - 1)^2 = 4x^2 + 84$$

$$\text{แถวที่ 3: } (x - 4)^2 + (x + 6)^2 + (x - 2)^2 + (x)^2 = 4x^2 + 56$$

$$\text{แถวที่ 4: } (x - 3)^2 + (x + 1)^2 + (x - 5)^2 + (x + 7)^2 = 4x^2 + 84$$

สังเกตว่าผลบวกกำลังสองแถวที่ 1 และแถวที่ 3 เท่ากัน

$$(x + 2)^2 + (x)^2 + (x + 4)^2 + (x - 6)^2 = 4x^2 + 56 = (x - 4)^2 + (x + 6)^2 + (x - 2)^2 + (x)^2$$

นั่นคือ ถ้า  $x = 14$  จะได้ว่าตารางจัตุรัสกลนี้จะเหมือนกับยันต์โทนตันแบบ ซึ่งผลรวมกำลังสองของ

$$\text{แถวที่ 1 และแถวที่ 3 จะมีค่าเท่ากับ } (4 \times 14^2) + 56 = (4 \times 196) + 56 = 840$$

แถวที่ 2 กับแถวที่ 4 และ กรณีผลบวกกำลังสองตามหลักและตามแนวทแยงมุมก็แสดงได้ในทำนองเดียวกัน

## ❖ วิธีการลงตัวเลขในยันต์โทน

## แบบที่ 1

ขั้นที่ 1 เขียนตัวเลขเรียงตามลำดับตั้งแต่ 7 ถึง 14 ในแถวที่ 1 และ 2 จากนั้นเขียนตัวเลขเรียงตามลำดับตั้งแต่ 14 ถึง 21 ในแถวที่ 3 และ 4 ดังรูป

7	8	9	10
11	12	13	14
14	15	16	17
18	19	20	21

ขั้นที่ 2 สลับตัวเลข ตามลูกศร ดังรูป

7	8	9	10
11	12	13	14
14	15	16	17
18	19	20	21

จะได้ตารางใหม่คือ

7	20	19	10
17	12	13	14
14	15	16	11
18	9	8	21

ขั้นที่ 3 สลับหลักที่ 1 กับ หลักที่ 4 จะได้

10	20	19	7
14	12	13	17
11	15	16	14
21	9	8	18

จากนั้นนำตัวเลขที่ได้ไปเขียนใหม่ตามแถว โดยวนตามลูกศรตามลำดับ ดังรูป

10	20	19	7
14	12	13	17
11	15	16	14
21	9	18	18

จะได้ตัวเลขที่อยู่ในอันดับโทนต้นแบบตามต้องการ

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

แบบที่ 2

ขั้นที่ 1 เขียนตัวเลขเรียงตามลำดับตั้งแต่ 7 ถึง 14 ในแถวที่ 1 และ 2 จากนั้นเขียนตัวเลขเรียงตามลำดับตั้งแต่ 14 ถึง 21 ในแถวที่ 3 และ 4 ดังรูป

7	8	9	10
11	12	13	14
14	15	16	17
18	19	20	21

ขั้นที่ 2 สลับตัวเลขที่อยู่ในแนวทแยงมุม ตามลูกศร ดังรูป

7	8	9	10
11	12	13	14
14	15	16	17
18	19	20	21



จะได้ตารางใหม่คือ

21	8	9	18
11	16	15	14
14	13	12	17
10	19	20	7

ขั้นที่ 3 สลับหลักที่ 2 กับ หลักที่ 3 จะได้

21	9	8	18
11	15	16	14
14	12	12	17
10	20	19	7

จากนั้นนำตัวเลขที่ได้ไปเขียนใหม่ตามแถว โดยวนตามลูกศรตามลำดับ ดังรูป

21	9	8	18
11	15	16	14
14	12	13	17
10	20	19	7

จะได้ตัวเลขที่อยู่ในอันดับโทนตามต้องการ

16	14	18	8
19	7	17	13
10	20	12	14
11	15	9	21

## ❖ จัตุรัสกอล ( Magic Square ) ที่มีสมบัติคล้ายยันต์โทนต้นแบบ

12	17	13	14
20	7	19	10
15	14	16	11
9	18	8	21

วิธีการลงตัวเลข

ขั้นที่ 1 เขียนตัวเลขเรียงตามลำดับตั้งแต่ 7 ถึง 14 ในแถวที่ 1 และ 2 จากนั้นเขียนตัวเลขเรียงตามลำดับตั้งแต่ 14 ถึง 21 ในแถวที่ 3 และ 4 ดังรูป

7	8	9	10
11	12	13	14
14	15	16	17
18	19	20	21

ขั้นที่ 2 สลับตัวเลข ตามลูกศร ดังรูป

7	8	9	10
11	12	13	14
14	15	16	17
18	19	20	21

จะได้ตารางใหม่คือ

7	20	19	10
17	12	13	14
14	15	16	11
18	9	8	21

ขั้นที่ 3 สลับ แถวที่ 1 กับแถวที่ 2 จะได้

17	12	13	14
7	20	19	10
14	15	16	11
18	9	8	21

จากนั้นสลับหลักที่ 1 กับหลักที่ 2 จะได้ จัตุรัสกลที่มีคุณสมบัติเหมือนกับตัวเลขที่พบในขั้นต้น  
ดังรูป

12	17	13	14
20	7	19	10
15	14	16	11
9	18	8	21

## บทที่ 4

# สรุปผลและข้อเสนอแนะ

### สรุปผล

งานวิจัยเรื่องจักรัสกลกับยัติโตนแบ่งเป็น 4 บท คือ บทนำ บทความรู้เบื้องต้นที่เกี่ยวข้อง บทผลการศึกษากับบทสรุปผล ในบทความรู้เบื้องต้น ประกอบด้วย ความรู้เกี่ยวกับจักรัสกล วิธีการสร้างจักรัสกลทั้งอันดับคู่และอันดับคี่ และตัวอย่างจักรัสกลขนาด 4x4 แบบต่างๆ รวมถึงลักษณะของยัติโตนที่ศึกษา พร้อมด้วยสมบัติที่น่าสนใจ ทั้งสมบัติในส่วนของผลบวก ผลต่าง และผลบวกกำลังสอง ส่วนในบทที่สาม ผู้วิจัยได้พิสูจน์สมบัติทั่วไปของจักรัสกลที่พบบนยัติโตนในเชิงคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ ยังได้สร้างระเบียบวิธีการเขียนตัวเลขลงในจักรัสกลดังกล่าว แต่เนื่องจากยังไม่มี การค้นพบบันทึกใดๆ ที่กล่าวถึงระเบียบวิธีการลงยัติโตนนี้ จึงยังไม่สามารถสรุปได้ว่าวิธีนี้เป็นวิธีเดียวกับที่ผู้คิดค้นยัติโตนใช้หรือไม่ อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้ก็สามารถสร้างระเบียบวิธีการลงเลขในยัติโตนที่คาดว่าเป็นวิธีที่เป็นไปได้มากที่สุด ณ ขณะนี้ อีกทั้งยังสามารถใช้วิธีการนี้สร้างจักรัสกลที่มีสมบัติเหมือนกับที่พบในยัติโตนต้นแบบ ด้วยตัวเลขชุดอื่นๆ ได้ พร้อมทั้งยกตัวอย่างการสร้างจักรัสกลที่ต่างกัน แต่มีสมบัติเหมือนกับที่พบในยัติโตนต้นแบบ เพื่อประกอบการทำความเข้าใจมากยิ่งขึ้น

### ข้อเสนอแนะ

1. ควรศึกษาเพิ่มเติมว่ามีวิธีใดบ้างที่สามารถสร้างจักรัสกลในลักษณะนี้ เพื่อศึกษาความเป็นไปได้มากที่สุด และควรค้นคว้าข้อมูลในหลายแขนงที่เกี่ยวข้อง และศึกษาให้ลึกซึ้งมากขึ้น
2. ค้นคว้าเพิ่มเติมว่าสามารถสร้างจักรัสกลอันดับอื่นๆ ที่มีเลขซ้ำแบบเดียวกับยัติโตนต้นแบบ โดยอิงจากวิธีดังกล่าว แล้วสมบัติต่างๆ จะยังคงครบถ้วนหรือไม่
3. ควรมีการศึกษาสมบัติของยัติโตนหลายๆ แบบ ในเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นประโยชน์ต่อการประมวลข้อมูลสำหรับการสร้างวิธีการลงยัติโตน ที่เป็นไปได้มากที่สุด
4. จักรัสกลที่มีเลขซ้ำมากกว่าหนึ่งตัว จะสามารถสร้างให้มีสมบัติในลักษณะเดียวกับยัติโตนต้นแบบได้หรือไม่

## บรรณานุกรม

- [1] สันต์ ท. โกมลบุตร (2552). จดหมายเหตุ ลา ลูแบร์ ราชอาณาจักรสยาม .พิมพ์ครั้งที่ 3. นนทบุรี :สำนักพิมพ์ศรีปัญญา
- [2] อินสม ไชยชมภู (ไม่ปรากฏปีที่พิมพ์). ยันต์และคาถาของดีเมืองเหนือ . ลำพูน :ร้านภิญโญ.หน้า 130
- [3] ยุทธพร นาคสุข.(2543).วารสารสภาวัฒนธรรม จังหวัดเชียงใหม่ ฉบับที่ 7. เชียงใหม่
- [4] สันติ อธิพิณาวกุล. Magic Square. สืบค้นเมื่อ 10 พฤษภาคม 2556 จาก  
[http://mathematics.satitpatumwan.ac.th/7\\_innovation/Magic%20Square.pdf](http://mathematics.satitpatumwan.ac.th/7_innovation/Magic%20Square.pdf)
- [5] สุรศักดิ์ พงศ์พันธุ์สุข กลุ่มวิจัยและพัฒนานิวเคลียร์ สถาบันเทคโนโลยีนิวเคลียร์แห่งชาติ (องค์การมหาชน).จัตุรัสกลและเลขกล. สืบค้นเมื่อ 15 พฤษภาคม 2556 จาก  
<http://www0.tint.or.th/nkc/nkc54/content-01/nstkc54-022.html>
- [6] Magic Square. สืบค้นเมื่อ 15 พฤษภาคม 2556 จาก [http://en.wikipedia.org/wiki/Magic\\_square](http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square)
- [7]เลขล้านนา. สืบค้นเมื่อ 15 พฤษภาคม 2556 จาก <http://www.dekd.com/board/view.php?id=2072298>