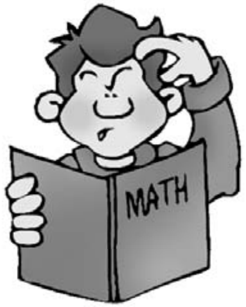
บทที่ 1

การแก้โจทย์ปัญหาและการคิดเชิงวิพากษ์



อาจารย์ ดร.อติชาต เกตตะพันธุ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

www.atichart.com

kettapun@gmail.com

โจทย์ก่อนเข้าสู่บทเรียน

- ถ้าคุณเป็นผู้จัดการของบริษัทแห่งหนึ่ง แล้วหนึ่งในพนักงานที่ดีที่สุดซึ่งมีค่ามากกว่าที่จะไล่ออก ได้เริ่มมาทำงานสายแทบทุกเช้า คุณจะทำอย่างไรเพื่อแก้ปัญหาของการมาทำงานตรงเวลาของพนักงานคนนี้อย่างไร

1.1 การให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย

วัตถุประสงค์

1. เข้าใจและสามารถใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย
2. เข้าใจและสามารถใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัย

คณิตศาสตร์ในชีวิตของคุณ

- หลายคนได้ใช้คณิตศาสตร์ในการคำนวณที่ยุ่งยากซับซ้อน แก้กระบวนการทางพีชคณิตที่ดูไม่มีความหมาย และถูกขู่ให้กลัวด้วยกลุ่มของสมการ
- ในความเป็นจริง คณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่ทรงพลัง นั่นคือ เราสามารถใช้สำรวจโลกและจักรวาล และอธิบายว่ามันทำงานอย่างไร
- คำว่า “คณิตศาสตร์” มาจากคำว่า *คณิต* (<u>การนับ</u> หรือ <u>คำนวณ</u>) และ *ศาสตร์* (<u>ความรู้</u> หรือ <u>การศึกษา</u>) ซึ่งรวมกันมีความหมายโดยทั่วไปว่า การศึกษาเกี่ยวกับการคำนวณ หรือ วิชาที่เกี่ยวกับการคำนวณ

คณิตศาสตร์ในชีวิตของคุณ

- คำว่า “คณิตศาสตร์” ตรงกับคำภาษาอังกฤษว่า *mathematics* มาจากคำภาษากรีก mathematikos ซึ่งแปลว่า “รักที่จะเรียนรู้”
- ในอเมริกาเหนือนิยมย่อ mathematics ว่า *math* ส่วนประเทศอื่นๆ ที่ใช้ภาษาอังกฤษนิยมย่อว่า *maths*
- ในรายวิชา Math100 จะแสดงให้เห็นว่าคณิตศาสตร์สามารถถูกนำไปใช้ประยุกต์ในชีวิตในรูปแบบที่น่าสนใจและมีความหมาย
- การเข้าใจตรรกศาสตร์จะช่วยให้เราตัดสินได้ว่าภาษาพูดและภาษาเขียนที่ใช้กันมีความหมายอย่างไรได้ดียิ่งขึ้น

คณิตศาสตร์ในชีวิตของคุณ

- การเรียนเกี่ยวกับตัวเลขจะช่วยให้เราเข้าใจว่าตัวเลขต่างๆ ที่พบมีความหมายอย่างไร อย่างเช่น สิ้นปี 2553 ประเทศไทยมีหนี้สาธารณะ 4.17 ล้านล้านบาท ตัวเลขที่ใหญ่โตขนาดนี้ความหมายอย่างไร และประชากรแต่ละคนต้องจ่ายเงินให้รัฐเท่าใดประเทศจึงจะหมดหนี้
- การจัดการการเงินส่วนบุคคลไม่ได้เป็นเรื่องง่ายๆ การไปถึงเป้าหมายทางการเงินของแต่ละคนจะขึ้นกับความเข้าใจแนวคิดพื้นฐานเกี่ยวกับการออม การกู้เงิน และการลงทุน ความรู้ทางคณิตศาสตร์ทางการเงินสามารถช่วยให้วางแผนทางการเงินได้ดีขึ้น

คณิตศาสตร์ในชีวิตของคุณ

- มันยากมากที่เราจะหยิบหนังสือพิมพ์โดยไม่พบตัวเลขและกราฟ ซึ่งอธิบายการใช้ชีวิตของพวกเรา สิ่งที่พวกเราต้องการ
- ตัวเลขในหนังสือพิมพ์มีอิทธิพลต่อสินค้าที่ขายในท้องตลาด ภาพยนตร์ที่ฉายในโรงภาพยนตร์ และนโยบายทางการเมือง เป็นต้น

คณิตศาสตร์และโลกของพวกเรา

- คณิตศาสตร์อาจจัดเป็นวิทยาศาสตร์แขนงหนึ่งที่ช่วยให้เรารู้จักจำแนก และค้นหารูปแบบที่ซ่อนอยู่ในจักรวาลของพวกเรา โดยมีหลักการในการค้นหาความจริงที่ชัดเจน
- อย่างไรก็ตามนักวิชาการบางท่านก็ไม่จัดคณิตศาสตร์ว่าเป็นสาขาวิทยาศาสตร์เนื่องจากมีการค้นหาความจริงที่แตกต่างจากวิทยาศาสตร์
- คณิตศาสตร์ได้ถูกนำไปใช้ศึกษาในหลายด้าน เช่น การเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ การศึกษาลายบนตัวสัตว์ รูปร่างของไวรัส อากาศพลศาสตร์ของเครื่องบิน และการกำเนิดของจักรวาล เป็นต้น

คณิตศาสตร์และโลกของพวกเรา

- คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่ทรงพลังในการศึกษาหลายด้าน โดยเฉพาะอย่างยิ่งทางวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีสมัยใหม่ และเศรษฐศาสตร์ เป็นต้น
- ในช่วง 40 ปีที่ผ่านมา นักคณิตศาสตร์ได้ค้นพบความเป็นระเบียบในสิ่งเหตุการณ์ที่ยุ่งเหยิง เช่น พายุของเสียงที่ไม่สามารถควบคุมได้ของเซลล์ประสาทในสมองระหว่างที่มีอาการชัก

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- คณิตศาสตร์เกี่ยวข้องกับการศึกษาของรูปแบบ (study of patterns) ในชีวิตเราจะพบเห็นรูปแบบและวิธีการซึ่งนำไปสู่ข้อสรุปบ่อยครั้ง ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้
  - “หกครั้งล่าสุดที่ฉันได้ไปชายหาด ฉันพบว่าการจราจรเบาบางในวันพุธและรถจะติดอย่างหนักในวันอาทิตย์ ฉันจึงได้ข้อสรุปว่าวันพุธจะมีการจราจรเบาบางกว่าวันอาทิตย์”
  - การให้เหตุผลแบบนี้เป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัยหรือนิรนัย ?

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- **การให้เหตุผลแบบอุปนัย** (inductive reasoning หรือ induction) คือ กระบวนการได้มาซึ่งข้อสรุปทั่วไปจากการสังเกตข้อมูลตัวอย่างที่เฉพาะเจาะจง

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

ตัวอย่างที่ 1 : แอ่วเจียงใหม่

นักท่องเที่ยวคนหนึ่งไปเที่ยวเชียงใหม่และได้พบกับคนเชียงใหม่ประมาณ 100 คน ซึ่งพบว่าพวกเขาใช้ชีวิตสบายๆไม่รีบร้อน นักท่องเที่ยวคนนี้จึงสรุปว่า**คนเชียงใหม่เป็นคนที่ใช้ชีวิตสบายๆไม่รีบร้อน** ในการได้ข้อสรุปนี้เราใช้การให้เหตุผลแบบใด

เฉลย การให้เหตุผลแบบนี้เป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัย นักท่องเที่ยวสร้างข้อสรุปทั่วไปเกี่ยวกับชาวเชียงใหม่โดยสังเกตจากประชาชนจำนวน 100 คนที่เขาได้พบ

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- แม้ว่าการให้เหตุผลแบบอุปนัยจะเป็นวิธีการที่ทรงพลังในการหาข้อสรุป แต่เราก็ไม่สามารถมั่นใจเต็มที่ว่าข้อสรุปนั้นจะเป็นจริงเสมอ
- ถ้าเราพบคนเชียงใหม่ 100 คนที่ใช้ชีวิตสบายๆ ไม่รีบร้อน ก็เป็นไปได้ที่ชาวเชียงใหม่ที่พบคนที่ 101 จะเป็นคนรีบร้อนและคร่ำเคร่งกับชีวิต ประชากรเชียงใหม่คนที่ 101 ดังกล่าวจะทำให้เราสรุปได้ว่าข้อความ **คนเชียงใหม่เป็นคนที่ใช้ชีวิตสบายๆไม่รีบร้อน** เป็นเท็จ

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

ตัวอย่างเสริมที่ 1

จากการศึกษากับคนจำนวน 10 คนได้พบว่าคนที่ใช้เวลาในการออกกำลังกายต่อสัปดาห์มาก จะพบจำนวนการปวดหัวต่อเดือนน้อยครั้ง เราจึงสรุปว่าคนทุกคนจะปวดหัวน้อยลงถ้าเพิ่มเวลาในการออกกำลังกาย การได้ข้อสรุปดังกล่าวได้ใช้วิธีการให้เหตุผลแบบใด ?

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- เมื่อเราใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในการหาข้อสรุปทั่วไป เราต้องจำไว้เสมอว่าการให้เหตุผลแบบนี้ไม่สามารถพิสูจน์คำตอบทั่วไปของทุกเรื่อง ด้วยเหตุนี้เราจึงเรียกข้อสรุปจากการให้เหตุผลแบบอุปนัยว่า **การคาดคะเน**(conjecture) หรือ **สมมติฐาน**(hypothesis) หรือการเดาอย่างมีการศึกษา
- ถ้าพบว่ามีเพียงตัวอย่างเดียวที่ทำให้เงื่อนไขดังกล่าวไม่จริง การคาดเดาข้างต้นก็จะเป็นเท็จ ซึ่งตัวอย่างดังกล่าวจะเรียกว่า**ตัวอย่างค้าน**(counterexample)

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- ชาวเชียงใหม่คนที่ 101 ที่เป็นคนรีบร้อนและคร่ำเคร่งกับชีวิต ถือว่าเป็นตัวอย่างค้านซึ่งแสดงให้เห็นว่าข้อสรุป “คนเชียงใหม่เป็นคนที่ใช้ชีวิตสบายๆไม่รีบร้อน” เป็นเท็จ

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

ตัวอย่างที่ 2 : หาตัวอย่างค้าน

ตัวอย่างด้านล่างได้แสดงให้เห็นว่า ผลบวกเลขสองหลักสองจำนวน เป็นเลขสามหลัก

$$\begin{array}{r} 85 \\ \underline{+24} \\ 109 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45 \\ \underline{+73} \\ 118 \end{array}$$

ผลรวมของเลขสองหลักสองจำนวนจะได้เลขสามหลักเสมอหรือไม่ ? จงหาตัวอย่างค้านเพื่อแสดงว่าข้อความ "ผลบวกเลขสองหลักสองจำนวนเป็นเลขสามหลัก" เป็นเท็จ

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

เฉลย ตัวอย่างมีมากมาย แต่เราต้องหาตัวอย่างค้านอย่างน้อยหนึ่งตัวอย่าง เช่น

$$\begin{array}{r} 15 \\ \underline{+24} \\ 39 \end{array}$$

ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่าข้อความ "ผลบวกเลขสองหลักสองจำนวนเป็นเลขสามหลัก" เป็นเท็จ

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

ตัวอย่างเสริมที่ 2

จงหาตัวอย่างค้านเพื่อที่จะแสดงว่าข้อความ

ผลคูณของเลขสองหลักสองจำนวนเป็นเลขสามหลัก

เป็นเท็จ

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- คนที่ซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาลบางคนได้ใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในการเลือกเบอร์ที่จะซื้อ
  - บางคนศึกษาเลขที่เคยออกไปแล้วและนำมาสร้างข้อสรุปในการเลือกซื้อเลขให้ถูกรางวัลในอนาคต
  - แต่โดยแท้จริงแล้ว โอกาสการออกเลขที่ถูกรางวัลจะไม่ขึ้นกับเลขสถิติในอดีตเลย โดยในแต่ละงวดทุกตัวเลขมีโอกาสถูกเท่ากันทั้งสิ้น

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

ตัวอย่างที่ 3 : การใช้เหตุผลแบบอุปนัย

จงหารูปแบบของตัวเลขในแต่ละข้อ และใช้รูปแบบนั้นหาจำนวนตัวเลขตัวต่อไป

ก) 4, 12, 20, 28, 36, … ข) 5, 15, 45, 135, …

เฉลย ก) จะเห็นว่าตัวเลขที่ถัดไปทางขวาจะได้จากการบวก 8 เข้าไปกับตัวเลขทางซ้าย ดังนั้นตัวเลขถัดจาก 36 ก็คือ 36+8 หรือ 44

ข) จะเห็นว่าตัวเลขที่ถัดไปทางขวาจะได้จากการคูณ 3 เข้าไปกับตัวเลขทางซ้าย ดังนั้นตัวเลขถัดจาก 135 ก็คือ 135x3 หรือ 405

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

ตัวอย่างเสริมที่ 3

จงหารูปแบบของตัวเลขในแต่ละข้อ และใช้รูปแบบนั้นหาจำนวนตัวเลขตัวต่อไป

ก) 3, 9, 15, 21, 27, … ข) 2, 10, 50, 250, …

การให้เหตุผลแบบอุปนัย

- เราใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยในชีวิตประจำวัน ข้อสรุปหลายอย่างจากข้อสรุปแบบนี้ดูเหมือนจะเป็นจริงสูง ถึงกระนั้นก็ตามเราก็ไม่สามารถมั่นใจได้อย่างสมบูรณ์ว่าคำตอบจะเป็นจริงเสมอ
- วิทยาศาสตร์เน้นการใช้เหตุผลแบบอุปนัย (มีการใช้หลักการทางสถิติมาช่วยในการสรุปข้อเท็จจริงให้มีหลักการมากยิ่งขึ้น) แม้ว่าเราไม่อาจเชื่อมั่นผลที่ได้ในทางวิทยาศาสตร์ว่าจริงแท้แน่นอน 100 เปอร์เซ็นต์ แต่ก็ถือว่าเป็นการใช้เหตุผลแบบอุปนัยที่มีความแม่นยำในระดับที่นำไปใช้ประโยชน์ได้ดีในหลายเรื่อง

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

- วิธีการให้เหตุผลอีกแบบเรียกว่า**การให้เหตุผลแบบนิรนัย** ซึ่งสามารถใช้พิสูจน์ข้อคาดเดาบางอย่างว่าเป็นจริง
- **การให้เหตุผลแบบนิรนัย** (deductive reasoning หรือ deduction) คือกระบวนการในการพิสูจน์ข้อสรุปเฉพาะเจาะจงที่ได้มาจากข้อความทั่วไปหนึ่งข้อความหรือมากกว่านั้น
- ข้อสรุปที่ได้จากการพิสูจน์ในการให้เหตุผลแบบนิรนัยเรียกว่า **ทฤษฎีบท** (theorem)
- ข้อสรุปที่ได้ในทางคณิตศาสตร์ล้วนมาจากการให้เหตุผลแบบนิรนัยทั้งสิ้น ซึ่งทำให้เรามั่นใจในข้อสรุปที่ได้เสมอ

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

- การให้เหตุผลแบบนิรนัยทำให้เราสามารถได้ข้อสรุปที่เฉพาะเจาะจงจากข้อความทั่วไป ยกตัวอย่างเช่น
  - นักศึกษาปริญญาตรี มช. ทุกคนต้องเรียนวิชาภาษาอังกฤษ และสมมติว่าสมชายเป็นนักศึกษาปริญญาตรี มช. เราก็สามารถสรุปได้ว่าสมชายต้องเรียนวิชาภาษาอังกฤษ (เราสามารถใช้ความรู้ตรรกศาสตร์ที่จะศึกษาต่อไปสรุปข้อความนี้ได้)
- ตัวอย่างถัดไปจะแสดงให้เห็นถึงความต่างระหว่างการให้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

ตัวอย่างที่ 4 : การใช้เหตุผลแบบอุปนัยและนิรนัย

พิจารณากระบวนการต่อไปนี้

เลือกจำนวนจำนวนหนึ่ง แล้วคูณเลขนั้นด้วย 6 แล้วบวก 8 เข้าไปในผลคูณนั้น จากนั้นให้หารเลขนั้นด้วย 2 แล้วลบออกด้วย 4

ก) ให้ทำตามกระบวนการข้างต้นด้วยจำนวนเริ่มต้นที่แตกต่างกัน 4 จำนวน เขียนข้อคาดเดาถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลลัพธ์ของกระบวนการนี้กับจำนวนเริ่มต้น

ข) แทนค่าเริ่มต้นด้วย ■หรือ n แล้วใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยพิสูจน์ข้อคาดเดาในข้อ ก)

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

เฉลย

ก) เราสามารถเริ่มจากเลข 4 ตัวใดๆ สมมติว่าเราเลือก 4, 7, 15 และ 100 เมื่อทำตามกระบวนการที่โจทย์กำหนดจะได้ผลลัพธ์ดังตาราง

เลือกจำนวนเริ่มต้น	**4**	**7**	**15**	**100**
คูณเลขด้วย 6	4x6=24	7x6=42	15x6=90	100x6=600
บวกเลขข้างบนด้วย 8	24+8=32	42+8=50	90+8=98	600+8=608
หารเลขข้างบนด้วย 2	32/2=16	50/2=25	98/2=49	608/2=304
ลบเลขข้างบนออกด้วย 4	16-4=**12**	25-4=**21**	49-4=**45**	304-4=**300**

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

เนื่องจากเราต้องการหาความสัมพันธ์ของเลขเริ่มต้นกับผลลัพธ์สุดท้าย เราอาจเขียนผลลัพธ์ได้ดังนี้

เลือกจำนวนเริ่มต้น	**4**	**7**	**15**	**100**
ผลลัพธ์ของกระบวนการ	**12**	**21**	**45**	**300**

จากการสังเกต ทำให้เราได้การคาดเดาที่ว่าผลลัพธ์จากกระบวนการของโจทย์ข้อนี้จะมีค่าเป็นสามเท่าของจำนวนเริ่มต้น

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

ข) สำหรับการให้เหตุผลแบบนิรนัยนี้ เราจะไม่ทำตัวอย่างเฉพาะหลายตัวอย่างแต่จะทำในกรณีทั่วไป นั่นคือเราจะใช้ ■ หรือ n แทนตัวเลขใดๆ

	วิธีที่ 1 ใช้ ■	**วิธีที่ 2 ใช้ n**
เลือกจำนวนเริ่มต้น	■	n
คูณเลขด้วย 6	■■■■■■	6n
บวกเลขข้างบนด้วย 8	■■■■■■ : : : :	6n+8
หารเลขข้างบนด้วย 2	■■■	(6n+8)/2 = 3n+4
ลบเลขข้างบนออกด้วย 4	■■■	3n+4-4 = 3n

การให้เหตุผลแบบนิรนัย

ตัวอย่างเสริมที่ 4

พิจารณากระบวนการต่อไปนี้

เลือกจำนวนจำนวนหนึ่ง แล้วคูณเลขนั้นด้วย 4 แล้วบวก 6 เข้าไปในผลคูณนั้น จากนั้นให้หารเลขนั้นด้วย 2 แล้วลบออกด้วย 3

ก) ให้ทำตามกระบวนการข้างต้นด้วยจำนวนเริ่มต้นที่แตกต่างกัน 4 จำนวน เขียนข้อคาดเดาถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลลัพธ์ของกระบวนการนี้กับจำนวนเริ่มต้น

ข) แทนค่าเริ่มต้นด้วย ■หรือ n แล้วใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยพิสูจน์ข้อคาดเดาในข้อ ก)

1.2 การประมาณค่าและกราฟ

วัตถุประสงค์

1. สามารถใช้เทคนิคการประมาณค่าเพื่อประมาณค่าคำตอบของปัญหา
2. สามารถประยุกต์เทคนิคการประมาณค่าโดยใช้ข้อมูลจากกราฟที่กำหนดให้

การประมาณค่า

การประมาณค่า เป็นกระบวนการเพื่อให้ได้ค่าคำตอบโดยประมาณสำหรับปัญหาที่สนใจ ยกตัวอย่างเช่น

- บริษัทต่างๆ ต้องการประมาณจำนวนสินค้าที่ลูกค้าต้องการใช้
- นักเศรษฐศาสตร์ประมาณการแนวโน้มทางเศรษฐกิจ
- เมื่อเราข้ามถนน เราอาจประมาณความเร็วของรถที่กำลังวิ่งมา เพื่อจะรู้ว่าเราควรหยุดรอรถที่กำลังวิ่งมาหรือไม่
- การปัดเศษหรือการปัดเลขก็เป็นการวิธีการประมาณค่าอย่างหนึ่ง
- บางครั้งเราก็ใช้การปัดเศษโดยที่เราไม่รู้ว่าว่าเรากำลังใช้มันอยู่

การประมาณค่า

- เราอาจจะพูดว่าเรามีอายุ 19 ปี แทนที่จะพูดว่าเรามีอายุ 19 ปี 4 เดือน
- เราอาจจะพูดว่าเรา "จะถึงบ้านภายในประมาณครึ่งชั่วโมง" มากกว่าจะพูดว่า "จะถึงบ้านภายในเวลา 25 นาที"
- เราจะพบว่าการประมาณค่ามีประโยชน์ทั้งในการทำงาน ในชีวิตจริง และในชั้นเรียน การคำนวณด้วยเครื่องคิดเลขหรือคอมพิวเตอร์ก็สามารถมีข้อผิดพลาดได้ง่าย การประมาณค่าสามารถช่วยบอกเราว่าคำตอบจากการคำนวณที่แสดงบนหน้าจอนั้นสมเหตุสมผลหรือไม่

การประมาณค่า

- ขอยกตัวอย่างจำนวน 7,654,321 เพื่อทบทวนความจำ
  - เลข 1 คือหลักหน่วย
  - เลข 2 คือหลักสิบ
  - เลข 3 คือหลักร้อย
  - เลข 4 คือหลักพัน
  - เลข 5 คือหลักหมื่น
  - เลข 6 คือหลักแสน
  - เลข 7 คือหลักล้าน

การประมาณค่า

การปัดเศษหรือการปัดเลข

1. ให้มองตำแหน่งทางขวาของตำแหน่งที่ต้องการปัดเศษ

2. ก) ถ้าตำแหน่งทางขวามือนั้นมีค่าเท่ากับ 5 หรือมากกว่า ให้บวก 1 ไปยังตำแหน่งที่ต้องการปัดเศษ

ข) ถ้าตำแหน่งทางขวามือนั้นมีค่าน้อยกว่า 5 ก็ไม่ต้องเปลี่ยนตำแหน่งที่ต้องการปัดเศษ และแทนค่าตำแหน่งทางขวาทั้งหมดด้วยเลขศูนย์

การประมาณค่า

ตัวอย่างที่ 1 : การปัดเศษ

จงปัดเศษ 67 ให้ใกล้เคียงหลักสิบมากที่สุด

เฉลย

ในหลักสิบคือ 6 เมื่อมองไปตำแหน่งทางขวาก็คือ 7 ซึ่งมีค่ามากกว่า 5 เราจึงเพิ่มค่าอีก1 ในหลักสิบ นั่นคือจะเปลี่ยน 6 เป็นเลข 7

ดังนั้น 67 สามารถปัดเศษใกล้หลักสิบที่สุดเป็น 70

สัญลักษณ์ ≈ ใช้แทนคำว่า "มีค่าโดยประมาณ"

ดังนั้นเราอาจเขียน $67 \approx 70$

การประมาณค่า

ตัวอย่างเสริมที่ 1 :

จงปัดเศษ 48 ให้ใกล้เคียงหลักสิบมากที่สุด

การประมาณค่า

ตัวอย่างที่ 2 : การประมาณค่าโดยการปัดเศษ

เราซื้อขนมปัง 23 บาท นมกล่อง 12.50 บาท แชมพู 58 บาท และครีมอาบน้ำ 43.25 บาท ใบเสร็จบอกว่าค่าของทั้งหมดคือ 156.75 บาท เราคิดว่าตัวเลขดังกล่าวสมเหตุสมผลหรือไม่

การประมาณค่า

เฉลย

ขนมปัง	23 บาท	≈	20 บาท
นมกล่อง	12.50 บาท	≈	10 บาท
แชมพู	58 บาท	≈	60 บาท
ครีมอาบน้ำ	43.25 บาท	≈	40 บาท

รวมค่าใช้จ่ายโดยประมาณคือ 20+10+60+40 = 130 บาท ซึ่งน้อยกว่า 156.75 มาก ดังนั้นเราควรจะตรวจสอบใบเสร็จก่อนที่จะจ่ายเงิน

การประมาณค่า

ตัวอย่างเสริมที่ 2

เราซื้อหนังสือ 64 บาท ปากกา 8.50 บาท ถ่ายไฟฉาย 46.75 บาท และตะกร้าใส่ของ 33 บาท

ก) ให้ปัดเศษสินค้าแต่ละชนิดในในหลักสิบ และหาค่าผลรวมของราคาสินค้าทั้งหมด

ข) ใบเสร็จบอกว่าค่าของทั้งหมดคือ 182.75 บาท ราคานี้สมเหตุสมผลหรือไม่

การประมาณค่า

ถึงแม้ว่าการประมาณค่าด้วยวิธีที่แตกต่างกัน จะให้ผลลัพธ์ที่แตกต่างกัน แต่แนวคิดหลักในกระบวนการปัดเศษก็คือการทำให้การคำนวณง่ายขึ้น จะได้ตรวจสอบผลลัพธ์โดยประมาณได้

ตัวอย่างที่ 3 : การประมาณค่าในการคำนวณ

จงประมาณค่าที่สมเหตุสมผลของ

0.47996 x 88 / 0.249

การประมาณค่า

เฉลย

เราจะเห็นว่าตัวเลขแต่ละตัวดูซับซ้อน เป้าหมายของเราคือการปัดเศษทศนิยมเพื่อทำให้การคำนวณง่ายขึ้น 0.47996 มีค่าประมาณ 0.5 หรือ ½ และ 0.249 มีค่าประมาณ 0.25 หรือ ¼ ดังนั้น

$0.47996 \times 88 / 0.249 \approx \frac{1}{2} \times 88 / \frac{1}{4} = 44 / \frac{1}{4} = 44 \times 4/1 = 176$

ในการใช้เครื่องคิดเลขเราจะได้คำตอบเป็น 169.624417671 การประมาณค่า 176 ที่เราได้ทำให้เราเห็นชัดว่าคำตอบที่ได้สมเหตุสมผล

การประมาณค่า

ในตัวอย่างที่ 3 ก็เป็นไปได้ที่เราจะประมาณค่าโดยไม่ใช้เศษส่วน นั่นคือ

$0.47996 \times 88 / 0.249 \approx 0.5 \times 88 / 0.2 = 44 / 0.2$

$= (44 \times 5) / (0.2 \times 5) = 220$

การประมาณค่า 0.249 ในทศนิยมตำแหน่งที่หนึ่ง (0.249≈0.2) จะต่างจากการประมาณค่าในทศนิยมตำแหน่งที่สอง (0.249≈0.25=1/4) ดังนั้นการประมาณค่านี้จึงไม่แม่นยำเท่าผลลัพธ์ที่ได้ในตัวอย่างที่ 3

การประมาณค่า

ตัวอย่างเสริมที่ 3

จงประมาณค่าที่สมเหตุสมผลของ

0.2489 x 48 / 0.5103

การประมาณค่า

ตัวอย่างที่ 4 : การประมาณค่าโดยการปัดเศษ

ช่างไม้คนหนึ่งทำงานเต็มเวลา (40 ชั่วโมงต่อสัปดาห์) ได้รับค่าจ้างชั่วโมงละ 28 บาท

ก) จงประมาณรายได้รายสัปดาห์ที่ช่างไม้คนนี้ได้รับ

ข) จงประมาณรายได้รายปีที่ช่างไม้คนนี้ได้รับ

การประมาณค่า

เฉลย

ก) ในการทำให้การคำนวณให้ง่ายลง เราสามารถปัดเศษค่าแรงต่อชั่วโมงจาก 28 บาทเป็น 30 บาท

ในการคำนวณเราควรเขียนหน่วยของแต่ละจำนวนด้วย

ช่างไม้ทำงาน 40 ชั่วโมงต่อสัปดาห์ และได้รับค่าจ้างประมาณ 30 บาทต่อชั่วโมง เราจะเขียนเป็น

$$40\ \frac{\text{ชั่วโมง}}{\text{สัปดาห์}} \quad \text{และ} \quad 30\ \frac{\text{บาท}}{\text{ชั่วโมง}}$$

การประมาณค่า

คำว่า “ต่อ” หมายถึงเครื่องหมายหารนั่นเอง เราคูณตัวเลขสองตัวนี้เพื่อประมาณรายได้ของช่างไม้ต่อสัปดาห์ โดยจะตัดหน่วยซึ่งเหมือนกันออกไป

$$40\ \frac{\cancel{\text{ชั่วโมง}}}{\text{สัปดาห์}} \times 30\ \frac{\text{บาท}}{\cancel{\text{ชั่วโมง}}} = 1{,}200\ \frac{\text{บาท}}{\text{สัปดาห์}}$$

ดังนั้นช่างไม้คนนี้มีรายได้ประมาณ 1,200 บาทต่อสัปดาห์

หรือเขียนเป็น ≈1,200 บาทต่อสัปดาห์

การประมาณค่า

ข) สำหรับการประมาณค่าจ้างต่อปีนั้น เราอาจปัดเลข 52 สัปดาห์เป็น 50 สัปดาห์

รายได้ต่อปีโดยประมาณคำนวณได้จากผลคูณของ 1,200 บาทต่อสัปดาห์ และ 50 สัปดาห์ต่อปี เราจะเขียนเป็น

$$1{,}200\ \frac{\text{บาท}}{\cancel{\text{สัปดาห์}}} \times 50\ \frac{\cancel{\text{สัปดาห์}}}{\text{ปี}} = 60{,}000\ \frac{\text{บาท}}{\text{ปี}}$$

ดังนั้นช่างไม้มีรายได้ประมาณ 60,000 บาทต่อปี หรือเขียนเป็น ≈60,000 บาทต่อปี

การประมาณค่า

ตัวอย่างเสริมที่ 4

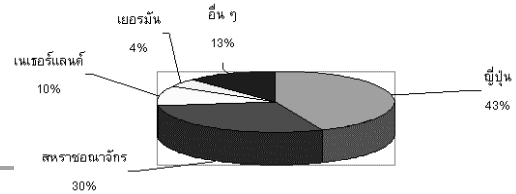
นักแต่งสวนคนหนึ่งทำงานเต็มเวลา (40 ชั่วโมงต่อสัปดาห์) ได้รับค่าจ้างชั่วโมงละ 53 บาท

ก) จงประมาณรายได้รายสัปดาห์ที่นักแต่งสวนคนนี้ได้รับ

ข) จงประมาณรายได้รายปีที่นักแต่งสวนคนนี้ได้รับ

การประมาณค่าด้วยกราฟ

- บ่อยครั้งที่เราจะเห็นหนังสือพิมพ์และหนังสือทั่วไปนำเสนอข้อมูลในรูปแบบของกราฟวงกลม กราฟแท่ง และกราฟเส้น เราจะใช้ตัวอย่างแสดงวิธีการประมาณสำหรับกราฟแต่ละแบบ
- **กราฟวงกลม** (circle graph หรือ pie chart) จะแสดงปริมาณทั้งหมดโดยแบ่งเป็นส่วนๆ โดยแต่ละส่วนเรียกว่าเซคเตอร์ (sector)



การประมาณค่า

ตัวอย่างที่ 5 : เทคนิคการประมาณค่าสำหรับกราฟวงกลม

ภาพด้านบนแสดงปริมาณเนื้อไก่ปรุงสุกของไทยที่ส่งออกไปยังต่างประเทศในปี 2551 (ข้อมูลจากกรมปศุสัตว์) จงตอบคำถามต่อไปนี้

ก) ในเซคเตอร์ที่เขียนว่า “ญี่ปุ่น” ได้ให้ข้อมูลอะไรบ้าง

ข) ในปี 2551 มียอดส่งปริมาณเนื้อไก่สุกของไทยไปยังต่างประเทศ 263,354 ตัน ปริมาณเนื้อไก่ที่ส่งไปญี่ปุ่นจะมีปริมาณประมาณกี่ตัน

การประมาณค่า

เฉลย

ก) เซคเตอร์ที่เขียนว่า “ญี่ปุ่น” ได้แสดงให้เป็นว่าในปี พ.ศ. 2551 ประเทศไทยส่งไก่สุกออกไปยังประเทศญี่ปุ่น 43% และถือเป็นประเทศที่ไทยส่งออกไก่สุกไปขายมากที่สุดในปีนั้น

ข) เราประมาณยอดที่ส่งไก่สุกไปยังญี่ปุ่นเป็น

263,354 ตัน x 43% $\approx$ 300,000 ตัน x 40%

= 300,000 ตัน x 40/100

= 120,000 ตัน

การประมาณค่า

ถ้าเราคำนวณด้วยเครื่องคิดเลข 263,354 ตัน x 43% = 113,242.22 ตัน ซึ่งถือว่ามีค่าใกล้เคียงกับค่าที่คำนวณโดยประมาณที่ 120,000 ตัน

ตัวอย่างเสริมที่ 5

จงใช้ข้อมูลในตัวอย่างที่ 5 จงตอบคำถามต่อไปนี้

ก) ในเซคเตอร์ที่เขียนว่า “สหราชอาณาจักร” ได้ให้ข้อมูลอะไรบ้าง

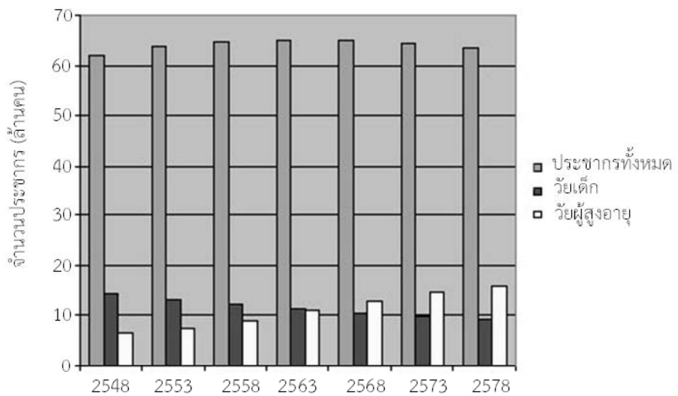
ข) ในปี 2551 ปริมาณเนื้อไก่ที่ส่งไปสหราชอาณาจักรจะมีปริมาณประมาณกี่ตัน

การประมาณค่า

กราฟแท่ง (bar graph) สะดวกในการเปรียบเทียบข้อมูลจากของหลายสิ่ง กราฟแท่งอาจจะเขียนได้ทั้งแนวตั้งและแนวนอน โดยที่ความสูงหรือความยาวจะถูกใช้แสดงปริมาณของแต่ละสิ่ง

ตัวอย่างที่ 6 : เทคนิคการประมาณค่าสำหรับกราฟแท่ง

จงใช้กราฟแท่งที่แสดงจำนวนประชากรของประเทศไทยในปี พ.ศ.2448-2578 ตอบคำถามต่อไปนี้



ก) ในปี พ.ศ.2563 คาดว่าจะมีจำนวนผู้สูงอายุจำนวนกี่คน

ข) จำนวนผู้สูงอายุในปี พ.ศ.2563 จะมีประมาณร้อยละเท่าใดเมื่อเทียบกับจำนวนประชากรทั้งหมด

การประมาณค่า

เฉลย

ก) จากกราฟจะเห็นว่าในปี พ.ศ.2563 มีแท่งกราฟ 3 แท่ง ในส่วนของผู้สูงอายุคือแท่งขวามือสุด(สีครีม) ซึ่งมีจำนวนประมาณ 11 ล้านคน

ข) จากกราฟจะเห็นว่าในปี พ.ศ.2563 มีแท่งกราฟ 3 แท่ง ในส่วนของประชากรทั้งหมดคือแท่งซ้ายมือสุด(สีฟ้า) ซึ่งมีจำนวนประมาณ 65 ล้านคน ดังนั้นร้อยละของจำนวนผู้สูงอายุเทียบกับประชากรทั้งหมดหาได้จาก

$$\frac{11\ \cancel{\text{ล้านคน}}}{65\ \cancel{\text{ล้านคน}}} \times 100\ \% \approx \frac{10}{70} \times 100\ \% \approx 14\ \%$$

การประมาณค่า

ดังนั้นจำนวนผู้สูงอายุในปี 2563 จะมีประมาณ 14% ของประชากรทั้งหมด

หากหาโดยตรงจะได้

11 ~~ล้านคน~~ x 100 % =16.92 %

65 ~~ล้านคน~~

ซึ่งไม่ต่างจากการประมาณการ 14% มากนัก

การประมาณค่า

ตัวอย่างเสริมที่ 6

จากตัวอย่าง 6 จงตอบคำถามต่อไปนี้

ก) ในปี พ.ศ.2578 คาดว่าจะมีจำนวนเด็กจำนวนกี่คน

ข) จำนวนเด็กในปี พ.ศ.2578 จะมีประมาณร้อยละเท่าใดเมื่อเทียบกับจำนวนประชากรทั้งหมด

การประมาณค่า

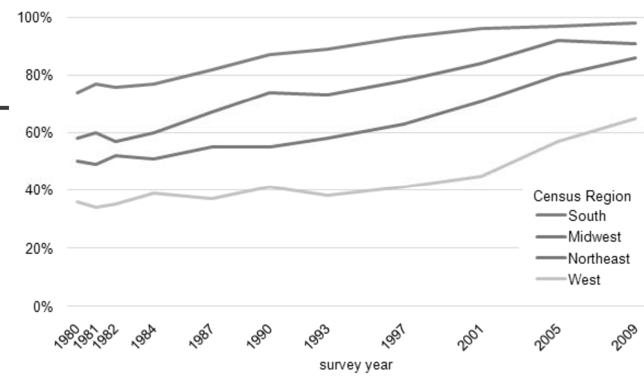
กราฟเส้น (line graph) มักถูกใช้ในการแสดงแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาหนึ่ง หน่วยเวลาที่ใช้อาจจะเป็นเดือนและปี เป็นต้น และมักจะปรากฏในแกนนอน ปริมาณมักถูกนำเสนอในแกนตั้ง จุดจะถูกวาดเพื่อแสดงข้อมูลที่กำหนดให้ แต่กราฟก็ได้จากการเชื่อมจุดด้วยส่วนของเส้นตรง

ตัวอย่างที่ 7 : เทคนิคการประมาณค่าสำหรับกราฟเส้น

จงใช้กราฟเส้นที่แสดงการใช้เครื่องปรับอากาศในพื้นที่ต่างๆ ของสหรัฐอเมริกาในปี ค.ศ.1980-2009 ตอบคำถามต่อไปนี้

Figure 1. Steady rise in air conditioned homes in all regions of the U.S.

percent of homes with AC



Source: U.S. Energy Information Administration, 2009 Residential Energy Consumption Survey

ก) ในปี ค.ศ.1980 มีผู้ใช้เครื่องปรับอากาศในภาคใต้คิดเป็นกี่เปอร์เซนต์

ข) สมมิตว่าในปี ค.ศ.1980 มีจำนวนบ้านในภาคใต้จำนวน 37.39 ล้านหลัง จะมีผู้ใช้เครื่องปรับอากาศประมาณกี่หลัง

การประมาณค่า

เฉลย

ก) จากกราฟจะเห็นว่าในปี ค.ศ.1980 มีบ้านที่ใช้เครื่องปรับอากาศในภาคใต้ประมาณ 75%

ข) ดังนั้นในปี ค.ศ.1980 จำนวนบ้านที่ใช้เครื่องปรับอากาศในภาคใต้มีประมาณ

37.39 ล้านหลัง x 75 % $\approx$ 40 ล้านหลัง x 75/100

= 40 ล้านหลัง x ¾ = 30 ล้านหลัง

ดังนั้นมีคนใช้เครื่องปรับอากาศในภาคใต้ประมาณ 30 ล้านหลัง

การประมาณค่า

ตัวอย่างเสริมที่ 7

จงใช้กราฟเส้นในตัวอย่าง 7 เพื่อหาค่าต่อไปนี้

ก) ในปี ค.ศ.1990 มีบ้านที่ใช้เครื่องปรับอากาศในภาคใต้คิดเป็นกี่เปอร์เซนต์

ข) ในปี ค.ศ.1990 มีจำนวนบ้าน 47.94 ล้านหลัง จะมีบ้านที่มีเครื่องปรับอากาศประมาณกี่หลัง

1.3 การแก้โจทย์ปัญหา

วัตถุประสงค์

1. สามารถแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้กระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน

1.3 การแก้โจทย์ปัญหา

- **การคิดเชิงวิพากย์** (critical thinking) และ**การแก้โจทย์ปัญหา** (problem solving) เป็นทักษะที่สำคัญทั้งในการเรียนและการทำงาน
- รูปแบบการแก้ปัญหาที่น่าสนใจอย่างหนึ่งได้ถูกคิดค้นโดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ จอร์จ โพลยา (George Polya) ซึ่งมีอายุในระหว่างปี ค.ศ. 1887-1985 โดยเผยแพร่ในหนังสือ How to Solve It ในปี ค.ศ.1957 หนังสือเล่มนี้ถูกตีพิมพ์ครั้งแรกในปี ค.ศ.1945 และถูกขายไปมากกว่าล้านเล่มใน 17 ภาษา

1.3 การแก้โจทย์ปัญหา

- การแก้โจทย์ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา (Polya's Four Steps in Problem Solving) ดังที่ปรากฏในหนังสือ สามารถทำให้เห็นการคิดที่ชัดเจนที่ใช้ได้ในทุกวิชา

ในการแก้ปัญหาต่างๆ เราสามารถใช้วิธีการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา เราใช้วิธีนี้เป็นแนวทางช่วยในการแก้ปัญหามากกว่าที่จะเป็นกฎตายตัวสำหรับต้องท่องจำให้ได้ ทั้งนี้เราอาจจะสามารถแก้ปัญหาบางอย่างโดยไม่ได้คิดถึง 4 ขั้นตอนของโพลยาก็ได้

การแก้โจทย์ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจโจทย์ (Understanding the problem)

ขั้นที่ 2 วางแผนแก้ปัญหา (Devising a plan)

ขั้นที่ 3 ปฏิบัติตามแผน (Carrying out the plan)

ขั้นที่ 4 ตรวจสอบ (Looking back)

การแก้โจทย์ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจโจทย์ (Understanding the problem)

อ่านโจทย์หลายครั้ง ในการอ่านครั้งแรกให้เข้าใจปัญหาในภาพรวมแบบคร่าวๆ ในการอ่านครั้งที่สองให้เขียนข้อมูลสำคัญที่ถูกกำหนดให้และเขียนให้ชัดเจนว่าอะไรคือปัญหาที่ต้องการแก้

การแก้โจทย์ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา

ขั้นที่ 2 วางแผนแก้ปัญหา (Devising a plan)

ในการวางแผนแก้ไขปัญหาเราอาจจะเกี่ยวข้องกับวิธีการในการแก้ปัญหาบางข้อหรือหลายข้อที่นำเสนอต่อไปนี้

- ใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัยเพื่อช่วยมองหาแบบแผน
- เขียนหัวข้ออย่างเป็นระบบหรือเขียนตาราง
- ใช้วิธีการประมาณค่าเพื่อสร้างการคาดเดาแบบมีหลักการในปัญหานั้น จากนั้นตรวจสอบการคาดเดาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ของปัญหาและแก้โจทย์แบบย้อนกลับจนกระทั่งไปถึงปัญหาที่เริ่มต้น
- พยายามเขียนปัญหาให้เข้าใจง่ายขึ้น และลองแก้ปัญหาที่คล้ายคลึงกับปัญหาใหม่

การแก้โจทย์ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา

- ใช้การลองผิดลองถูก
- เขียนข้อมูลที่กำหนดให้ในรูปแบบของแผนภูมิหรือตาราง
- พยายามเขียนภาพร่างหรือแผนภาพเพื่อแสดงปัญหาให้ชัดขึ้น
- เชื่อมโยงปัญหาที่ทำกับปัญหาที่คล้ายคลึงกันที่เคยเห็นมาก่อน พยายามประยุกต์วิธีการที่เคยใช้ในการแก้ปัญหาที่คล้ายคลึงกัน
- พยายามจับประเด็นของปัญหาให้ดีสำหรับปัญหาดูง่ายเกินไป บางทีคนตั้งปัญหาอาจตั้งใจทำให้เราสับสนหรือเข้าใจผิด เพื่อหลอกให้เราแก้ปัญหาผิดวิธี
- ใช้ข้อมูลที่กำหนดให้เพื่อตัดความเป็นไปได้ในหลายกรณีออกไป
- ใช้สามัญสำนึก (common sense)

การแก้โจทย์ปัญหา 4 ขั้นตอนของโพลยา

ขั้นที่ 3 ปฏิบัติตามแผน (Carrying out the plan)

ขั้นที่ 4 ตรวจสอบ (Looking back)

คำตอบที่ได้ควรสอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ เมื่อดูคำตอบควรเห็นว่าสมเหตุสมผลและเป็นที่เข้าใจได้ ถ้าคำตอบไม่เป็นเช่นนี้ก็ให้ตรวจสอบวิธีการแก้ปัญหาและการคำนวณใหม่ บางทีอาจจะมีวิธีการแก้ปัญหาแบบอื่นเพื่อให้ได้ซึ่งคำตอบที่ถูกต้องก็ได้

อ้างอิง

- ภาพจาก http://math.pppst.com/