

สมบัติบางประการของ Steiner chains และหน้าต่างกุหลาบ
(Some Properties of Steiner Chains and Rose Windows)

นายอริญชัย จำพันธุ์

รหัส 630510571

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2566

สมบัติบางประการของ Steiner chains และหน้าต่างกุหลาบ
(Some Properties of Steiner Chains and Rose Windows)

นายอริญชัย จำพันธุ์

630510571

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

สมบัติบางประการของ Steiner chains และหน้าต่างกุหลาบ
(Some Properties of Steiner Chains and Rose Windows)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

.....
อ.ดร. ขวัญชัย กันไว

ประธานกรรมการ

(อ. ดร. ขวัญชัย กันไว)

.....
สมลักษณ์ อุดดี

กรรมการ

(รศ. ดร. สมลักษณ์ อุดดี)

วันที่ 8 มีนาคม พ.ศ. 2567

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการศึกษาค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง สมบัติบางประการของ Steiner chains และหน้าต่างกุหลาบ

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ประธานกรรมการสอบและในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้ข้อเสนอแนะ พิจารณา และตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม รวมถึงให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

นายอริณชัย จำพันธุ์

หัวข้อ (ภาษาไทย) สมบัติบางประการของ Steiner chains และหน้าต่างกุหลาบ
 (ภาษาอังกฤษ) Some Properties of Steiner Chains and Rose Windows
 ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นายอริญชัย จำพันธุ์ รหัสนักศึกษา 630510571
 ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา อ. ดร. ขวัญชัย กันไฉ
 ชื่อกรรมการสอบ รศ. ดร. สมลักษณ์ อดุติ

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้ได้แรงบันดาลใจจากการศึกษาของ Steve Pomerantz เรื่อง Rose Windows from Circle Inversion ซึ่งในบทความนั้นผู้แต่งได้อธิบายการมีอยู่ของ Steiner chain ของวงกลมสองวงที่ไม่ตัดกัน และได้อธิบายถึงจำนวนวงกลมใน Steiner chain ผ่านสมการความสัมพันธ์ของรัศมีของวงกลมและระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม นอกจากนี้บทความยังได้อธิบายการสร้างหน้าต่างกุหลาบจาก Steiner chain สำหรับการค้นคว้าอิสระนี้เราได้ทำการศึกษาความสัมพันธ์ของสมการดังกล่าวเพิ่มเติม มากไปกว่านั้นเราได้แสดงการสร้างหน้าต่างกุหลาบที่พบในประเทศไทยโดยใช้ Steiner chain

Abstract

This independent study is motivated by the study of Steve Pomerantz on the topic “Rose Windows from Circle Inversion”. In the work, the author describes the existence of a Steiner chain for two given nonintersecting circles and the number of circles in the Steiner chain via an equation relating to the radii and the distance of the centers of the given circles. Moreover, the paper explains how to construct rose windows from Steiner chain. In this independent study, we further study the relationship in the aforementioned equation. In addition, we give a construction of a rose window found in Thailand using a Steiner chain.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ (Introduction)	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	5
บทที่ 3 ผลการศึกษา (Main Results)	22
3.1 สมบัติของ Steiner chain	22
3.2 การสร้างหน้าต่างกุหลาบจาก Steiner chain	27
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	36
บรรณานุกรม	39

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

หน้าต่างกุหลาบ (Rose window) โดยทั่วไปหมายถึงหน้าต่างทรงกลมซึ่งมักจะใช้ในการสร้างคริสตศาสนสถาน คำว่า “rose window” เริ่มใช้กันมาตั้งแต่คริสต์ศตวรรษที่ 17 และ พจนานุกรมออกซฟอร์ดระบุว่า rose ในที่นี้หมายถึง ดอกกุหลาบ

คำว่า “wheel window” มักจะหมายถึงหน้าต่างที่แบ่งเป็นซี่ ๆ กระจายออกไปจากเพลาศูนย์กลาง ส่วนคำว่า “rose window” มักจะใช้เฉพาะหน้าต่างทรงกลมที่ถูกออกแบบให้มีความซับซ้อนซึ่งดูคล้ายกับกลีบกุหลาบที่ซ้อนกัน หน้าต่างกลมที่ไม่มีซี่ที่นิยมทำกันในโบสถ์ในประเทศอิตาลีเรียกว่า “หน้าต่างตา” (Ocular หรือ oculus window)

หน้าต่างกุหลาบ เป็นเอกลักษณ์อย่างหนึ่งของสถาปัตยกรรมแบบกอธิคซึ่งจะเห็นได้จากในมหาวิหารทางตอนเหนือของประเทศฝรั่งเศส แต่แท้ที่จริงแล้วการสร้างหน้าต่างกุหลาบเริ่มตั้งแต่ยุคกลาง และกลับมาเป็นที่นิยมอีกครั้งในสมัยสถาปัตยกรรมฟื้นฟูกอธิคเมื่อคริสต์ศตวรรษที่ 19

ที่มาของหน้าต่างกุหลาบอาจจะพบในสถาปัตยกรรมโรมันที่เรียกว่า “อ็อคคิวลัส” (oculus) หรือ “ตา” ซึ่งเป็นช่องกลมกว้างบนเพดานให้แสงและอากาศส่องเข้ามาภายในสิ่งก่อสร้างได้ “อ็อคคิวลัส” ที่สำคัญที่สุดเป็นช่องเปิดกลมบนหลังคาของตึกแพนเธียน (Pantheon) ณ กรุงโรม



Figure 1.1: The oculus of the Pantheon, Rome

ต่อมาหน้าต่างกุหลาบได้ถูกพัฒนาให้มีขนาดใหญ่และมีความซับซ้อนของลวดลายมากยิ่งขึ้น ซึ่งทำให้หน้าต่างกุหลาบมีหลากหลายแบบ ดังนี้

- Wheel Windows เป็นหน้าต่างเหล่าที่มีลวดลายเรียบง่ายที่แผ่ออกมาจากเพลาศูนย์กลาง เป็นที่นิยมในช่วงโรมาเนสก์และโกธิคอิตาลี พบได้ทั่วไปในยุโรปโดยเฉพาะเยอรมันและอิตาลี และหน้าต่าง wheel นี้ยังเกิดขึ้นในอาคารฟื้นฟูโรมาเนสก์ในศตวรรษที่ 19 และ 20



Figure 1.2: Wheel - Church of San Francesco at Lucera, Italy (Wheel windows)

- Early Gothic เป็นหน้าต่างกุหลาบที่มีลวดลายประกอบด้วยส่วนโค้งที่ทับซ้อนกัน เช่น กลีบดอกไม้ ทรงกลม และสี่เหลี่ยม หน้าต่างนี้เกิดขึ้นทางตอนเหนือของฝรั่งเศส โดยเฉพาะที่อาสนวิหาร Laon ประเทศอิตาลี หน้าต่างสไตล์นี้เป็นที่นิยมในสถาปัตยกรรมแบบโกธิค



Figure 1.3: Laon Cathedral, France (Early Gothic)

- Flamboyant Gothic เป็นหน้าต่างที่ถูกทำด้วยเส้นโค้ง S ทำให้มีลวดลายคล้ายเปลวไฟ ซึ่งแต่ละส่วนประกอบมีรูปทรงที่สม่ำเสมอ

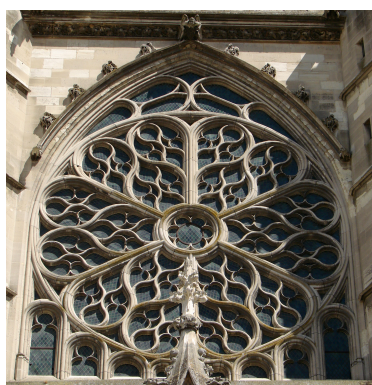


Figure 1.4: Meaux Cathedral, France (Flamboyant Gothic)

- Baroque สไตล์บาโรกมีการใช้หน้าต่างตามากขึ้น ซึ่งไม่ได้เป็นรูปวงกลมเสมอไป แต่มักเป็นรูปไข่หรือมีรูปร่างที่ซับซ้อนกว่า มักถูกล้อมรอบด้วยงานแกะสลักอันหรูหรา จุดประสงค์ของหน้าต่างดังกล่าวคือการส่องสว่างพื้นที่ภายในอย่างละเอียด โดยไม่ต้องใช้หน้าต่างบานใหญ่



Figure 1.5: Baroque of Catania (Baroque)

นอกจากความสวยงามของหน้าต่างหลากหลายแล้ว ผู้ศึกษาสนใจที่จะศึกษาองค์ประกอบ คุณสมบัติ สมการที่เกี่ยวข้องของหน้าต่างหลากหลายในด้านคณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวข้องกับรูปเรขาคณิตที่มีชื่อว่า “Steiner Chain” และจะศึกษาวิธีการสร้างหน้าต่างหลากหลายจาก Steiner Chain

วัตถุประสงค์ของการค้นคว้าอิสระ

1. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของจำนวนวงกลมใน Steiner chain กับรัศมีของวงกลมวงนอก และรัศมีของวงกลมวงใน จากสมการ

$$(r - s)^2 - d^2 = 4rs \tan^2(\pi/n)$$

โดยที่ r คือรัศมีของวงกลมวงนอก s คือรัศมีของวงกลมวงใน d คือระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองวง และ n คือจำนวนวงกลมใน Steiner Chain

2. เพื่อศึกษาการสร้างหน้าต่างหลากหลายจาก Steiner Chain

ขอบเขตของการค้นคว้าอิสระ

ศึกษาความสัมพันธ์ของจำนวนวงกลมใน Steiner chain (n) กับรัศมีของวงกลมวงนอก (r) และรัศมีของวงกลมวงใน (s) จากสมการ $(r - s)^2 - d^2 = 4rs \tan^2(\pi/n)$ ซึ่งจะศึกษาทั้งหมด 2 กรณี ดังนี้

- กรณีที่วงกลมทั้งสองวงมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ตำแหน่งเดียวกัน ($d = 0$)
- กรณีที่วงกลมทั้งสองวงมีจุดศูนย์กลางคนละตำแหน่ง ($d > 0$); (วงกลมวงในสัมผัสกับวงกลมวงนอก)

วิธีการดำเนินการค้นคว้าอิสระ

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับหน้าตาของรูปหลายเหลี่ยมและ Steiner chain
2. ศึกษาทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับ Steiner chain
3. ตั้งสมมติฐาน และทำการพิสูจน์ความสัมพันธ์ของจำนวนวงกลมใน Steiner chain
4. เขียนเล่ม และตรวจสอบความถูกต้อง

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการค้นคว้าอิสระ

1. เข้าใจความสัมพันธ์ของจำนวนวงกลมใน Steiner chain (n) กับรัศมีของวงกลมวงนอก (r) และรัศมีของวงกลมวงใน (s) จากสมการ $(r - s)^2 - d^2 = 4rs \tan^2(\pi/n)$
2. เข้าใจวิธีการสร้างหน้าตาของรูปหลายเหลี่ยมจาก Steiner Chain

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

บทนิยาม 2.1 Steiner chain คือ ชุดของวงกลมที่บรรจุอยู่ระหว่างวงกลมที่ไม่ตัดกันสองวง โดยที่วงกลมแต่ละวงจะต้องประชิดกันและสัมผัสกับวงกลมทั้งสองวงที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 2.2

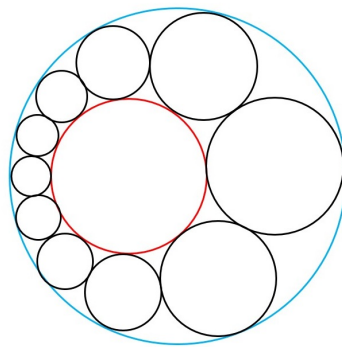


Figure 2.1: Steiner chain จำนวน 10 วง

บทนิยาม 2.3 พิจารณาวงกลม c ที่มีจุดศูนย์กลางวงกลมอยู่ที่จุด O และมีรัศมี r ให้ P เป็นจุดใด ๆ บนระนาบ อินเวอร์สของ P เทียบกับวงกลม c คือจุด P' ที่อยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุด O และ P โดยที่ $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$

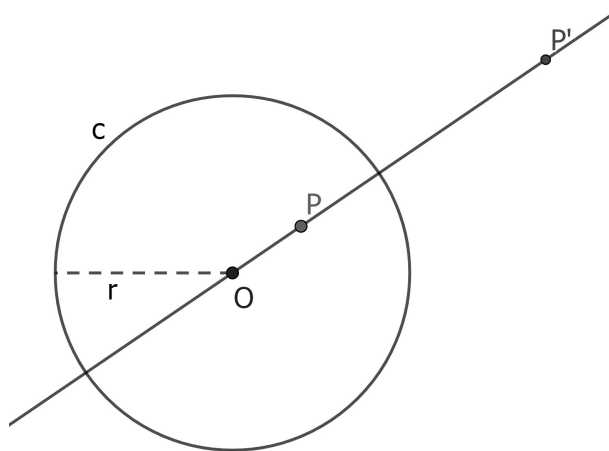


Figure 2.2: จุด P' คืออินเวอร์สของจุด P

ข้อสังเกต จุด P และ จุด P' จะเป็นจุดอินเวอร์สของกันและกัน กล่าวคือ เมื่อจุด P อยู่ในวงกลม จุด P' จะอยู่นอกวงกลม ในทางตรงกันข้าม หากจุด P ใด ๆ อยู่นอกวงกลม จุด P' จะอยู่ในวงกลม การหาจุดอินเวอร์สสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 จุด P เป็นจุดที่อยู่ในวงกลม

1. วาดรังสีจาก O (จุดศูนย์กลางของวงกลม c) ผ่านจุด P
2. วาดเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้น $\overline{OP}$ และตัดกันที่จุด P
3. กำหนดให้จุด N และจุด N' เป็นจุดตัดของวงกลม c และเส้นตั้งฉากที่วาดในข้อที่ 2.
4. วาดเส้นตรง $\overline{ON}$
5. วาดเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้น $\overline{ON}$ ซึ่งเป็นเส้นสัมผัสวงกลม c ที่จุด N
6. เกิดจุดตัด P' ของเส้นตรงในข้อ 1. และข้อ 5. ซึ่งเป็นจุดอินเวอร์สของจุด P

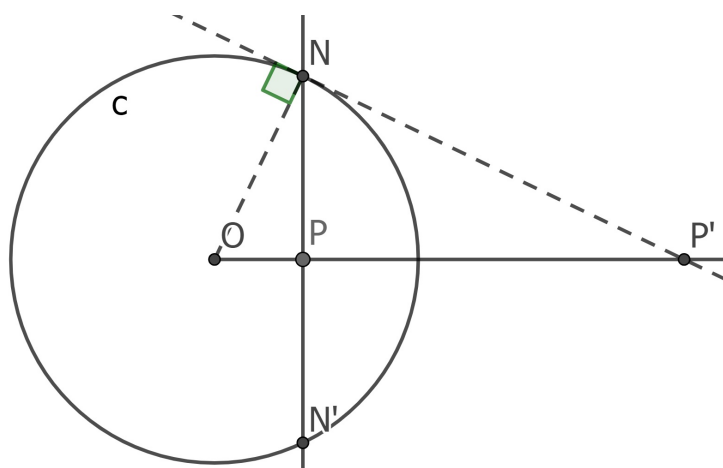


Figure 2.3: จุด P อยู่ในวงกลม และจุด P' อยู่นอกวงกลม

จากภาพ 2.3 จะได้ว่า $\triangle OPN \sim \triangle ONP'$ เนื่องจาก $\angle NOP = \angle NOP'$ และ $\angle OPN = \angle ONP'$ จากสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจะได้ว่า

$$\overline{OP}/\overline{ON} = \overline{ON}/\overline{OP'}$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{ON}^2$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

กรณีที่ 2 จุด P เป็นจุดที่อยู่นอกวงกลม

1. ลากเส้นตรงจากจุด O (จุดศูนย์กลางของวงกลม c) ถึงจุด P
2. กำหนดให้จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของเส้น $\overline{OP}$
3. วาดวงกลมโดยให้จุด M เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และวงกลมจะต้องผ่านจุด P
4. กำหนดให้จุด N และจุด N' เป็นจุดตัดของวงกลมทั้งสองวง
5. ลากเส้นตรง $\overline{NN'}$
6. เกิดจุดตัด P' ของเส้นตรง $\overline{NN'}$ และเส้นตรง $\overline{OP}$ ซึ่งเป็นจุดอินเวอร์สของจุด P

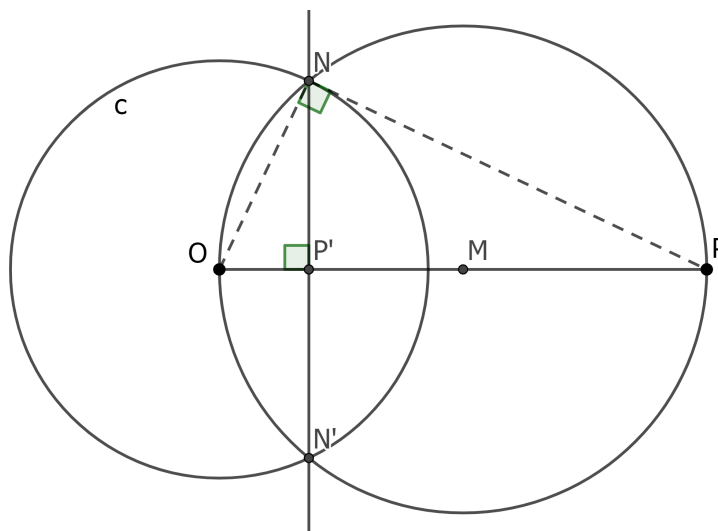


Figure 2.4: จุด P อยู่นอกวงกลม และจุด P' อยู่ในวงกลม

จากภาพ 2.4 จะได้ว่า $\triangle OP'N \sim \triangle ONP$ เนื่องจาก $\angle NOP' = \angle NOP$ และ $\angle OP'N = \angle ONP$ จากสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจะได้ว่า

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OP}}$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{ON}^2$$

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$$

บทนิยาม 2.4 ให้ C_1 และ C_2 เป็นวงกลมที่มีรัศมี M_1 และ M_2 ตามลำดับ เราจะกล่าวว่าวงกลมตั้งฉากกัน ถ้าวงกลม C_1 และ C_2 ตัดกันและเส้นสัมผัสวงกลม ณ จุดตัด S_1 และ S_2 ตั้งฉากกัน

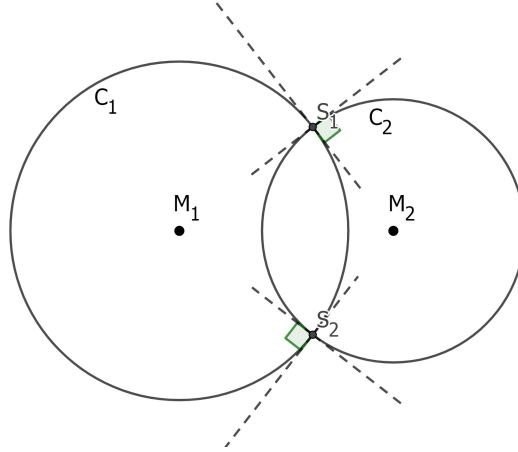


Figure 2.5: วงกลม C_1 และ C_2 ตั้งฉากกัน

บทนิยาม 2.5 กำหนดให้ C_1 และ C_2 เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ M_1 และ M_2 รัศมี r_1 และ r_2 ตามลำดับ กำลังของจุด P เทียบกับวงกลมทั้งสองคือ

$$\Pi_1(P) = \overline{PM_1}^2 - r_1^2, \quad \Pi_2(P) = \overline{PM_2}^2 - r_2^2$$

แกนเรดิคอล คือเซตของจุด P ทั้งหมดที่

$$\Pi_1(P) = \Pi_2(P) \quad (2.1)$$

ข้อสังเกต แกนเรดิคอลจะตั้งฉากกับเส้นตรง $\overline{M_1M_2}$ เสมอ

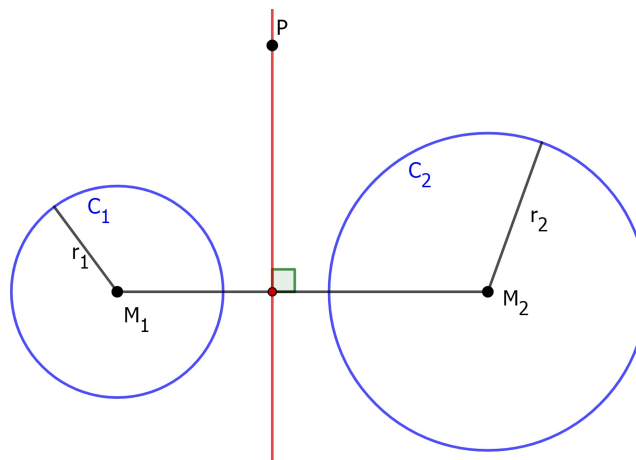


Figure 2.6: แกนเรดิคอลของวงกลม C_1 และ C_2

ทฤษฎีบท 2.6 กำหนดให้ C_1 และ C_2 เป็นวงกลมสองวงที่ไม่ตัดกัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ M_1 และ M_2 ตามลำดับ จะมีสองจุดเรียกว่า L และ L' ที่อยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลาง M_1 และ M_2 ให้ E เป็นวงกลมใด ๆ ที่ตัดวงกลม C_1 และ C_2 แบบตั้งฉาก จะได้ว่าวงกลม E ผ่าน L และ L' เสมอ (สามารถศึกษาการพิสูจน์ได้จากหนังสือ Geometry: A Comprehensive Course โดย D. Pedoe หน้า 95-96)

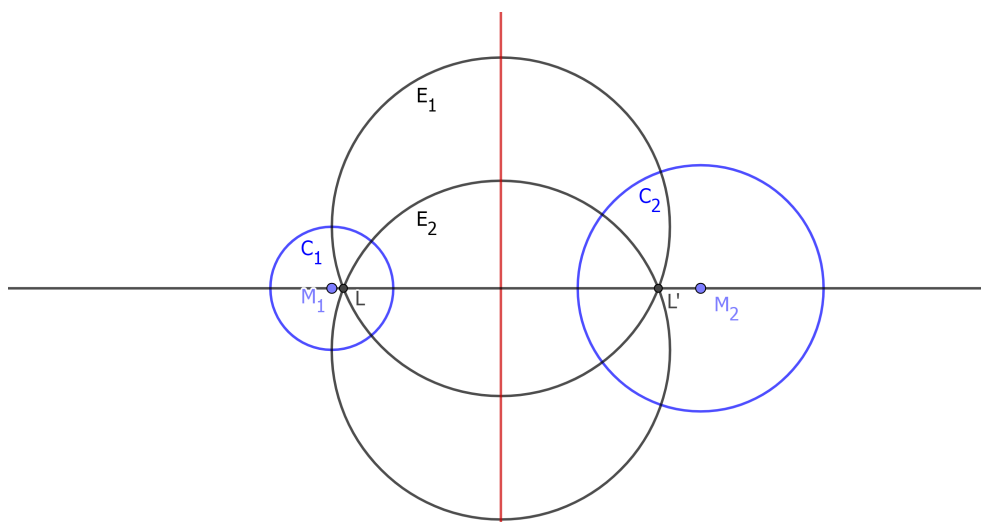


Figure 2.7: จุด L และ L' ที่ปรากฏบนเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลาง M_1 และ M_2

ต่อไปผู้ศึกษาจะยกตัวอย่างการหาจุด L และ L' ที่ปรากฏในทฤษฎีบท 2.6 ตัวอย่างการหาจุด L และ L' มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดให้วงกลม C_1 และ C_2 เป็นวงกลมสองวงที่ไม่ตัดกัน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ M_1 และ M_2 ให้มีพิกัดเป็น $(-1, 0)$ และ $(3, 0)$ ตามลำดับ โดยที่ $r_1 = 1$ และ $r_2 = 2$
2. ลากเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลาง M_1 และ M_2 ดังภาพ 2.8

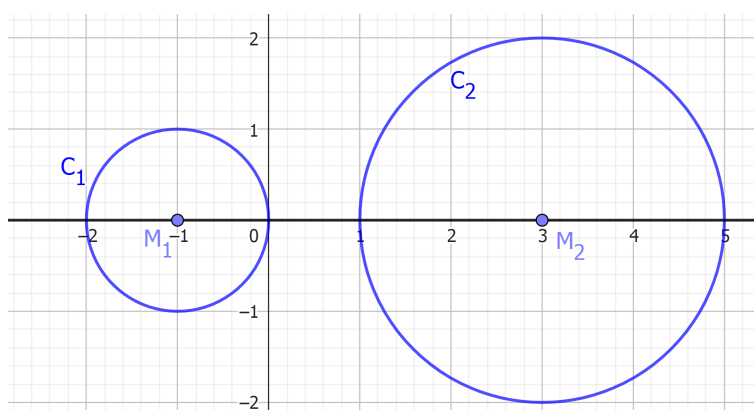


Figure 2.8: เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลาง M_1 และ M_2 ของวงกลม C_1 และ C_2 ตามลำดับ

3. กำหนด $P(x, y)$ เป็นจุดบนระนาบที่สอดคล้องกับสมการ 2.1 จะได้ว่า $x = 0.625$ วาดเส้นตรง $x = 0.625$ ซึ่งเส้นตรงนี้คือแกนเรดิคอลของวงกลม C_1 และ C_2 ดังภาพ 2.9

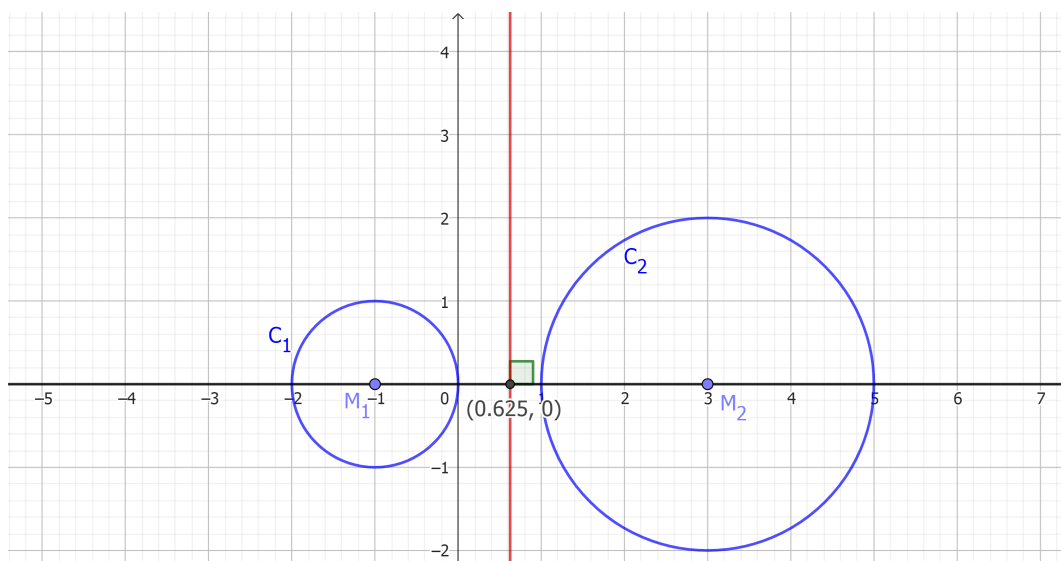


Figure 2.9: แกนเรดิคอลของวงกลม C_1 และ C_2

4. ให้จุด $P(0.625, 2)$ เป็นจุดที่อยู่บนแกนเรดิคอล จากนั้นวาดเส้นสัมผัสวงกลม C_1 และ C_2 กับจุด P ทำให้เกิดจุดที่เส้นตรงสัมผัสกับวงกลมทั้งหมด 4 จุด นั่นคือ จุด S_1, T_1, S_2, T_2 ดังภาพ 2.10

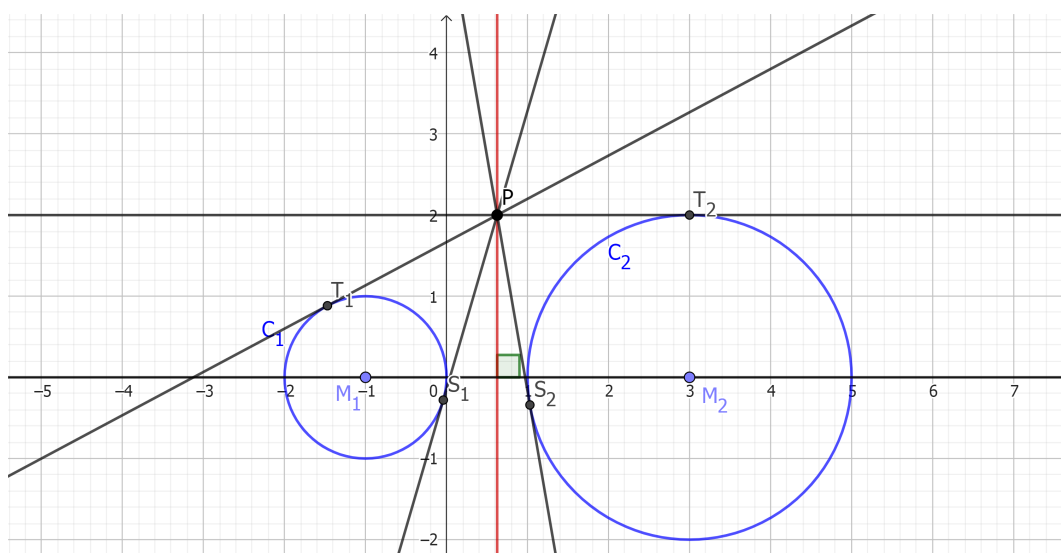


Figure 2.10: จุด S_1, T_1, S_2 และ T_2 คือจุดสัมผัสของเส้นสัมผัสวงกลม C_1 และ C_2 กับจุด P

5. สร้างวงกลม C_0 รัศมี $\overline{PT_1}$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด P จากสมบัติการตั้งฉากของวงกลมจะได้ว่าจุด S_1, T_1, S_2 และ T_2 อยู่บนวงกลมนี้ด้วย ดังภาพ 2.11

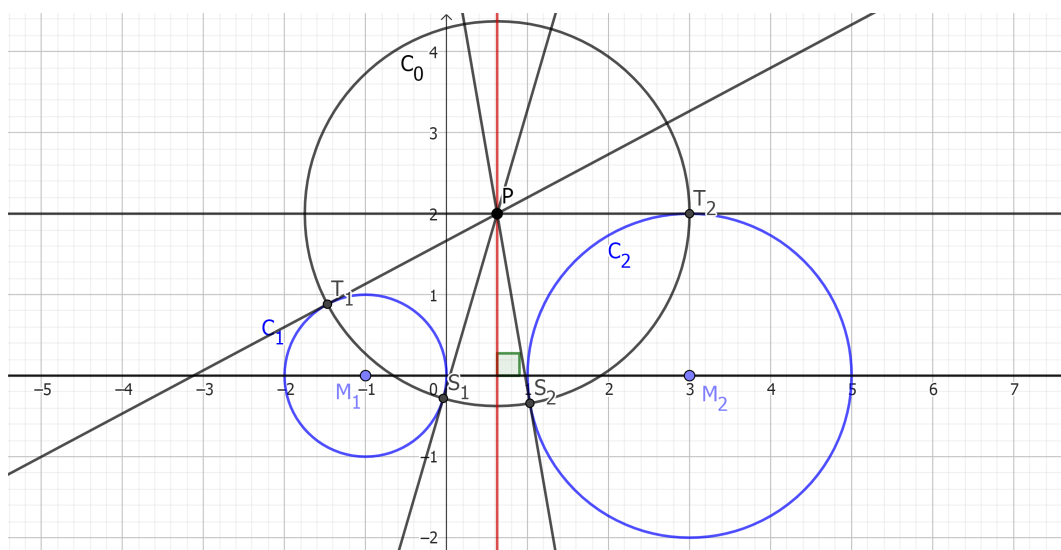


Figure 2.11: วงกลม C_0 ตั้งฉากกับวงกลม C_1 และ C_2

6. เกิดจุดตัดของวงกลม C_0 กับเส้นตรงที่ผ่านจุด M_1 และ M_2 ให้จุดตัดที่เกิดขึ้นทั้งสองจุดนั้นเป็น L และ L' ดังภาพ 2.12

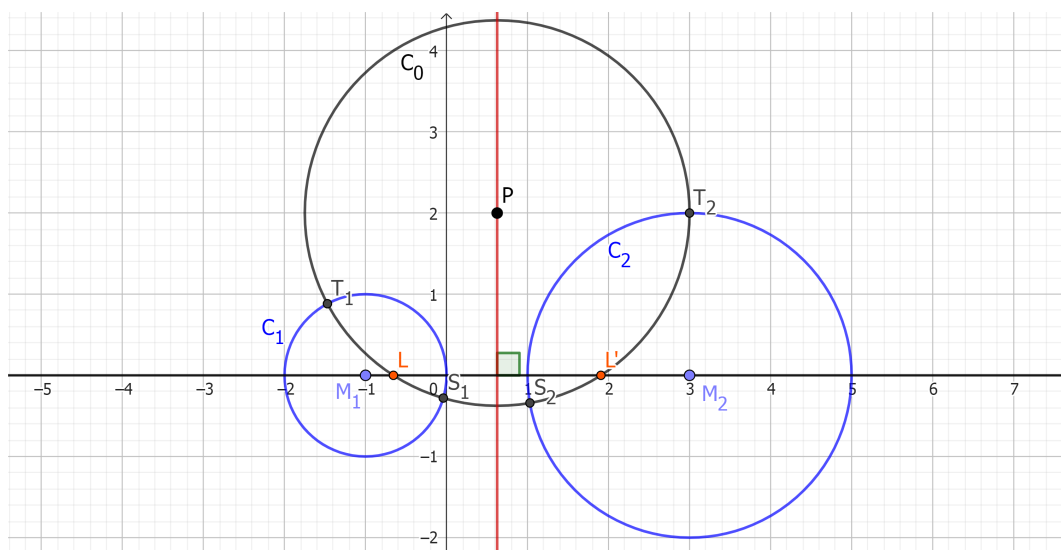


Figure 2.12: วงกลม C_0 ตัดกับเส้นตรงที่ผ่านจุด M_1 และ M_2 เกิดจุด L และ L'

ทฤษฎีบท 2.7 (Secant Theorem) สำหรับสองเส้นตรง $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ ที่ตัดกัน ณ จุด P ซึ่งถ้า A, B, C และ D เป็นจุดบนวงกลมเดียวกัน จะได้ว่า

$$\overline{PA} \cdot \overline{PD} = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$$

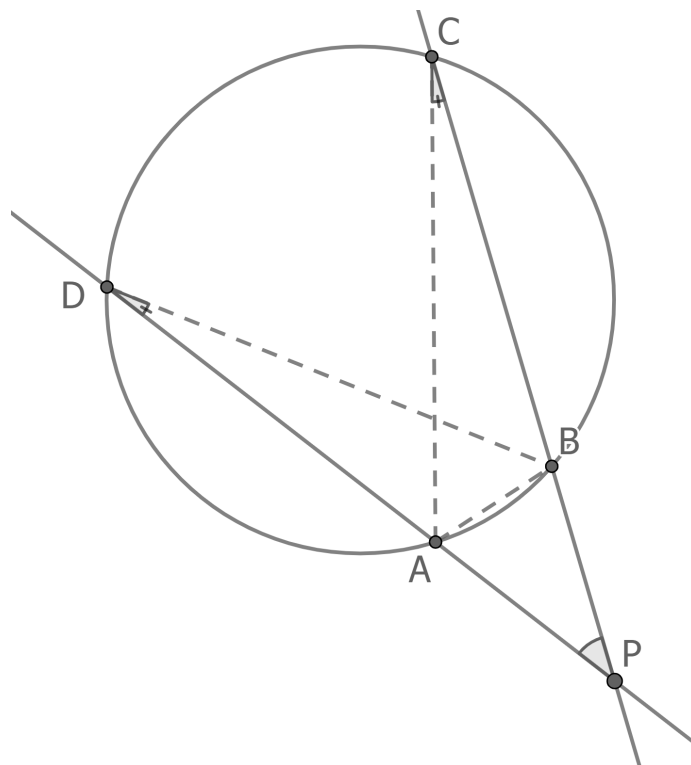


Figure 2.13: เส้นตรง $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ ตัดวงกลมเดียวกัน และตัดกัน ณ จุด P

พิสูจน์. ให้ $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ เป็นเส้นตรงที่ตัดกันที่จุด P และให้ A, B, C และ D เป็นจุดที่อยู่บนวงกลมเดียวกัน ดังภาพ 2.13 จะได้ว่า $\triangle PAC \sim \triangle PBD$ เนื่องจาก $\angle APC = \angle BPD$ และ $\angle ADB = \angle ACB$ เพราะเป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม จากสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจะได้ว่า

$$\overline{PA}/\overline{PC} = \overline{PB}/\overline{PD}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PD} = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$$

□

ทฤษฎีบท 2.8 (Tangent-Secant Theorem) กำหนด g เป็นเส้นตรงที่ตัดวงกลม ณ จุด G_1 และ G_2 และ t เป็นเส้นตรงที่สัมผัสวงกลม ณ จุด T กำหนดให้ g และ t ตัดกันที่จุด P จะได้ว่า

$$\overline{PT}^2 = \overline{PG_1} \cdot \overline{PG_2}$$

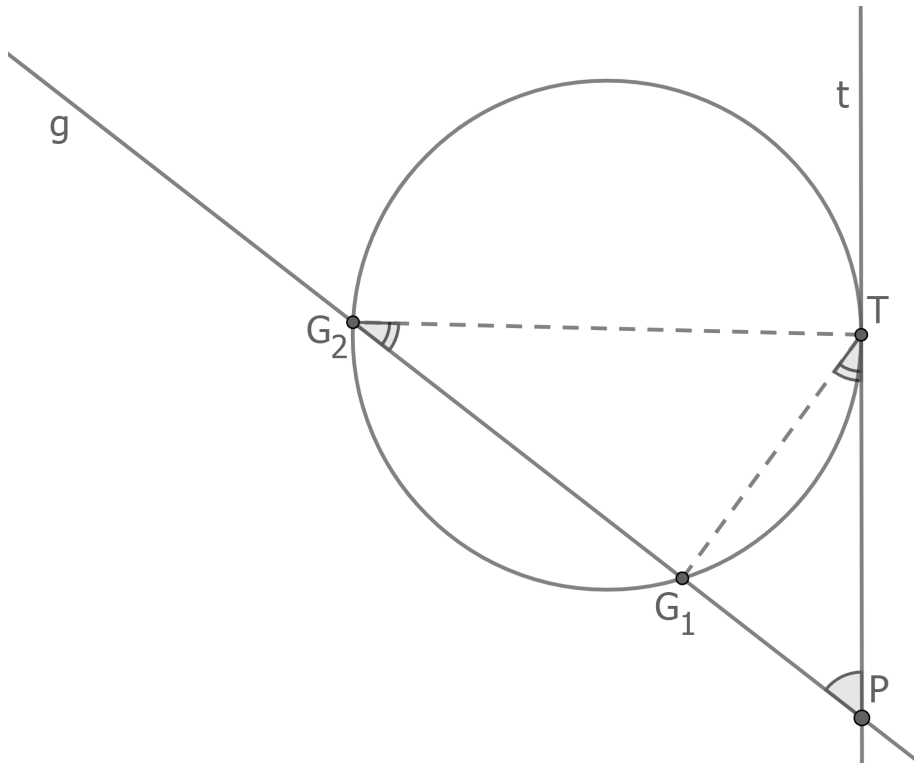


Figure 2.14: เส้นตรง g และ t ตัดกัน ณ จุด P

พิสูจน์. ให้ g และ t ตัดกันที่จุด P โดยที่ g เป็นเส้นตรงที่ตัดวงกลม ณ จุด G_1 และ G_2 และ t เป็นเส้นตรงที่สัมผัสวงกลม ณ จุด T ดังภาพ 2.14 จะได้ว่า $\triangle PG_1T \sim \triangle PTG_2$ เนื่องจาก $\angle G_1PT = \angle TPG_2$ และ $\angle G_1TP = \angle TG_2P$ จากสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \overline{PT}/\overline{PG_1} &= \overline{PG_2}/\overline{PT} \\ \overline{PT}^2 &= \overline{PG_1} \cdot \overline{PG_2} \end{aligned}$$

□

บทนิยาม 2.9 กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ ที่มี $\angle CAB = \angle FDE$ และ $\overline{CA}/\overline{FD} = \overline{AB}/\overline{DE}$ จะได้ว่าสามเหลี่ยมทั้งสองคล้ายกันแบบด้าน-มุม-ด้าน

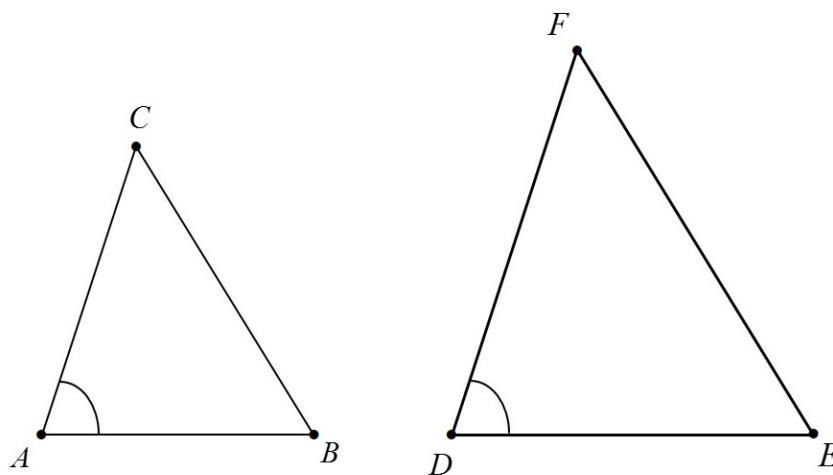


Figure 2.15: สามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันแบบด้าน-มุม-ด้าน

บทตั้ง 2.10 สำหรับจุด A และ B ที่ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันซึ่งผ่านจุดศูนย์กลาง O ของวงกลม c รัศมี R กำหนดให้ A' และ B' เป็นอินเวอร์สของ A และ B ผ่านวงกลม c จะได้ว่า $\triangle OA'B'$ และ $\triangle OBA$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

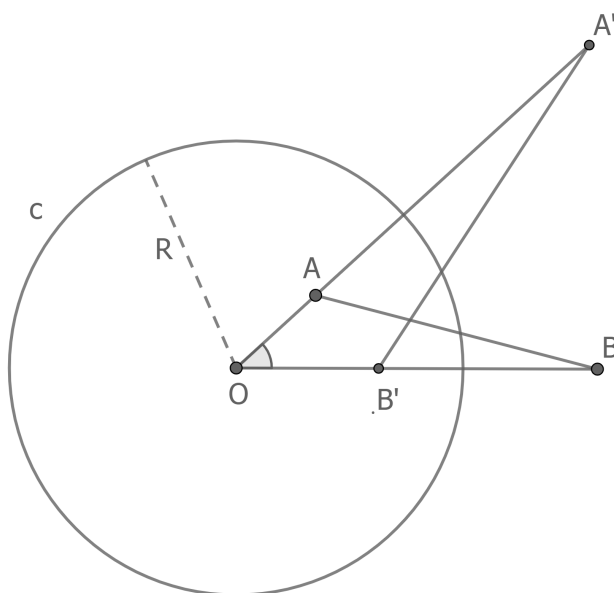


Figure 2.16: อินเวอร์สจุดสองจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันผ่านวงกลมจะได้ว่า $\triangle OA'B' \sim \triangle OBA$

พิสูจน์. กำหนด c เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง O รัศมี R ให้ A เป็นจุดในวงกลม c และ B เป็นจุดนอกวงกลม c และให้ A' และ B' เป็นจุดอินเวอร์สของ A และ B ดังภาพ 2.16 ทำให้ได้ $\triangle OA'B'$ และ $\triangle OBA$ ต้องการแสดงว่าสามเหลี่ยมสองรูปนี้คล้ายกัน

จากบทนิยาม 2.3 จะได้ $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2$ และ $\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = R^2$

พิจารณา

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$$

$$\overline{OA'} / \overline{OB} = \overline{OB'} / \overline{OA}$$

จาก $\angle A'OB' = \angle AOB$ และ $\overline{OA'} / \overline{OB} = \overline{OB'} / \overline{OA}$ ตามบทนิยาม 2.9 จะได้ว่า $\triangle OA'B' \sim \triangle OBA$ □

ข้อสังเกต 2.11 เนื่องจาก $\triangle OA'B' \sim \triangle OBA$ จะได้ว่า

$$\overline{A'B'} / \overline{AB} = \overline{OB'} / \overline{OA}$$

$$\overline{A'B'} / \overline{AB} = (R^2 / \overline{OB}) / \overline{OA}$$

$$\overline{A'B'} = (R^2 / \overline{OA} \cdot \overline{OB}) \overline{AB}$$

บทนิยาม 2.12 ถ้า A, B, C และ D เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะมีฟังก์ชันของจุดที่เรียกว่าอัตราส่วนข้าม (Cross-ratio) เขียนแทนด้วย $\{AB, CD\}$ และกำหนดโดย $\{AB, CD\} = \overline{AC} / \overline{AD} : \overline{BC} / \overline{BD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} / \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

ทฤษฎีบท 2.13 ให้ A, B, C และ D เป็นจุดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ถ้าเราอินเวอร์สจุดทั้งสี่จุดด้วยวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง O จะได้ว่า $\{A'B', C'D'\} = \{AB, CD\}$

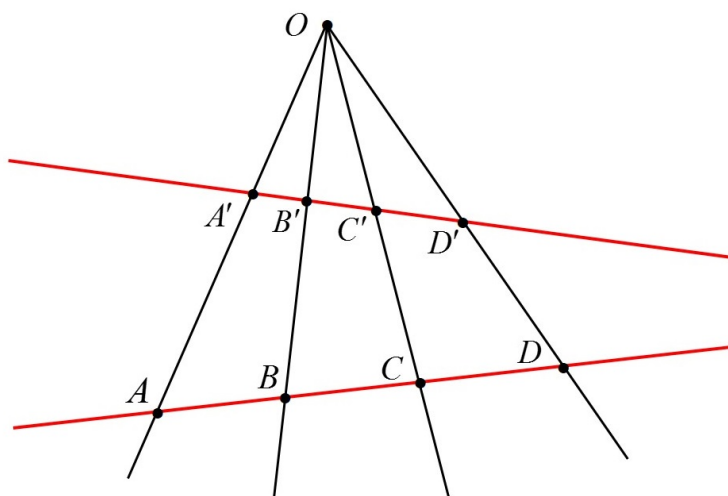


Figure 2.17: อินเวอร์สของจุด A, B, C และ D ที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

พิสูจน์. ให้ R เป็นรัศมีของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ O จากบทตั้ง 2.10 และ ข้อสังเกต 2.11 พิจารณา

$$\overline{A'C'} = (R^2/\overline{OA} \cdot \overline{OC}) \overline{AC}, \quad \overline{B'C'} = (R^2/\overline{OB} \cdot \overline{OC}) \overline{BC}$$

$$\overline{A'D'} = (R^2/\overline{OA} \cdot \overline{OD}) \overline{AD}, \quad \overline{B'D'} = (R^2/\overline{OB} \cdot \overline{OD}) \overline{BD}$$

ดังนั้น

$$\overline{A'C'}/\overline{B'C'} = (\overline{OB}/\overline{OA}) (\overline{AC}/\overline{BC}) \quad (2.2)$$

$$\overline{A'D'}/\overline{B'D'} = (\overline{OB}/\overline{OA}) (\overline{AD}/\overline{BD}) \quad (2.3)$$

นำสมการ 2.2 หารด้วยสมการ 2.3 จะได้ว่า

$$\overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'}/\overline{A'D'} \cdot \overline{B'C'} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}/\overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

$$\text{ดังนั้น } \{A'B', C'D'\} = \{AB, CD\}$$

□

การอินเวอร์สวงกลม

การอินเวอร์สวงกลมจะใช้หลักการเกี่ยวกับการอินเวอร์สจุดในบทนิยาม 2.3 กล่าวคือเราจะอินเวอร์สทุกจุดบนวงกลมผ่านวงกลมอินเวอร์ส ทั้งนี้จุดศูนย์กลางเดิมอาจจะไม่ถูกอินเวอร์สเป็นจุดศูนย์กลางใหม่

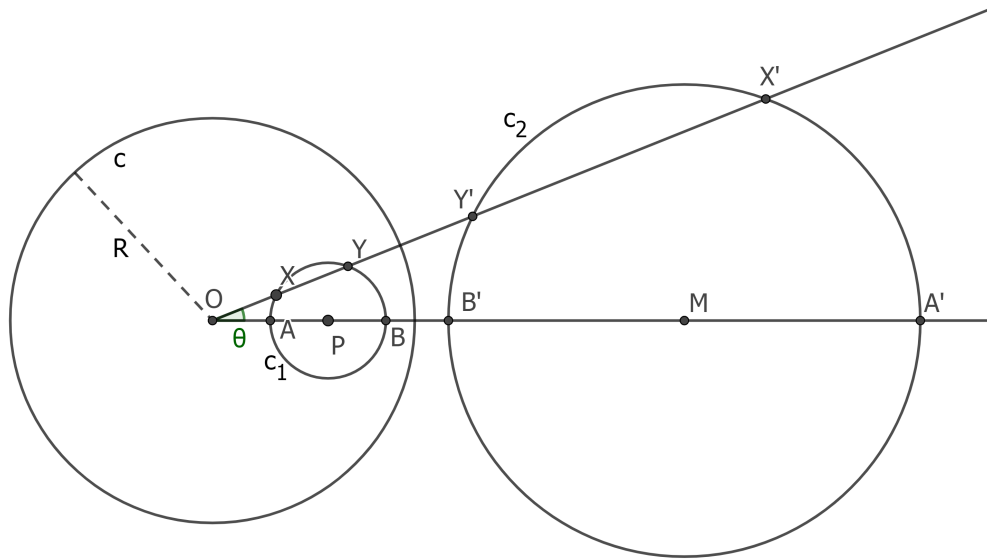


Figure 2.18: อินเวอร์สวงกลม c_1 เป็นวงกลม c_2

กำหนดให้ c เป็นวงกลมอินเวอร์ส รัศมี R จุดศูนย์กลาง O และให้ c_1 เป็นวงกลมที่ถูกอินเวอร์สจุดศูนย์กลาง P เราจะสามารถสร้างเส้นตรงที่ผ่านทั้งสองจุดนี้ได้ เกิดจุดตัดของวงกลม c_1 กับเส้นตรงนี้ให้เป็น A และ B ให้ A' และ B' เป็นอินเวอร์สของ A และ B ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของ A' และ B' จะได้ว่า c_2 เป็นวงกลมอินเวอร์สของ c_1 จุดศูนย์กลางที่ M รัศมี $\overline{MA'}$ หลังจากการอินเวอร์ส การที่วงกลม

ขยายหรือหดตัวจะขึ้นอยู่กับค่าคงที่ k ค่าหนึ่ง โดยที่ทุกจุดบน c_2 ถูกกำหนดโดยจุดบน วงกลม c_1 ซึ่งให้เป็นจุด X ใดๆ เราจะอินเวอร์สจุด X ไปยังจุดที่มีระยะห่างเท่ากับ $k(\overline{OX})$ จาก O ($k > 1$ สำหรับการขยาย, $0 < k < 1$ สำหรับการหดตัว) ให้ Y เป็นอีกจุดที่อยู่บนวงกลม c_1 ซึ่งอยู่บนรังสี $\overline{OX}$ ด้วย จากนิยาม 2.3 การอินเวอร์สจุด จะได้ว่า

$$\overline{OY'} = R^2/\overline{OY} = (\overline{OX}/\overline{OX})(R^2/\overline{OY}) = (R^2/\overline{OX} \cdot \overline{OY})(\overline{OX})$$

จากทฤษฎีบท 2.7 Secant theorem ได้ว่า

$$\overline{OX} \cdot \overline{OY} = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned}\overline{OY'} &= (R^2/\overline{OA} \cdot \overline{OB})(\overline{OX}) \\ &= k \cdot \overline{OX}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$k = R^2/\overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

สรุปได้ว่าค่าคงที่ k ขึ้นอยู่กับขนาดของวงกลม c และระยะห่างจากจุด O

ข้อสังเกต 2.14 จากภาพ 2.18 ถ้าจุด $X = Y$ จะได้ว่า รังสี $\overline{OX}$ กลายเป็นเส้นสัมผัสวงกลมดังภาพ 2.19 จุด X จะถูกอินเวอร์สเป็นจุด X' ให้ r และ r' เป็นรัศมีของ c_1 และ c_2 ตามลำดับ ทำให้ได้ว่า $\triangle OXP \sim \triangle OX'M$ ทำให้ได้ความสัมพันธ์

$$\begin{aligned}r/\overline{OX} &= r'/\overline{OX'} \\ r/\overline{OX} &= r'/k \cdot \overline{OX} \\ r' &= k \cdot r \\ r' &= (R^2/\overline{OA} \cdot \overline{OB}) \cdot r\end{aligned}$$

จากข้อสังเกต 2.14 เราสามารถสรุปความสัมพันธ์ของรัศมี r ของวงกลม c_1 และ รัศมี r' ของวงกลม c_2 ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$r' = (R^2/\overline{OA} \cdot \overline{OB}) \cdot r$$

ทฤษฎีบท 2.16 พิจารณาวงกลมสองวงที่ไม่ตัดกันดังภาพ 2.21 ที่มีรัศมี r และ s ตามลำดับ โดยกำหนดให้ $r > s$ และระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองวง คือ d จะได้ว่า ถ้ามี Steiner chain ที่มีจำนวนวงกลม n วง จะได้ว่า r, s, d และ n สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$(r - s)^2 - d^2 = 4rs \tan^2(\pi/n)$$

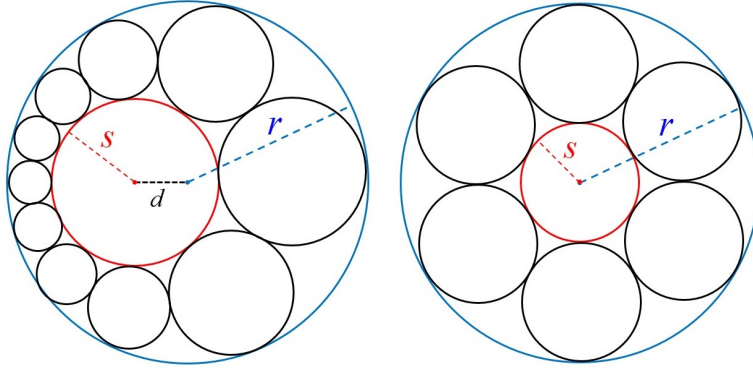


Figure 2.21: วงกลมสองวงที่ไม่ตัดกันโดยมีระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางเป็น d (ซ้าย), วงกลมสองวงที่ไม่ตัดกัน โดยที่ $d = 0$ (ขวา)

พิสูจน์. สมมติว่าเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม α และ β ตัดกันที่จุด A, B และ C, D ตามลำดับ จากทฤษฎีบท 2.15 จะได้จุดอินเวอร์ส A', B' และ C', D' ซึ่งจะเป็นจุดตัดของเส้นผ่านศูนย์กลางกับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน α' และ β'

สมมติว่ารัศมีของ α และ β เป็น r และ s ตามลำดับ ระยะห่างของจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองวงกลมเป็น d

ให้รัศมีของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน α' และ β' เป็น R_1 และ R_2 ตามลำดับ

จากทฤษฎีบท 2.13, $\{AB, CD\} = \{A'B', C'D'\}$ ทำให้ได้ว่า

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} / \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'} / \overline{A'D'} \cdot \overline{B'C'}$$

จากภาพที่ 2.22 จะได้ด้านซ้ายของสมการ

$$(r - d - s)(r + d - s) / (r - d + s)(r + d + s) = [(r - s)^2 - d^2] / [(r + s)^2 - d^2]$$

และด้านขวาของสมการ

$$(R_1 - R_2)^2 / (R_1 + R_2)^2$$

นำทั้งสองข้างของสมการมาเท่ากันและจัดรูปสมการจะได้ว่า

$$(r - s)^2 - d^2 = rs(R_1/R_2 + R_2/R_1 - 2) \quad (2.4)$$

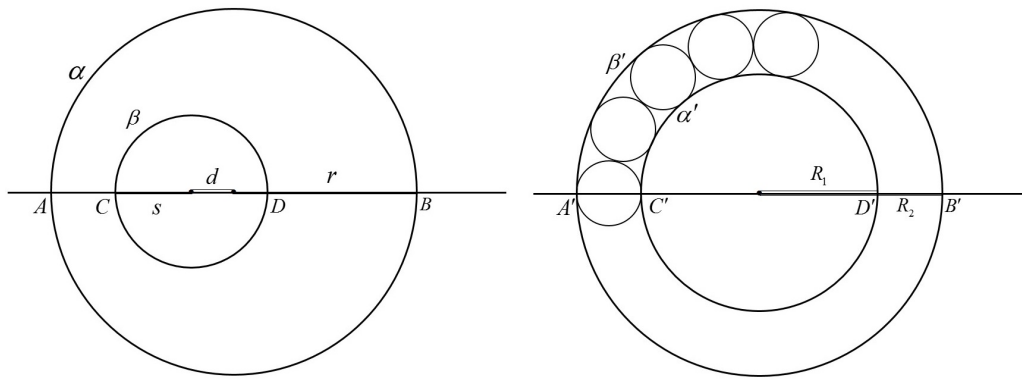


Figure 2.22: วงกลมสองวงที่ไม่ตัดกันโดยมีระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางเป็น d (ซ้าย), วงกลมสองวงที่ไม่ตัดกัน โดยที่ $d = 0$ (ขวา)

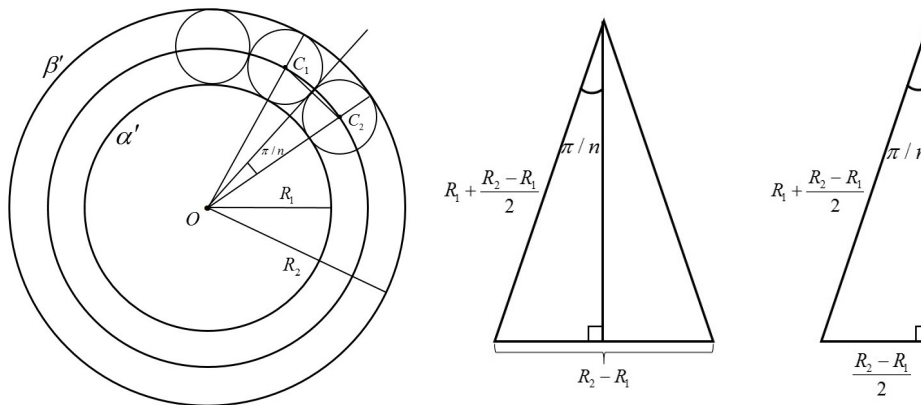


Figure 2.23: Steiner chain n วง ที่สัมผัสกับวงกลม α' และ β' (ซ้าย), สามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ปรากฏในภาพซ้าย (ขวา)

ถ้าวาดห่วงโซ่ n วงที่ติดกับวงกลม α' และ β' ดังภาพที่ 2.23 เมื่อเราพิจารณาสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ปรากฏ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sin(\pi/n) &= \frac{(R_2 - R_1)/2}{R_1 + (R_2 - R_1)/2} \\ &= \frac{R_2 - R_1}{2} \cdot \frac{2}{2R_1 + R_2 - R_1} \\ &= (R_2 - R_1)/(R_2 + R_1)\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์

$$\sin(\pi/n) = (R_2 - R_1)/(R_2 + R_1)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 (R_2 - R_1)/(R_2 + R_1) &= \sin(\pi/n) \\
 R_2 - R_1 &= (R_2 + R_1) \sin(\pi/n) \\
 R_2 - R_1 &= R_2 \sin(\pi/n) + R_1 \sin(\pi/n) \\
 R_2(1 - \sin(\pi/n)) &= R_1(1 + \sin(\pi/n)) \\
 R_2/R_1 &= (1 + \sin(\pi/n))/(1 - \sin(\pi/n)) \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

แทนสมการ 2.5 ในสมการ 2.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 (r - s)^2 - d^2 &= rs \left(\frac{1 - \sin(\pi/n)}{1 + \sin(\pi/n)} + \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)} - 2 \right) \\
 &= rs \left(\frac{(1 - \sin(\pi/n))^2 + (1 + \sin(\pi/n))^2 - 2(1 - \sin(\pi/n))(1 + \sin(\pi/n))}{(1 + \sin(\pi/n))(1 - \sin(\pi/n))} \right) \\
 &= rs \frac{[(1 - \sin(\pi/n)) - (1 + \sin(\pi/n))]^2}{(1 + \sin(\pi/n))(1 - \sin(\pi/n))} \\
 &= rs \frac{(-2 \sin(\pi/n))^2}{1 - \sin^2(\pi/n)} \\
 &= 4rs \frac{\sin^2(\pi/n)}{\cos^2(\pi/n)} \\
 &= 4rs \tan^2(\pi/n)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(r - s)^2 - d^2 = 4rs \tan^2(\pi/n)$$

□

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Main Results)

3.1 สมบัติของ Steiner chain

ผู้ศึกษาจะศึกษาความสัมพันธ์ของจำนวนวงกลมใน Steiner chain (n) กับรัศมีของวงกลมวงนอก (r) และรัศมีของวงกลมวงใน (s) โดยที่ d คือระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองวง จากสมการ

$$(r - s)^2 - d^2 = 4rs \tan^2(\pi/n) \quad (3.1)$$

ข้อสังเกต จากการการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.16 จะได้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\sin(\pi/n) = (r - s)/(r + s) \quad (3.2)$$

สมการ 3.1 สอดคล้องกับทฤษฎีบท 2.16 และภาพ 2.21 ซึ่งเป็น Steiner chain ประเภทหนึ่งที่เราจะศึกษาในงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ สามารถแบ่งออกเป็น 2 กรณีใหญ่ๆดังนี้

- กรณีที่วงกลมทั้งสองวงมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่งเดียวกัน ($d = 0$)
- กรณีที่วงกลมทั้งสองวงมีจุดศูนย์กลางคนละตำแหน่ง ($d > 0$)

เพื่อให้ง่ายต่อการศึกษาเราจะจัดรูปสมการ 3.1 เป็นดังนี้

$$n = \frac{\pi}{\arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2 - d^2}{4rs}}} \quad (3.3)$$

กรณีที่วงกลมทั้งสองวงมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่งเดียวกัน ($d = 0$)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะพิจารณาจำนวนวงกลมใน Steiner chain (n) ที่สอดคล้องกับสมการ 3.3 ถ้าเราลดขนาดของรัศมีของวงกลมวงใน (s) จนมีค่าเข้าใกล้ 0 และกำหนดให้รัศมีของวงกลมวงนอก (r) เป็นค่าคงที่ จะทำให้จำนวนวงกลมใน Steiner chain ค่าเข้าใกล้ 2 ดังภาพที่ 3.1

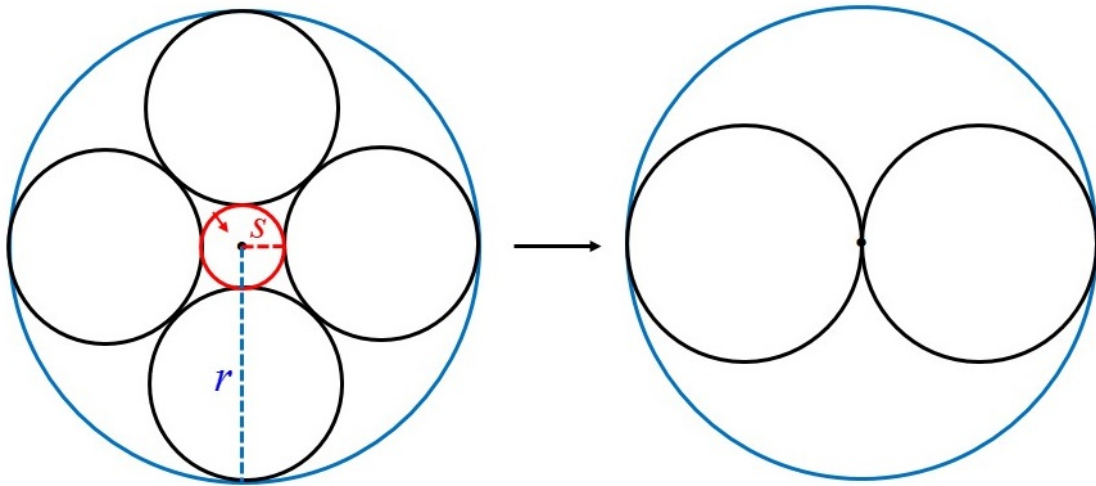


Figure 3.1: ผลลัพธ์จากการลดขนาดรัศมีของวงกลมวงใน จนมีค่าเข้าใกล้ 0

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ $d = 0$ และ $r > 0$ เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า $\lim_{s \rightarrow 0} n(s) = 2$

พิสูจน์. ให้ r เป็นค่าคงที่ จะแสดงว่า $\lim_{s \rightarrow 0} n(s) = 2$ เนื่องจาก $\lim_{s \rightarrow 0} \arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}} = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow 0} n(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{\arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}}} \right) \\
 &= \frac{\lim_{s \rightarrow 0} \pi}{\lim_{s \rightarrow 0} \arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}}} \\
 &= \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

□

หลังจากที่เราได้ทำการลดขนาดของรัศมีของวงกลมวงใน ต่อไปเราจะทำการเพิ่มขนาดรัศมีของวงกลมวงนอก (r) จนมีค่าเข้าใกล้ ∞ และกำหนดให้รัศมีของวงกลมวงใน (s) เป็นค่าคงที่ จะทำให้จำนวนวงกลมใน Steiner chain มีค่าเข้าใกล้ 2 ดังภาพที่ 3.2

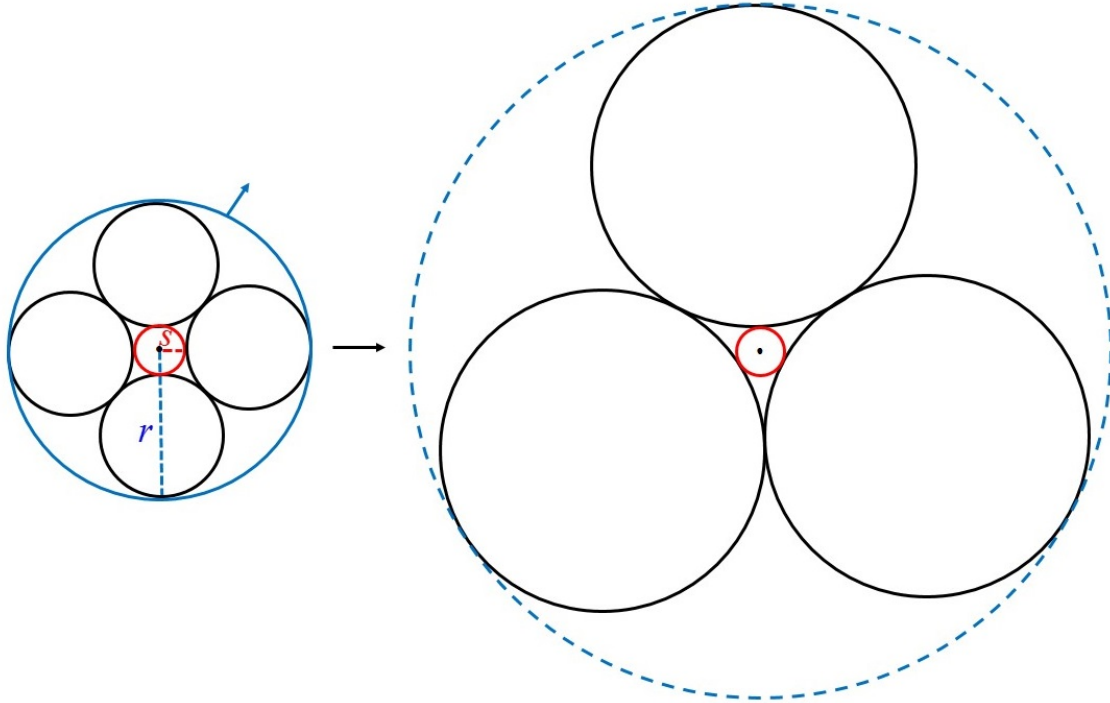


Figure 3.2: ผลลัพธ์จากการเพิ่มขนาดรัศมีของวงกลมวงนอก จนมีค่าเข้าใกล้ ∞

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้ $d = 0$ และ $s > 0$ เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า $\lim_{r \rightarrow \infty} n(r) = 2$

พิสูจน์. ให้ s เป็นค่าคงที่ จะแสดงว่า $\lim_{r \rightarrow \infty} n(r) = 2$ เนื่องจาก $\lim_{r \rightarrow \infty} \arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}} = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} n(r) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}}} \right) \\ &= \frac{\lim_{r \rightarrow \infty} \pi}{\lim_{r \rightarrow \infty} \arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}}} \\ &= \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปเราจะลดขนาดของรัศมีของวงกลมวงใน (s) จนมีค่าเข้าใกล้ 0 และเพิ่มขนาดรัศมีของวงกลมวงนอก (r) จนมีค่าเข้าใกล้ ∞ พร้อมกัน จะทำให้จำนวนวงกลมใน Steiner chain มีค่าเข้าใกล้ 2 ดังภาพที่ 3.3

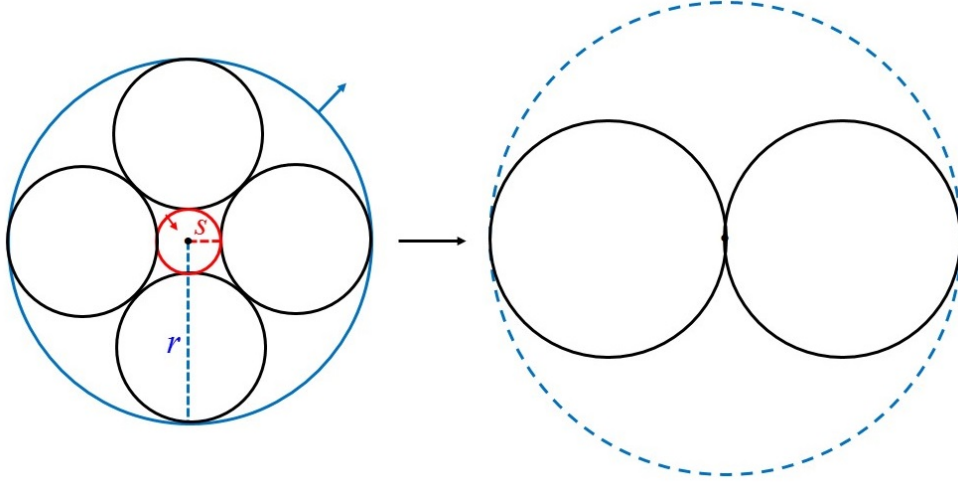


Figure 3.3: ผลลัพธ์จากการลดขนาดรัศมีของวงกลมวงใน จนมีค่าเข้าใกล้ 0 และเพิ่มขนาดรัศมีของวงกลมวงนอก จนมีค่าเข้าใกล้ ∞ พร้อมกัน

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ $d = 0$ และ s มีค่าเข้าใกล้ 0 และ r มีค่าเข้าใกล้ ∞ จะได้ว่า $\lim_{s \rightarrow 0} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} n(r, s) \right] = 2$ และ $\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\lim_{s \rightarrow 0} n(r, s) \right] = 2$

พิสูจน์. จะแสดงว่า $\lim_{s \rightarrow 0} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} n(r, s) \right] = 2$ และ $\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\lim_{s \rightarrow 0} n(r, s) \right] = 2$ เนื่องจาก $\lim_{s \rightarrow 0} \arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}} = \frac{\pi}{2} = \lim_{r \rightarrow \infty} \arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{s \rightarrow 0} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} n(r, s) \right] &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}}} \right) \right] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\lim_{r \rightarrow \infty} \pi}{\lim_{r \rightarrow \infty} \arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}}} \right] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} \right] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} 2 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

ในการทำงานเดียวกัน

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\lim_{s \rightarrow 0} n(r, s) \right] &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{\arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}}} \right) \right] \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\lim_{s \rightarrow 0} \pi}{\lim_{s \rightarrow 0} \arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2}{4rs}}} \right] \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} \right] \\
 &= \lim_{r \rightarrow \infty} 2 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

□

กรณีที่วงกลมทั้งสองวงมีจุดศูนย์กลางกึ่งกลางคนละตำแหน่ง ($d > 0$)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะศึกษาจำนวนวงกลมใน Steiner chain (n) ที่สอดคล้องกับสมการ 3.1 โดยจะพิจารณากรณีที่วงกลมวงในสัมผัสกับวงกลมวงนอก นั่นคือ กรณีที่ d มีค่าเข้าใกล้ $r - s$ จะทำให้วงกลมใน Steiner chain มีเป็นจำนวนจํานวนันต์ ดังภาพที่ 3.4

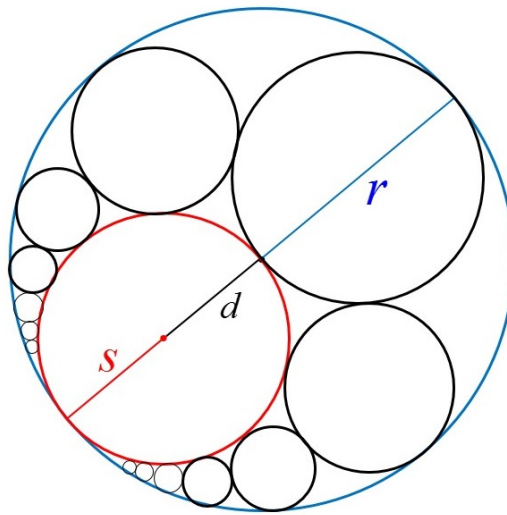


Figure 3.4: วงกลมวงในสัมผัสกับวงกลมวงนอกทำให้มี Steiner chain เป็นจำนวนอนันต์

ทฤษฎีบท 3.4 กำหนดให้ r และ s เป็นค่าคงที่ d มีค่าเข้าใกล้ $r - s$ จะได้ว่า $\lim_{d \rightarrow r-s} n(d) = \infty$

พิสูจน์. ให้ r และ s เป็นค่าคงที่ d มีค่าเข้าใกล้ $r - s$ จะแสดงว่า $\lim_{d \rightarrow r-s} n(d) = \infty$ เนื่องจาก

$$\lim_{d \rightarrow r-s} \frac{(r-s)^2 - d^2}{4rs} = 0 \text{ ทำให้ } \lim_{d \rightarrow r-s} \arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2 - d^2}{4rs}} = 0$$

$$\lim_{d \rightarrow r-s} n(d) = \lim_{d \rightarrow r-s} \left(\frac{\pi}{\arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2 - d^2}{4rs}}} \right) = \infty$$

□

3.2 การสร้างหน้าต่างกุหลาบจาก Steiner chain

ต่อไปจะเป็นการสร้างหน้าต่างกุหลาบในรูปแบบต่าง ๆ จาก Steiner chain เนื่องจากหน้าต่างกุหลาบมีมากมายหลายรูปแบบ ดังนั้นในงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้จึงขอยกตัวอย่างวิธีการสร้างหน้าต่างกุหลาบเพียง 1 ตัวอย่างเท่านั้น นั่นคือ หน้าต่างกุหลาบที่ปรากฏในอาสนวิหารอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ฯ



Figure 3.5: หน้าต่างกุหลาบที่ปรากฏในอาสนวิหารอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ฯ

ขั้นตอนวิธีการสร้างหน้าต่างหลายจาก Steiner chain (อาสนวิหารอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ฯ)

1. สร้างวงกลม A, B, C และ D ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่จุดเดียวกัน ณ จุด O รัศมี r, s, t และ u ตามลำดับ โดยที่ $u < t < s < r$ ดังภาพ 3.6 โดยค่า r, s ต้องสอดคล้องกับสมการ 3.2 มีเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า n จะต้องเป็นเลขคู่ และ $r > s$ ส่วนค่า t หาจากการแทนค่า s ที่ได้เป็น r ในสมการ 3.2 มีเงื่อนไขว่า $n = n/2$

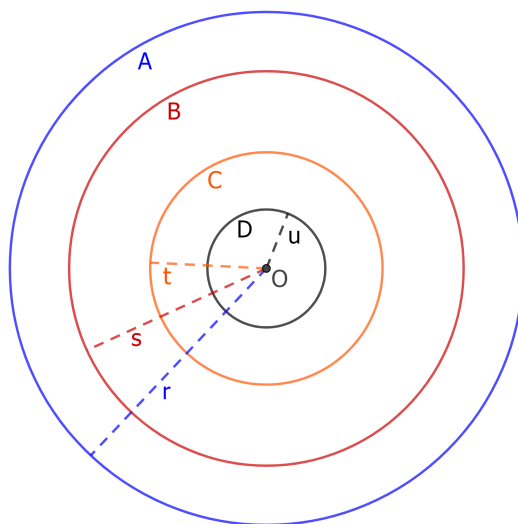


Figure 3.6: วงกลม A, B, C และ D ที่มีจุดศูนย์กลาง O ร่วมกัน

2. สร้างสามเหลี่ยมหน้าจั่ว OEF โดยมีจุด O เป็นจุดยอด ที่มีมุม $\alpha = 360^\circ/n$ (n คือ จำนวนวงกลมใน Steiner chain) ส่วนของเส้นตรง $\overline{EF}$ เป็นฐานของสามเหลี่ยมและเส้นนี้จะเป็นเส้นสัมผัสวงกลม A ที่จุด G ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของเส้น $\overline{EF}$

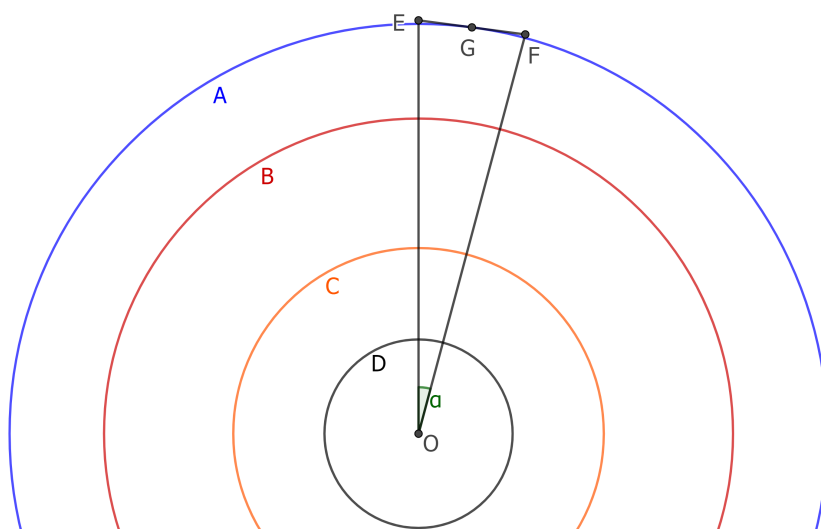


Figure 3.7: สร้างสามเหลี่ยมหน้าจั่ว OEF โดยที่ส่วนของเส้นตรง $\overline{EF}$ สัมผัสวงกลม A ที่จุด G

3. สร้างเส้นแบ่งครึ่งมุมผ่านมุมฐาน E โดยให้ H เป็นจุดตัดของเส้นแบ่งนี้กับเส้นระดับความสูงของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (OG) จากนั้นวาดวงกลมที่มีจุด H เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเป็น HG ซึ่งจะเป็นวงกลมวงแรกใน Steiner chain ดังภาพ 3.8

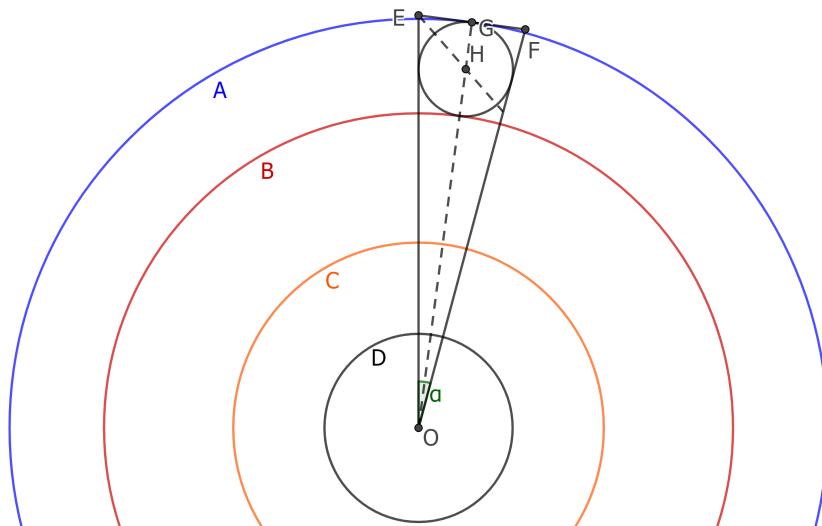


Figure 3.8: วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด H ในสามเหลี่ยมหน้าจั่ว OEF

4. ทำซ้ำโดยสร้างสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่อยู่ติดกันโดยมี $E' = F$ และ F' เป็นมุมฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และมี O เป็นจุดยอด ดังภาพ 3.9 ทำซ้ำไปเรื่อย ๆ จนได้ Steiner chain ที่สมบูรณ์จำนวน n วง ดังภาพ 3.10

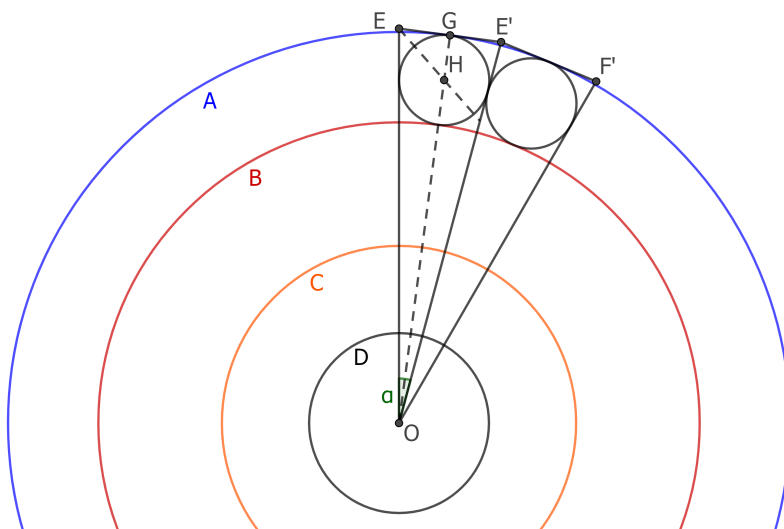


Figure 3.9: สามเหลี่ยมหน้าจั่ว $OE'F'$ ที่ทำซ้ำจากสามเหลี่ยมหน้าจั่ว OEF

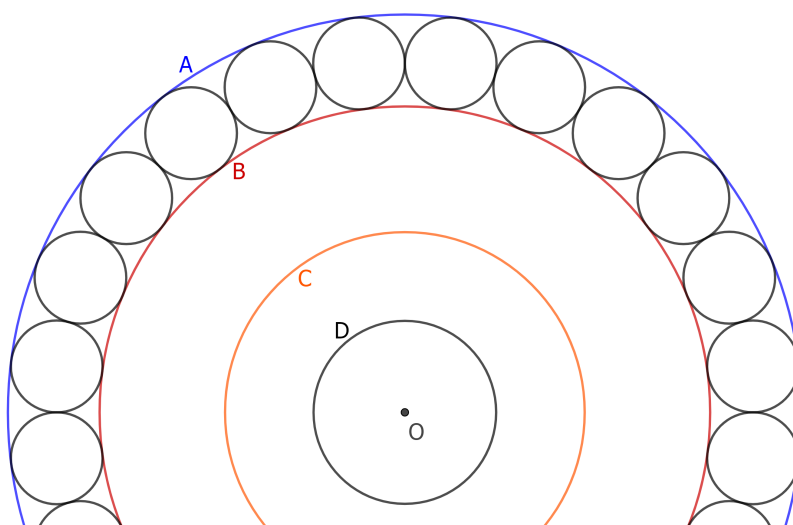


Figure 3.10: Steiner chains ที่เกิดจากวงกลม A และ B จำนวน n วง

5. กำหนดให้ $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ เป็นจุดที่วงกลมสองวงใน Steiner chain สัมผัสกัน ลากเส้นตรงจากจุดศูนย์กลาง O ผ่านจุด Y_i เกิดจุดตัดของเส้นตรงกับวงกลม B ให้จุดเหล่านั้นเป็น $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ดังภาพ 3.11

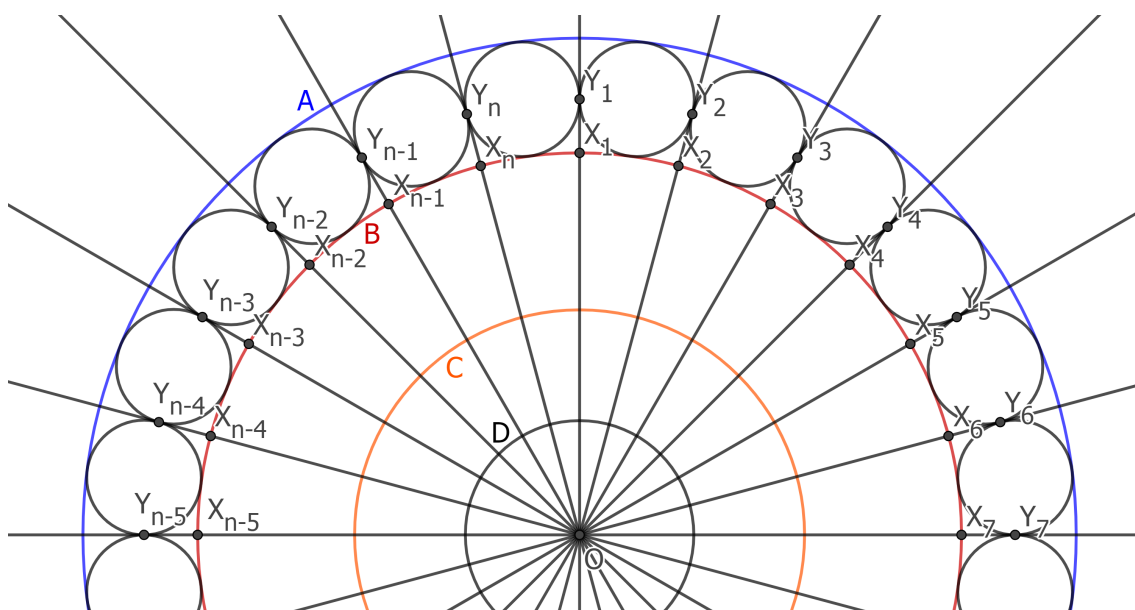


Figure 3.11: Steiner chain ถูกแบ่งด้วยด้วยเส้นตรงที่ผ่านจุด O และจุด Y_i

6. สร้างเส้นสัมผัสวงกลม B ที่จุด X_1 เกิดจุดตัด I และ J จากนั้นสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม I เกิดจุดตัด K วาดวงกลมรัศมี KX_1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ K ดังภาพ 3.12

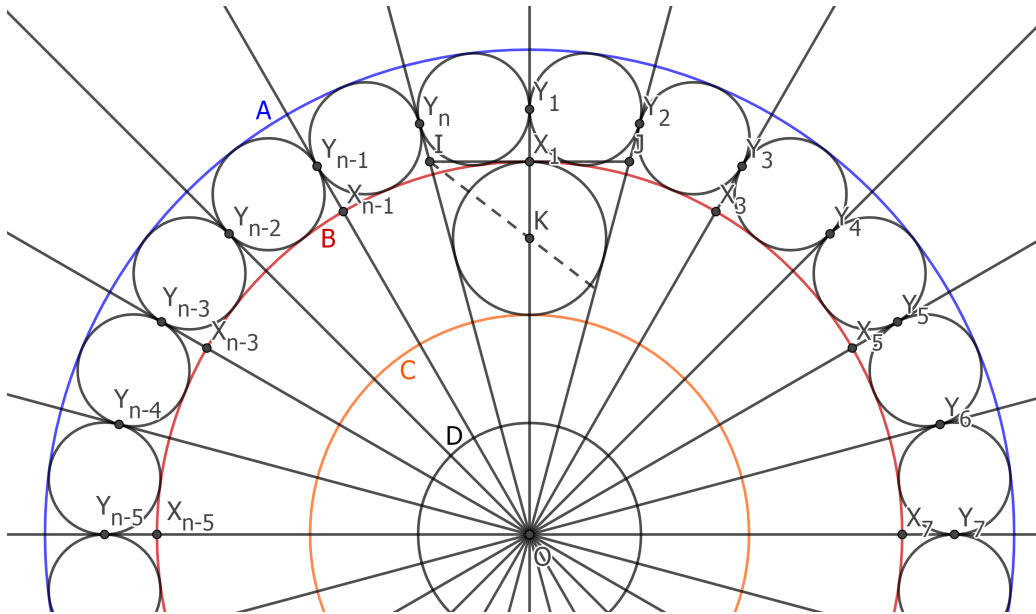


Figure 3.12: วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด K ในสามเหลี่ยมหน้าจั่ว OIJ

7. ทำซ้ำโดยสร้างวงกลมที่ผ่านจุด X_i โดยที่ $i = 3, 5, \dots, n-1$ ดังภาพ 3.13

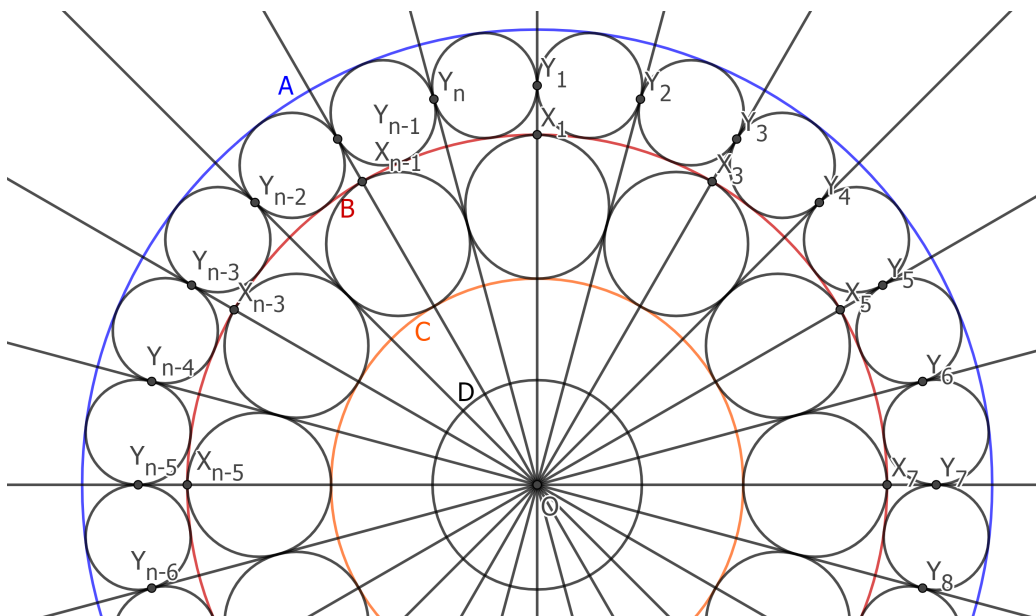


Figure 3.13: Steiner chains ที่เกิดจากวงกลม B และ C จำนวน $n/2$ วง

8. ให้ $L_1, L_2, L_3, \dots, L_{n/2}$ เป็นจุดที่วงกลมใน Steiner chain ชั้นในสัมผัสกัน และ $V_1, V_2, V_3, \dots, V_{n/2}$ เป็นจุดตัดของเส้นตรง OY_i กับวงกลม D ดังภาพ 3.14 สร้างส่วนของเส้นตรง $\overline{L_i V_i}$ และลบส่วนโค้งน้อยของวงกลม $L_m L_n$ โดยที่ L_m และ L_n เป็นจุด L_i ที่อยู่บนวงกลมเดียวกัน จะได้หน้าต่างกุหลาบในอาสนวิหารอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ดังภาพ 3.15

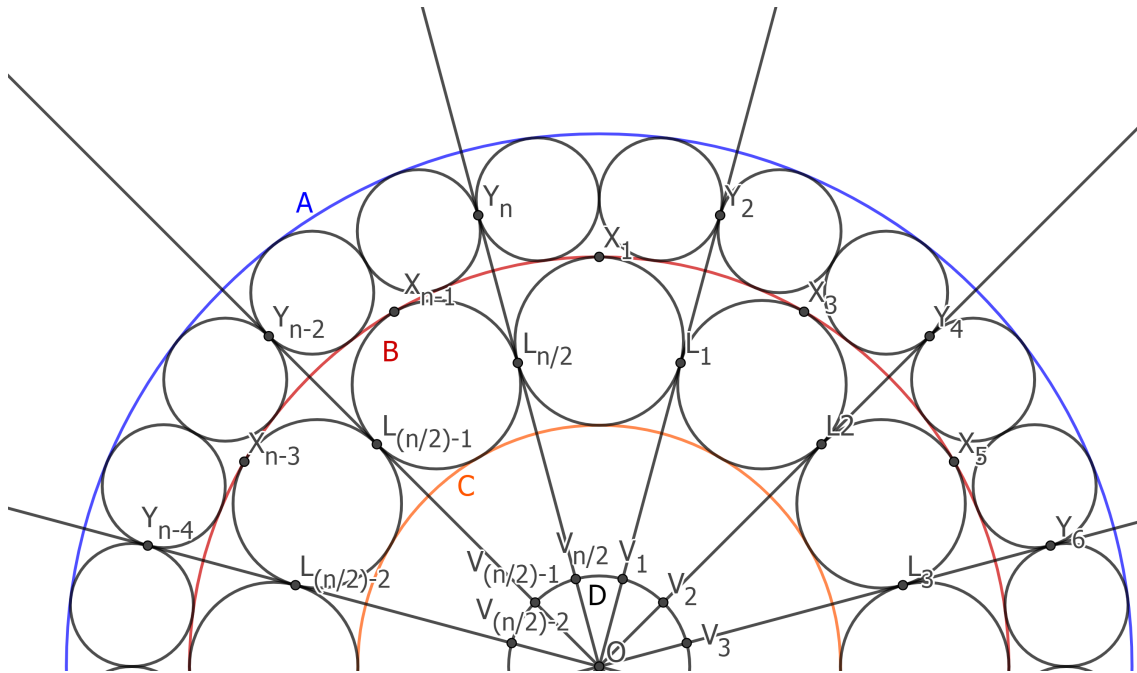


Figure 3.14: Steiner chain ชั้นในสัมผัสกัน ณ จุด L_i

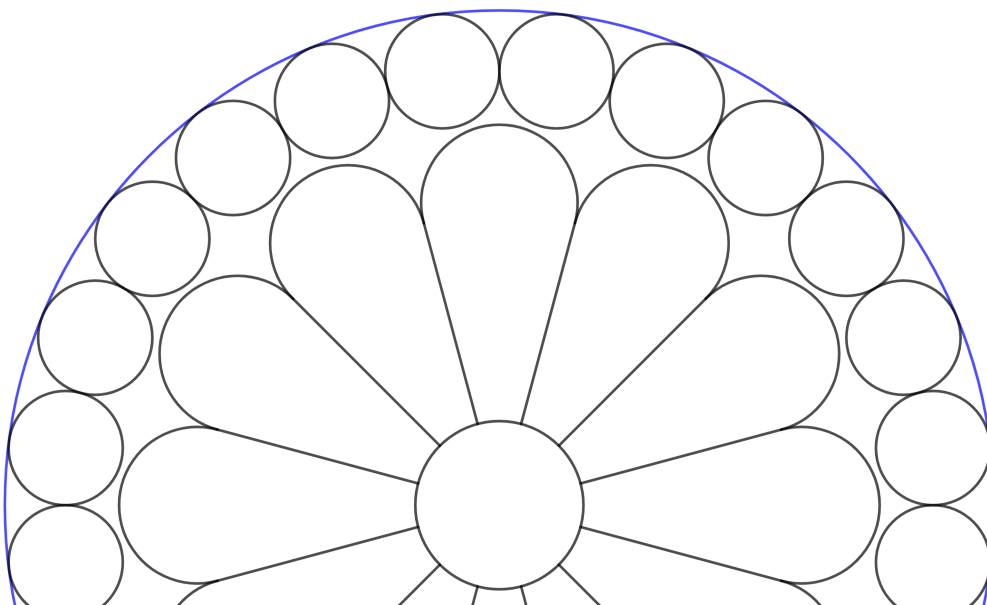


Figure 3.15: โครงร่างของหน้าต่างกุหลาบในอาสนวิหารอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ฯ

ต่อไปจะเป็นวิธีการสร้างหน้าต่างหลายที่ปรากฏในอาสนวิหารอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ๑ ดังภาพ 3.5 ที่มี Steiner chain จำนวน 24 วง และ 12 วง เป็นองค์ประกอบ

ขั้นตอนวิธีการสร้างหน้าต่างหลายที่ปรากฏในอาสนวิหารอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ๑

1. กำหนดให้ $n = 24$ และ $r = 10$ หน่วย เมื่อเรานำ n และ r ไปคำนวณในสมการ 3.2 จะได้ $s = 7.69$ หน่วย จากนั้นนำค่า s ที่ได้ไปหาค่า t โดยแทนค่า $s = r$ และ $t = s$ ในสมการ 3.2 จะได้ $t = 4.53$ สร้างวงกลม A, B, C และ D ที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน ณ จุด O รัศมี r, s, t และ u ตามลำดับ โดยที่ $r = 10, s = 7.69, t = 4.53$ และ $u = 1.70$ ดังภาพ 3.16

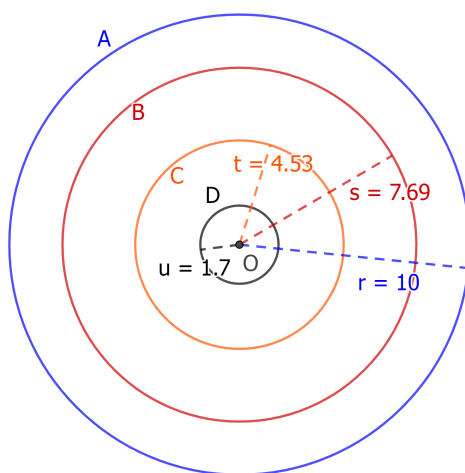


Figure 3.16: วงกลม A, B, C และ D รัศมี 10, 7.69, 4.53 และ 1.70 หน่วย ตามลำดับ

2. สร้างสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มุมของจุดยอด O มีค่าเท่ากับ 15° องศา เราจะสามารถสร้างวงกลมวงแรกใน Steiner chain ได้ ดังภาพ 3.17

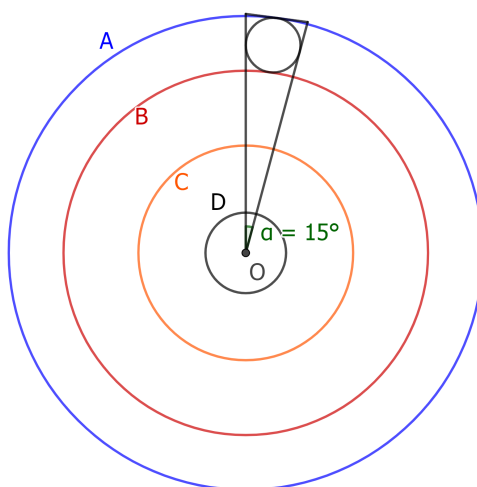


Figure 3.17: วงกลมวงแรกของ Steiner chain ในสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มุมของจุดยอด O มีค่าเท่ากับ 15°

3. ทำซ้ำโดยการสร้างสามเหลี่ยมหน้าจั่วและวงกลมไปเรื่อย ๆ จนได้วงกลมใน Steiner chain ครบทั้ง 24 วง ดังภาพ 3.18

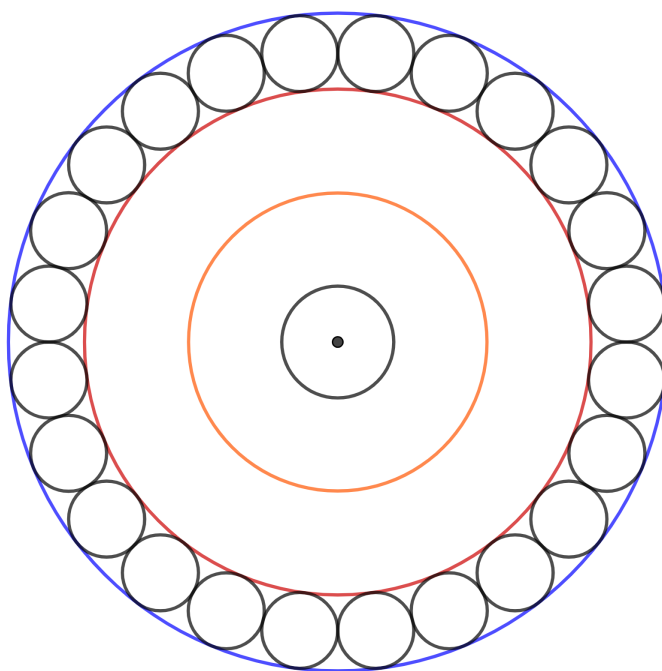


Figure 3.18: Steiner chain ที่มีจำนวนวงกลม 24 วง

4. สร้างส่วนของเส้นตรงแบ่งวงกลมใน Steiner chain ออกเป็น 24 ส่วน ดังภาพ 3.19

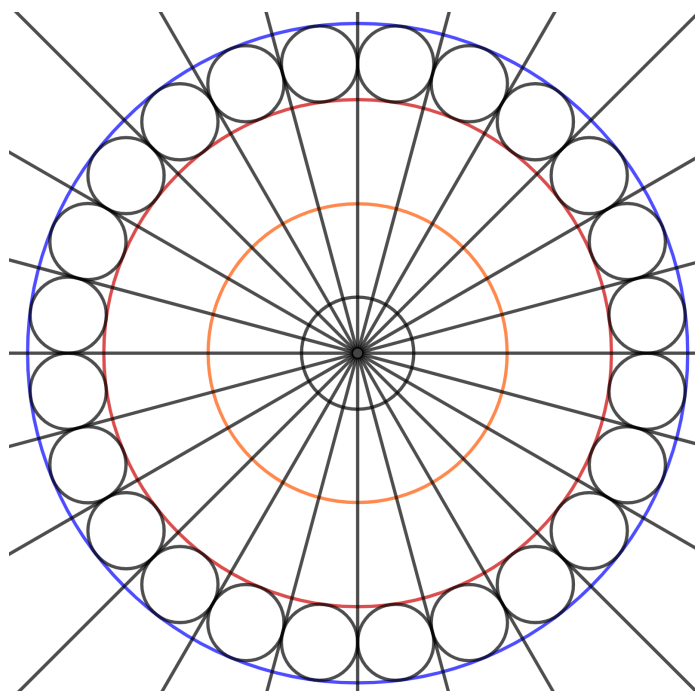


Figure 3.19: Steiner chain ที่มีจำนวนวงกลม 24 วง ถูกแบ่งออกเป็น 24 ส่วน

5. สร้าง Steiner chain จำนวน 12 วง ดังภาพ 3.20

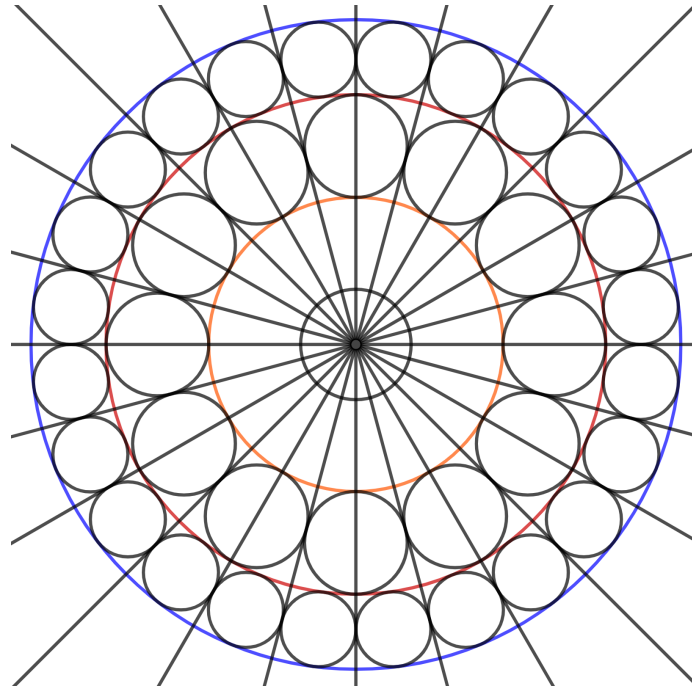


Figure 3.20: Steiner chain จำนวน 12 วง

6. ทำลวดลายหน้าต่างโดยลบบางส่วนของวงกลมที่สร้างขึ้นในข้อ 5. และสร้างส่วนของเส้นตรงเพิ่มเติม จนได้หน้าต่างกุหลาบอาสนวิหารอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ฯ ดังภาพ 3.21

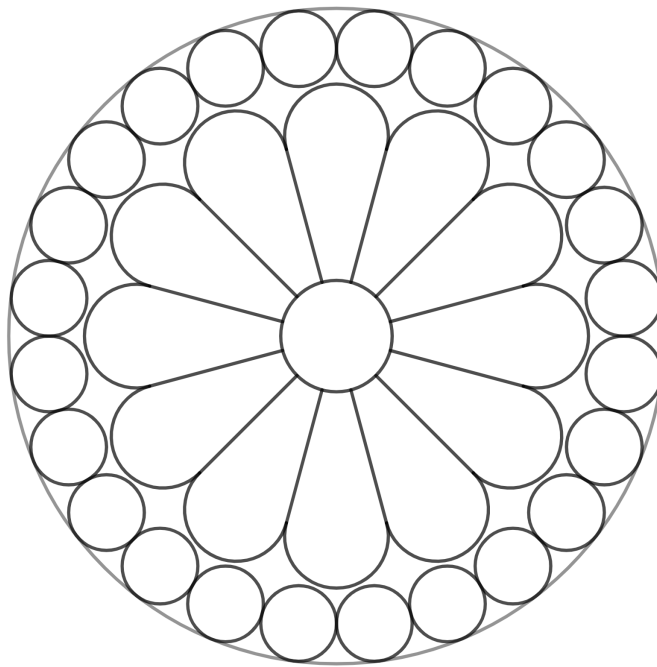


Figure 3.21: โครงร่างหน้าต่างกุหลาบอาสนวิหารอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ฯ

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

สมบัติของ Steiner chain

จากการศึกษาความสัมพันธ์ของจำนวนวงกลมใน Steiner chain (n) กับรัศมีของวงกลมวงนอก (r) และรัศมีของวงกลมวงใน (s) โดยที่ d คือระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองวง จากสมการ

$$(r - s)^2 - d^2 = 4rs \tan^2(\pi/n)$$

ซึ่งได้พิจารณาอยู่ 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 วงกลมทั้งสองวงมีจุดศูนย์กลางที่ตำแหน่งเดียวกัน ($d = 0$)

เราได้ศึกษาสมบัติของ Steiner chain 3 รูปแบบต่อไปนี้

1. การลดขนาดรัศมีของวงกลมวงใน จนมีค่าเข้าใกล้ 0 จะได้ว่าจำนวนวงกลมใน Steiner chain มีค่าเข้าใกล้ 2 กล่าวคือ

$$\lim_{s \rightarrow 0} n(s) = 2$$

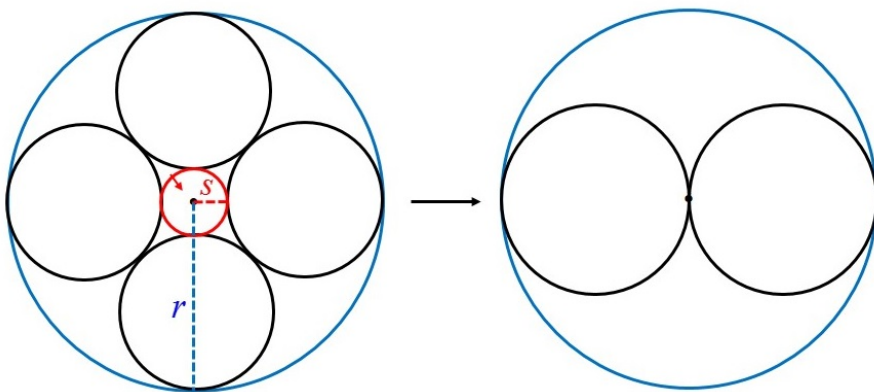


Figure 4.1: ผลลัพธ์จากการลดขนาดรัศมีของวงกลมวงใน จนมีค่าเข้าใกล้ 0

2. การเพิ่มขนาดรัศมีของวงกลมวงนอก จนมีค่าเข้าใกล้ ∞ จะได้ว่าจำนวนวงกลมใน Steiner chain มีค่าเข้าใกล้ 2 กล่าวคือ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} n(r) = 2$$

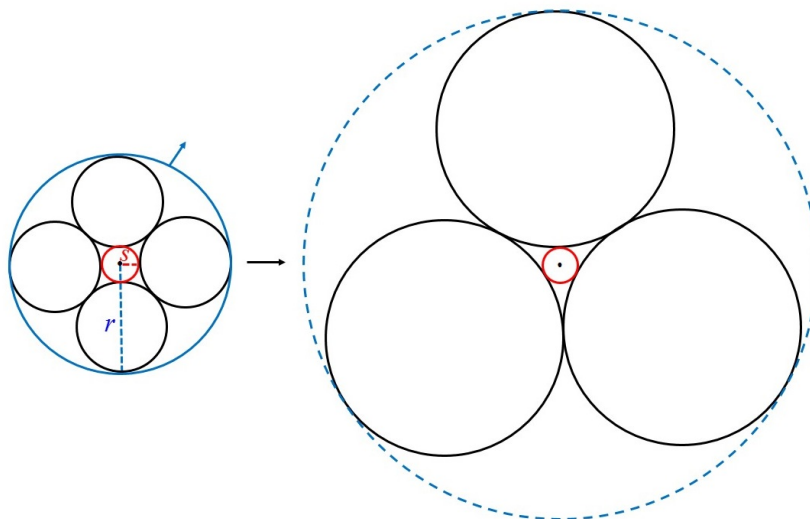


Figure 4.2: ผลลัพธ์จากการเพิ่มขนาดรัศมีของวงกลมวงนอก จนมีค่าเข้าใกล้ ∞

3. การลดขนาดรัศมีของวงกลมวงใน จนมีค่าเข้าใกล้ 0 และเพิ่มขนาดรัศมีของวงกลมวงนอก จนมีค่าเข้าใกล้ ∞ พร้อมกัน จะได้ผลลัพธ์คล้ายกัน กล่าวคือ

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} n(r, s) \right] = 2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\lim_{s \rightarrow 0} n(r, s) \right]$$

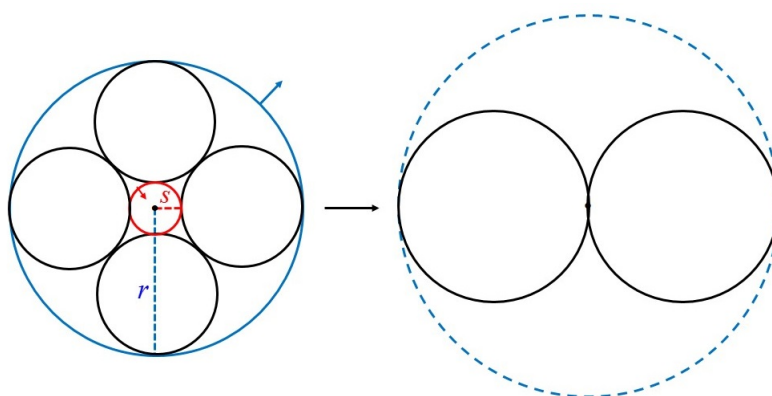


Figure 4.3: ผลลัพธ์จากการลดขนาดรัศมีของวงกลมวงใน จนมีค่าเข้าใกล้ 0 และเพิ่มขนาดรัศมีของวงกลมวงนอก จนมีค่าเข้าใกล้ ∞ พร้อมกัน

จากการศึกษาสามารถสรุปได้ว่า ลิมิต ทั้ง 3 รูปแบบ มีค่าเท่ากันคือเท่ากับ 2

กรณีที่ 2 วงกลมทั้งสองวงมีจุดศูนย์กลางกึ่งกลางคั่นตำแหน่ง ($d > 0$)

เราได้ศึกษากรณีที่วงกลมวงในเข้าใกล้วงกลมวงนอก ได้ผลการศึกษาว่า มีจำนวนวงกลมใน Steiner chain เป็นอนันต์ กล่าวคือ

$$\lim_{d \rightarrow r-s} n(d) = \infty$$

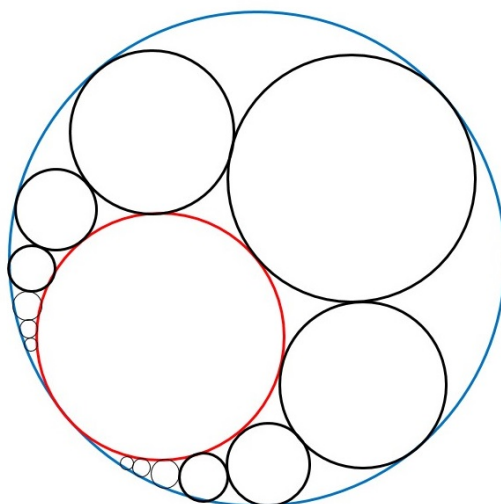


Figure 4.4: วงกลมจำนวนอนันต์วงที่ไม่ตัดกันบรรจุในวงกลม

การสร้างหน้าต่างกุหลาบจาก Steiner chain

นอกจากนี้เราได้ศึกษาขั้นตอนการสร้างหน้าต่างกุหลาบจาก Steiner chain โดยใช้ตัวอย่างของหน้าต่างกุหลาบที่ปรากฏในอาสนวิหารอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ๖ ผ่านสมการความสัมพันธ์

$$(r - s)^2 - d^2 = 4rs \tan^2(\pi/n)$$

บรรณานุกรม

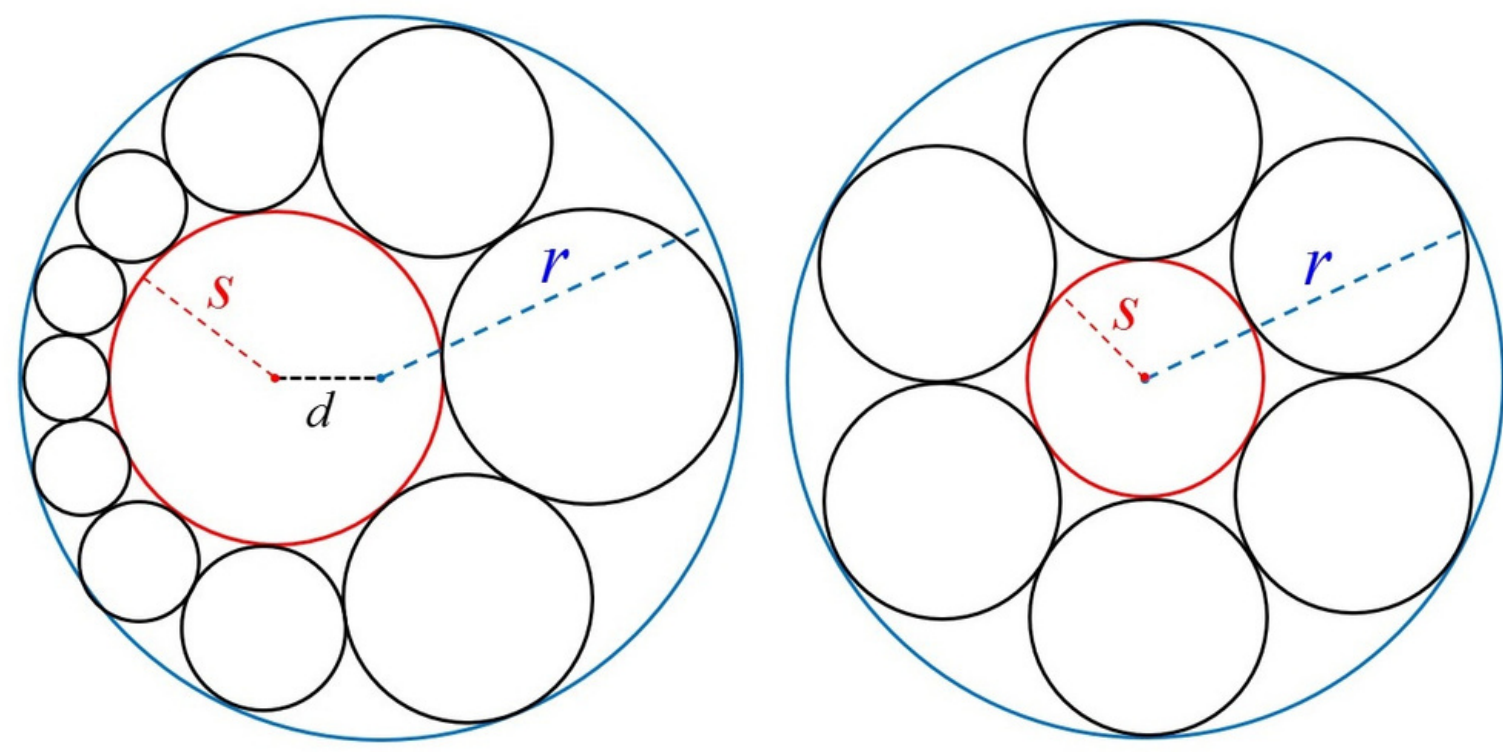
- [1] B. Fletcher, *A History of Architecture on the Comparative Method*, Elsevier Science and Technology, 2001.
- [2] D. Pedoe, *A Comprehensive Course*, Dover Publication, New York, 1970.
- [3] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [4] S. Pomerantz , Rose Windows from Circle Inversion, Math Horizons, 29:4, 11-13, DOI: 10.1080/10724117.2022.2028520, 2022.

Abstract

This independent study is motivated by the study of Steve Pomerantz on the topic “Rose Windows from Circle Inversion”. In the work, the author describes the existence of a Steiner chain for two given nonintersecting circles and the number of circles in the Steiner chain via an equation relating to the radii and the distance of the centers of the given circles. Moreover, the paper explains how to construct rose windows from Steiner chain. In this independent study, we further study the relationship in the aforementioned equation. In addition, we give a construction of a rose window found in Thailand using a Steiner chain.

Steiner chain

Steiner chain is a collection of circles all of which touch each other and tangent to two given nonintersecting circles.

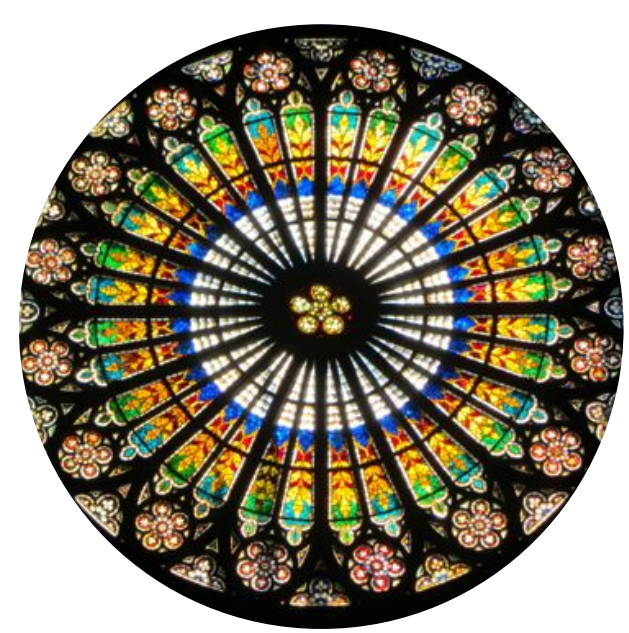


Theorem 1.1 If the centers of two nonintersecting circles, with radii r and s , respectively, are distance d apart and given $r > s$, then a Steiner chain with n circles will exist if r, s, d and n satisfy

$$(r - s)^2 - d^2 = 4rs \tan^2(\pi/n) \quad (1)$$

Rose window

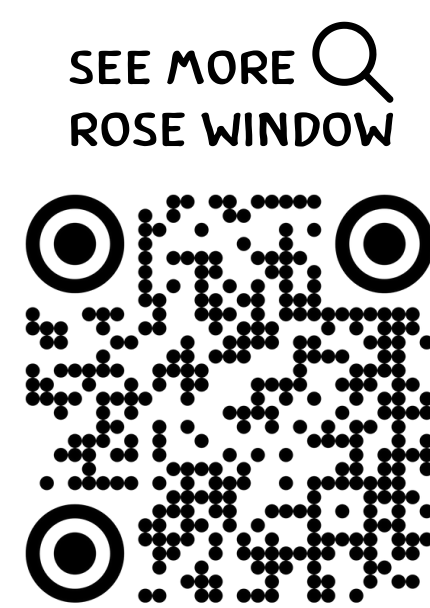
Rose window is a generic term for circular circles, especially for those found in Gothic architecture. Rose windows are usually decorated by stained-glass with geometric designs.



Strasbourg Cathedral.



Rutgers Church in New York



Properties of steiner chain

We study the number of circles in a Steiner chain through equation (1), which relates to the radii and the distance between the centers of the given circles.

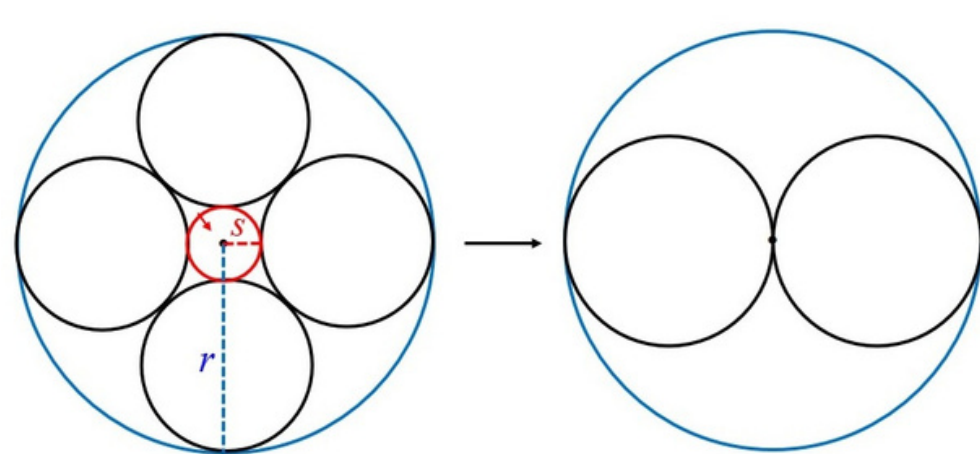
To make it easier to study, we rewrite equation (1) as follows:

$$n = \frac{\pi}{\arctan \sqrt{\frac{(r-s)^2 - d^2}{4rs}}} \quad (2)$$

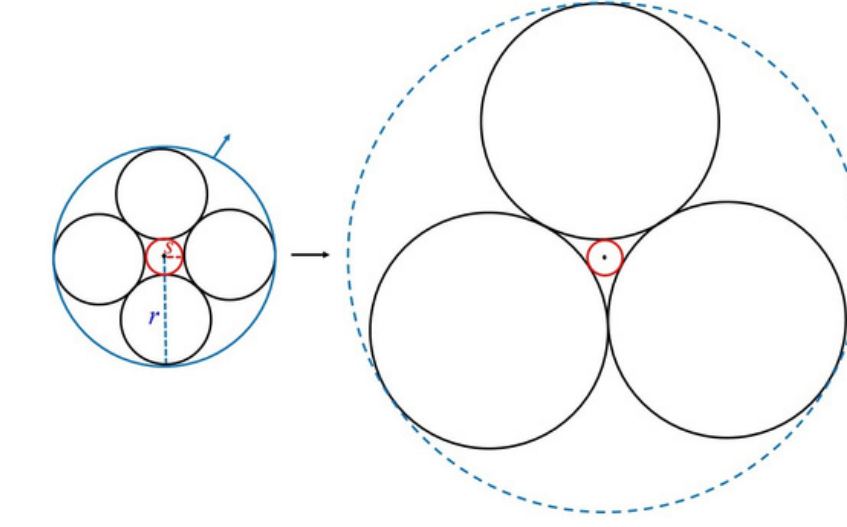
• Concentric case ($d = 0$).

Suppose that the two given circles are concentric ($d = 0$). Then we obtain the following three theorems which determine the number of circles in the Steiner chain when s approaches 0 and r becomes very large.

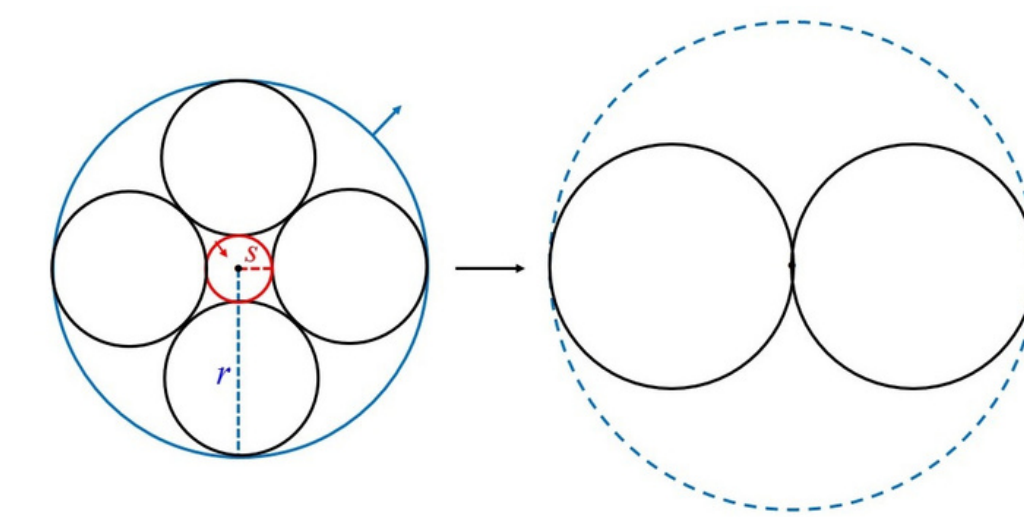
Theorem 1.2 Let $r > 0$ be fixed. Then $\lim_{s \rightarrow 0} n(s) = 2$.



Theorem 1.3 Let $s > 0$ be fixed. Then $\lim_{r \rightarrow \infty} n(r) = 2$.



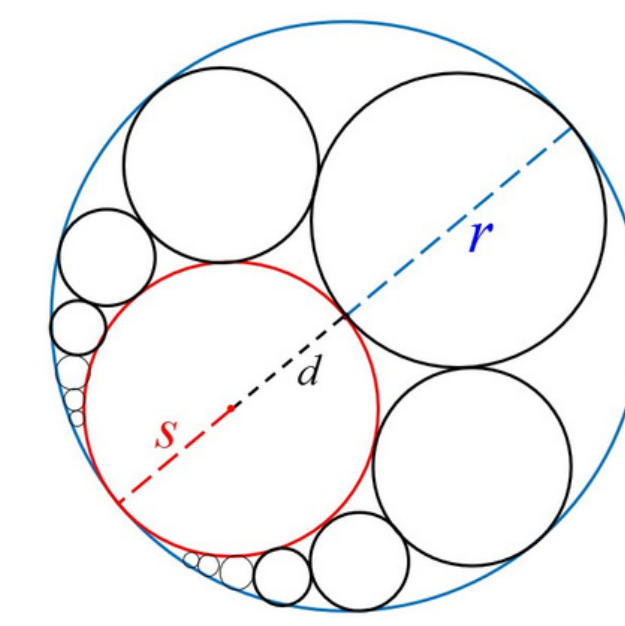
Theorem 1.4 $\lim_{s \rightarrow 0} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} n(r, s) \right] = 2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\lim_{s \rightarrow 0} n(r, s) \right]$



• Nonconcentric case ($d > 0$).

When the two given circles are nonconcentric ($d > 0$), we are interested in the case d approaches $r - s$. That is, the inner circle touches the outer circle.

Theorem 1.5 If d approaches $r - s$, then $\lim_{d \rightarrow r-s} n(d) = \infty$

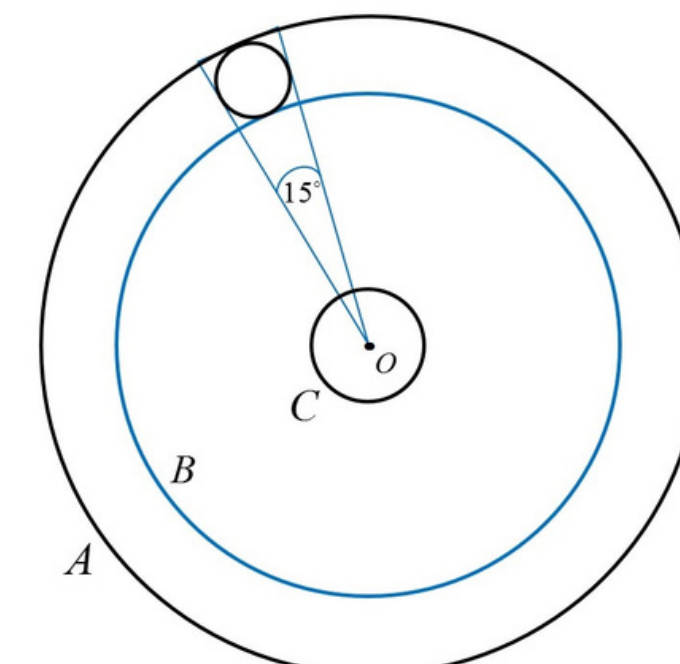
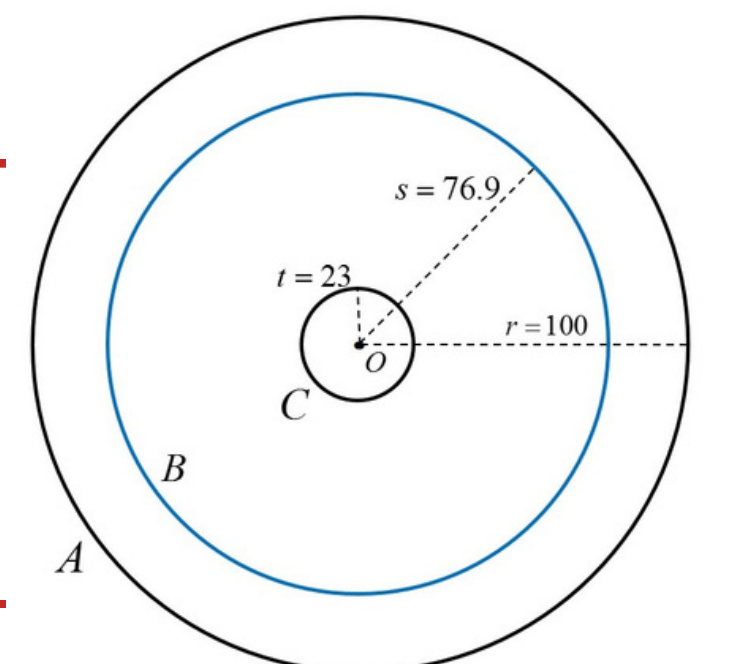


Rose window from a Steiner chain

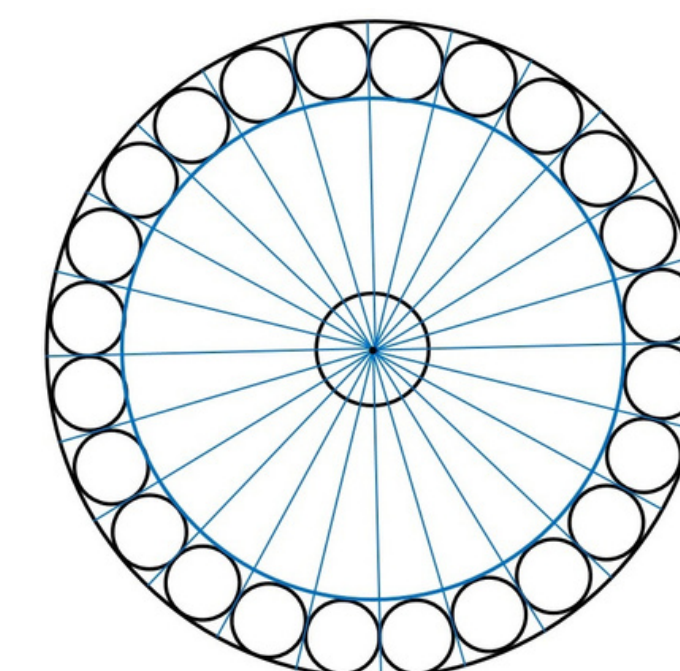
In this section, we demonstrate the construction of a Rose window from a Steiner chain. An example is the Rose window in Assumption Cathedral, Bangkok, Thailand. To do this we follow the following 6 steps.



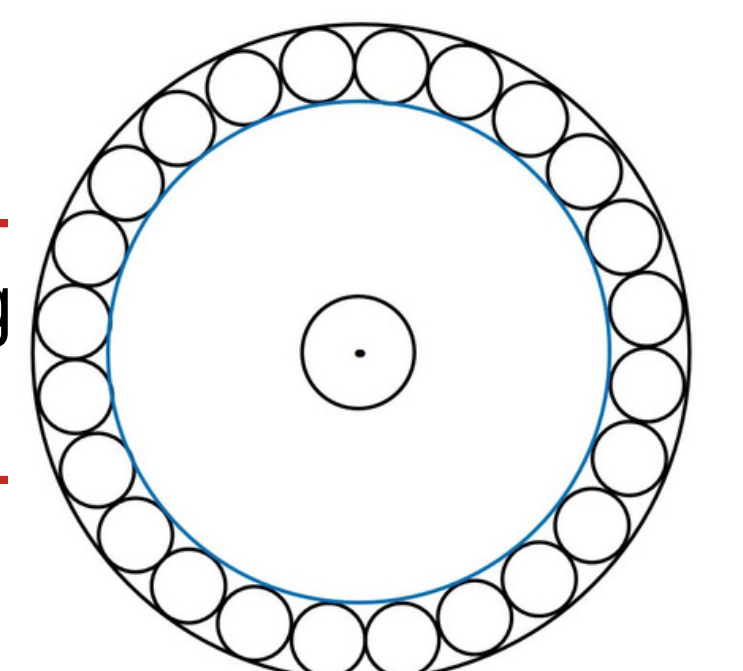
STEP 1: Given $n = 24$ and $r = 100$. Calculate s using equation (1) and get $s = 76.9$. Draw circles A, B and C with a common center at a point O and with radii $r = 100$, $s = 76.9$ and $t = 23$, respectively.



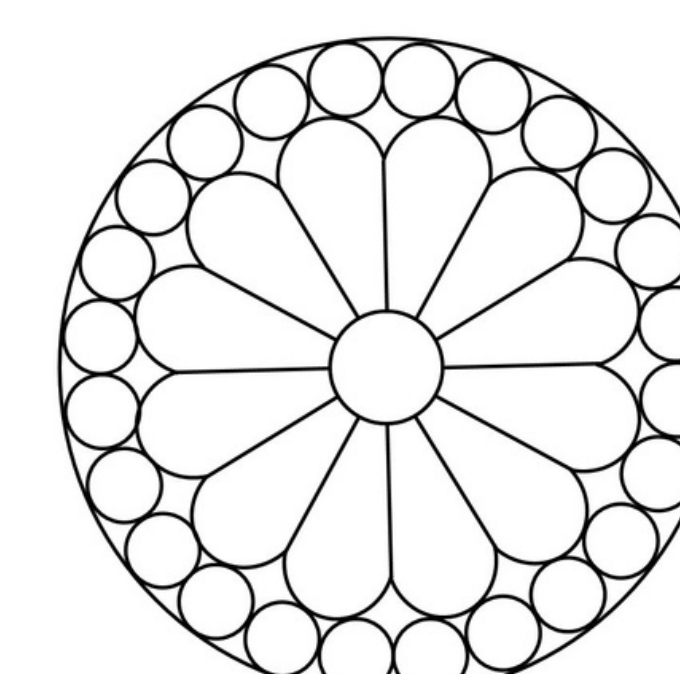
STEP 2: Draw an isosceles triangle with angle $\hat{O} = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$. Then draw the first circle in the Steiner chain as shown in the picture.



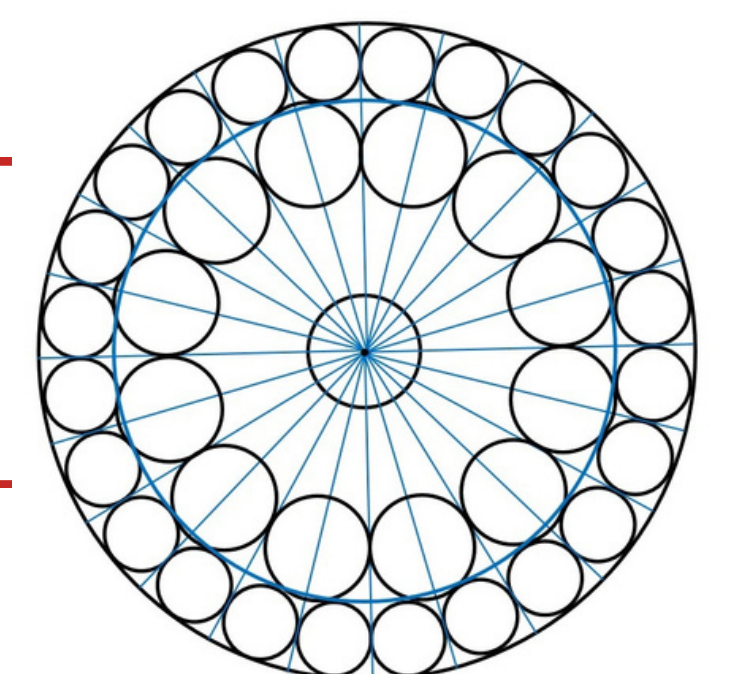
STEP 3: Repeat STEP 2 and obtain the Steiner chain consisting of 24 circles.



STEP 4: Create line segments dividing the circle in the Steiner chain into 24 segments.



STEP 5: Draw 12 circles, each of which touches two adjacent circles in the Steiner chain and touches the two line segments as shown in the picture.



STEP 6: Create the pattern using the 12 circles obtained in STEP 5 as shown in the picture.

References

- Sir Banister Fletcher, *A History of Architecture on the Comparative Method*, first published 1896, current edition 2001, Elsevier Science and Technology
- Steve Pomerantz (2022), *Rose Windows from Circle Inversion*, Math Horizons, 29:4,11-13