

ไอโซเมตริกซูโดกุ
(Isometric Sudoku)

นางสาวณัฐวรา ทาชมภู
รหัส 630510544

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ปีการศึกษา 2566

ไอโซเมตริกซูโดกุ
(Isometric Sudoku)

นางสาวณัฐวรา ทาชมภู
630510544

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

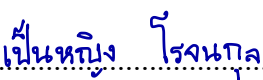
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

ไอโซเมตริกซูโดกุ
(Isometric Sudoku)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

	ประธานกรรมการ
(ผศ. ดร.เป็นหญิง โรจนกุล)	
	กรรมการ
(ผศ. ดร.ชัยพร ตั้งทอง)	

วันที่ 25 มีนาคม พ.ศ. 2567

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการศึกษาค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมี วัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง จำนวนที่ก่อให้เกิดค่าเป็นจำนวนเต็มของ ฟังก์ชันก่อกำเนิดของจำนวนลูคัส

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ประธานกรรมการสอบและในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษา งานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้ข้อเสนอแนะ พิจารณาและตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม รวมถึงให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอ ตลอดการ ทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่มีได้กล่าวถึง ที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

นางสาวณัฐวรา ทาชมภู

หัวข้อ (ภาษาไทย) ไอโซเมตริกซูโดกุ
(ภาษาอังกฤษ) Isometric Sudoku
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นางสาวณัฐวรา ทาชมภู รหัสนักศึกษา 630510544
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ผศ. ดร.เป็นหญิง โรจนกุล
ชื่อกรรมการสอบ ผศ. ดร.ชัยพร ตั้งทอง

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นการศึกษาเกมที่ดัดแปลงขึ้นเองจากเกมซูโดกุ โดยมีชื่อเรียกว่า “เกมไอโซเมตริกซูโดกุ” เกมไอโซเมตริกซูโดกุนั้นเป็นเกมที่มีตารางย่อยขนาด 3×3 จำนวน 3 ตาราง วางอยู่ในรูปแบบปริภูมิ 3 มิติ และมีตารางย่อยตารางที่สี่ที่ซ้อนทับกับตารางย่อย 3 ตารางแรก เรียกว่าตารางร่วม กติกาการเล่นของเกมไอโซเมตริกซูโดกุที่เพิ่มเติมจากเกมซูโดกุแบบมาตรฐาน คือ ผู้เล่นต้องเติมตัวเลข 1 ถึง 9 เพียง 3 ชุด ลงบนตาราง โดยมีเงื่อนไขว่าตัวเลขในแต่ละแถว คอลัมน์ ตารางย่อย และตารางร่วมต้องไม่ซ้ำกัน ในการค้นคว้าอิสระนี้ได้มีการหาจำนวนเลขตั้งต้นน้อยสุดของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุที่จะทำให้มีเพียงคำตอบเดียวและจำนวนไอโซเมตริกซูโดกุสมบูรณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ รวมไปถึงเขียนโปรแกรมในภาษาไพธอนสำหรับหาคำตอบของเกมไอโซเมตริกซูโดกุและนับจำนวนคำตอบทั้งหมดที่เป็นไปได้

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน	16
บทที่ 3 จำนวนไอโซเมตริกสมบูรณ์	20
บทที่ 4 ปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุที่มีเพียงคำตอบเดียว	22
บทที่ 5 สรุปผลการศึกษา	189
บรรณานุกรม	193
ภาคผนวก	194

บทที่ 1

บทนำ

เกมซูโดกุเป็นเกมปริศนาเกี่ยวกับตัวเลขที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายผ่านหนังสือพิมพ์ The times ของประเทศอังกฤษ โดยปริศนาเกมซูโดกุที่ได้รับความนิยมอย่างมากคือ ซูโดกุขนาด 9×9 ซึ่งเป็นเกมที่ 5,472,730 รูปแบบที่แตกต่างกัน และเลขตั้งต้นน้อยที่สุดที่ทำให้ปริศนาซูโดกุมีคำตอบเดียวคือ 17 ตัว และบางรูปแบบก็มีเลขตั้งต้น 21 หรือ 24 ตัวเพื่อนให้ปริศนาซูโดกุมีคำตอบเดียว แต่ถ้ามีเลขเลขตั้งต้นน้อยกว่าตั้งแต่ 16 ลงไป คำตอบปริศนาเกมซูโดกุขนาด 9×9 จะมีมากกว่าหรือเท่ากับ 2 คำตอบ และส่วนนี้จะกล่าวถึงประวัติความเป็นมาของปริศนาของเกมซูโดกุ รวมถึงกติกาและเกมที่มีการดัดแปลงที่ได้เผยแพร่ให้เราได้เห็นมาแล้วบางส่วน

1.1 หลักการและเหตุผล

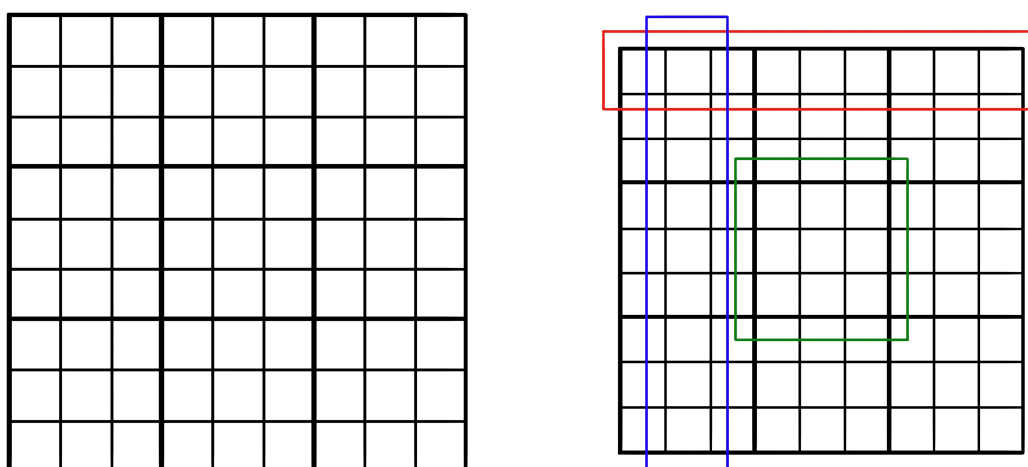
1.1.1 ประวัติของซูโดกุ

ซูโดกุ ในภาษาญี่ปุ่น เป็นคำย่อจากคำว่า “ซูจิวะโดกุชินนิคางิรุ” มีความหมายว่าตัวเลขต้องมีเพียงเลขเดียว ซึ่งแนวความคิดของเกมซูโดกุอาจจะพัฒนามาจาก Latin Squares หรือที่เรียกว่าตารางที่ประกอบด้วย $N \times N$ ช่อง (แนวนอนมีจำนวน N ช่อง และแนวตั้งมีจำนวน N ช่อง เช่น 9×9 ช่องรวมเป็น 81 ช่อง) โดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ Leonhard Euler เป็นผู้คิดค้นในปี ค.ศ. 1783

1.1.2 วิธีการเล่น

ซูโดกุมีขนาดตาราง 9×9 ช่อง ซึ่งประกอบจากตารางย่อย 9 ตาราง ในลักษณะ 3×3 แบ่งแยกกันโดยเส้นหนา โดยมีวิธีการเล่น คือการใส่ตัวเลข 1 ถึง 9 ลงในตารางขนาด 9×9 ให้สมบูรณ์ โดยมีเงื่อนไขว่า

1. ตัวเลขต้องไม่ซ้ำกันเลยในแต่ละคอลัมน์แนวตั้ง (สีน้ำเงิน)
2. ตัวเลขต้องไม่ซ้ำกันเลยในแต่ละแถวแนวนอน (สีแดง)
3. ตัวเลขต้องไม่ซ้ำกันเลยในตารางเล็กๆ ขนาด 3×3 (สีเขียว)



1.1.3 กลยุทธ์ เทคนิคและเคล็ดลับการไขปริศนา

1. ช่องว่างสุดท้าย คือเทคนิคแก้ซูโดกุขั้นพื้นฐาน ง่ายๆ จากข้อเท็จจริงว่าตารางขนาด 3×3 คอลัมน์แนวตั้งหรือแถวแนวนอนในตารางซูโดกุต้องมีตัวเลขจาก 1 ถึง 9 และสามารถใส่ตัวเลขแต่ละตัวได้เพียงครั้งเดียวในตารางขนาด 3×3 คอลัมน์แนวตั้ง หรือแถวแนวนอน ดังนั้นหากเราเห็นว่าช่องว่างเหลืออยู่เพียงช่องเดียวในตารางขนาด 3×3 คอลัมน์แนวตั้ง หรือแถวแนวนอน เราจะสามารถระบุตัวเลขจาก 1 ถึง 9 และเติมลงในช่องว่างได้

ตัวอย่าง 1 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคช่องว่างสุดท้ายในเกมซูโดกุ

1	2	3	4	5	6	7	8	
4	5	6						
7	8							
2								
5								
8								
3								
6								

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6						
7	8	9						
2								
5								
8								
3								
6								
9								

จากการสังเกต จะได้ว่าในช่องว่างที่เหลือในตารางย่อยขนาด 3×3 แถวแนวนอน และคอลัมน์แนวตั้ง จะสามารถเติมเลข 9 ได้เพียงเลขเดียว

- ช่องสุดท้ายที่เหลืออยู่ คือเทคนิคซูโดกุพื้นฐานอีกอย่างหนึ่ง จากข้อเท็จจริงว่าในตารางขนาด 3×3 คอลัมน์แนวตั้ง หรือแถวแนวนอนต้องไม่ซ้ำกัน

ตัวอย่าง 2 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคช่องสุดท้ายที่เหลืออยู่

				1				
2								
3	4							
		1						

				1				
2	1							
3	4							
		1						

ในตารางขนาด 3×3 ในแต่ละตารางย่อย คอลัมน์ และแถวจะต้องมีเลข 1 เสมอ และเรามีเลข 1 อยู่ในคอลัมน์นี้และแถวนี้ อยู่ เราไม่สามารถใส่ตัวเลขซ้ำได้ ดังนั้นเราจึงไม่สามารถใส่เลข 1 ได้ หมายความว่า มีเพียงช่องเดียวในตารางย่อย และเราควรใส่เลข 1

3. ตัวเลขสุดท้ายที่เป็นไปได้ คือเทคนิคง่ายๆ ที่เหมาะสำหรับมือใหม่ ซึ่งใช้การค้นหาตัวเลขที่หายไป ในการค้นหาตัวเลขที่หายไป ควรดูตัวเลขที่มีอยู่ในตารางขนาด 3×3 ที่สนใจ และในแถวและคอลัมน์ที่เชื่อมต่อกัน ช่องที่แรเงา

ตัวอย่าง 3 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคตัวเลขสุดท้ายที่เป็นไปได้

1	2	3						
			4		3		5	2
4	5							
6								
7								
8								

1	2	3						
9			4		3		5	2
4	5							
6								
7								
8								

สังเกตตัวเลขในตารางขนาด 3×3 แถว และคอลัมน์ เราจะเห็นว่าตัวเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 อยู่ในแถว คอลัมน์ และตารางขนาด 3×3 ตัวเลขเดียวที่หายไปคือเลข 9 เมื่อตัวเลขต้องไม่ซ้ำกัน เลขเดียวที่สามารถใส่ได้ในช่องนี้ก็คือเลข 9

4. การบันทึก คือเทคนิคเมื่อพบอุปสรรคบนตารางซูโดกุและไม่พบวิธีแก้ที่เห็นได้ชัดสำหรับช่องที่เหลือ ดังนั้นจึงควรมีการบันทึก โดยที่เราบันทึกเลขที่สามารถเติมตัวเลขที่เป็นไปได้ทั้งหมดลงในช่องว่างแต่ละช่อง สิ่งที่เราควรระมัดระวังในการบันทึกคือ การบันทึกตัวเลขผิดพลาด เนื่องจากจะทำให้การแก้ซูโดกุได้ยากและใช้เวลานานมากขึ้น

ตัวอย่าง 4 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคการบันทึก

6 789	6 78	1	45 8	45 9	2	3	45 789	45 8
2 789	4	5	1 3 8	1 9	6	2 789	1 789	12 8
2 89	23 8	23 9	7	1 3 45 9	2 45 89	6	12 45 8	
2 456	2 56	8	3 456	3 456	7	1 45	3 45	9
12 456 9	2 56	2 4 6 9	1 3 456 8	1 456 9	1 3 45 89	2 56 8	3 45 8	7
3	56 7	4 6 7 9	1 456 8	2 45 89	1 45 8	56 8	45 8	456 8
56 7	1	3 6 7	9	8	5	4	2	3 56
2 456 78	2 56 78	2 4 6 7	12 456	3	1 45 89	56 789	1 5 789	1 56 8
2 456 78	9	23 4 6 7	12 456	1 456 7	1 45	56 78	1 3 5 78	1 3 56 8

5. ตัวเลขเดี่ยวที่เห็นได้ชัด คือเทคนิคที่เป็นไปได้จากการบันทึก โดยสามารถสังเกตได้จากตัวเลขที่เหลือเพียงตัวเดียว

ตัวอย่าง 5 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคตัวเลขเดี่ยวที่เห็นได้ชัด

6 789	6 78	1	45 8	45 9	2	3	45 789	45 8
2	4	5	1 3 8	1	6	2	1	12
2 789	23 8	23 9	7	1 45 9	1 3 45 89	2 5 89	6	12 45 8
2 456	2 56	8	3 456	456	7	1	3 45	9
12 456 9	2 56	2 4 6 9	1 3 456 8	1 456 9	1 3 45 89	2 56 8	45	7
3	56 7	4 6 7 9	1 456 8	2	1 45 89	56 8	45	456 8
56 7	1	3 6 7	9	8	5	4	2	3 56
2 456 78	2 56 78	2 4 6 7	12 456	3	1 45 89	56 789	1 5 789	1 56 8
2 456 78	9	23 4 6 7	12 456	1 456 7	1 45	56 78	1 3 5 78	1 3 56 8

จากการบันทึกมีเพียงตัวเลขเดี่ยวในการบันทึก ซึ่งคือเลข 5 ที่อยู่ในช่อง หมายความว่าช่องนี้สามารถเติมเลขได้แค่เพียงเลขเดียว เนื่องจากมีตัวเลขที่เป็นไปได้แค่เพียงตัวเดียว ดังนั้นจึงสามารถลบบันทึกและเติมเลข 5 ลงไป

6. ตัวเลขคู่ที่เห็นได้ชัด เป็นเทคนิคเดียวกับเทคนิคตัวเลขเดี่ยวที่เห็นได้ชัด ซึ่งเทคนิคตัวเลขคู่ที่เห็นได้ชัดต้องใช้ในการเติมตัวเลขที่ถูกต้องในการบันทึกเช่นเดียวกัน จุดสำคัญของเทคนิคนี้คือต้องค้นหา 2 ช่องที่มีตัวเลขในการบันทึกเหมือนกันภายในหมายความว่าคู่ตัวเลขในการบันทึกนี้ไม่สามารถใช้ในช่องอื่นๆภายในตารางขนาด 3×3 ได้ ดังนั้นจึงสามารถลบออกจากบันทึกได้

ตัวอย่าง 6 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคตัวเลขคู่ที่เห็นได้ชัด

56 7 9	56 789	1	6 89	2	3			4
3 4 7 9	123 4 789	23 789	89	5	4 89			6
3 6 9	23 6 89	4	1	7	23 89		5	3
2 456 7 9	2 456 789	2 56 789	2 4 6 89	2 45 89	2 4 89		3	1
3 4 6 9	12 4 6 9	23 6 89	123 4 6 89	1 3 4 6 89	12 4 89		5	7
8	12 456 7 9	23 56 7 9	23 4 6 7 9	1 3 45 9	12 45 9	2 4 9	2 4 9	2 4 6 89
2	45 789	5 789	3 89	1 3 89	6	1 3 4 89	1 4 89	3 5 789
1	3	56 789	4		5 89			2
45 9	45 89	5 89	23 89	1 3 89	7	6	1 4 89	3 5 89

56 7 9	56 789	1	6 89	2	3			4
3 4 7 9	123 4 789	23 789	89	5	4 89			6
3 6 9	23 6 89	4	1	7	23 89		5	3
2 456 7 9	2 456 789	2 56 789	2 4 6 89	2 45 89	2 4 89		3	1
3 4 6 9	12 4 6 9	23 6 89	123 4 6 89	1 3 4 6 89	12 4 89		5	7
8	12 456 7 9	23 56 7 9	23 4 6 7 9	1 3 45 9	12 45 9	2 4 9	2 4 9	2 4 6 89
2	45 789	5 789	3 89	1 3 89	6	1 3 4 89	1 4 89	3 5 789
1	3	56 789	4		5 89			2
45 9	45 89	5 89	23 89	1 3 89	7	6	1 4 89	3 5 89

จากการบันทึกจะเห็นช่องว่างที่ได้จากการบันทึก จะเห็นว่าในช่องว่างดังกล่าวจะต้องมีเพียงสองช่องที่จะต้องมียเลข 4 หรือ 6 หมายความว่า 1 ใน 2 ช่องนี้จะต้องเป็น 4 และอีกช่องหนึ่งจะต้องเป็น 6 และยังหมายความว่าเราไม่สามารถเติมเลข 4 และ 6 ในช่องอื่นๆได้ ของตารางขนาด 3×3 นี้ ดังนั้นสามารถลบออกจากการบันทึกของช่องอื่นๆได้ จากนั้นสามารถใช้เทคนิคตัวเลขเดียวที่เห็นได้ชัดได้ จึงสามารถเห็นได้ชัดว่าสามารถเติมเลข 4 และ 6 ได้

7. ตัวเลขทั้งสามที่เห็นชัด เป็นเทคนิคการแก้ซูโดกุที่ต่อยอดมาจากเทคนิคตัวเลขคู่ที่เห็นได้ชัดก่อนหน้านี้ แต่จะไม่ใช่ตัวเลขในการบันทึกเพียงสองตัว แต่จะใช้สามตัว นั่นคือข้อแตกต่างของเทคนิคตัวเลขคู่ที่เห็นได้ชัดและตัวเลขทั้งสามที่เห็นได้ชัด หลักการคือตารางย่อยขนาด 3×3 ที่มีช่อง 9 ช่อง ต้องมี 3 ช่อง ที่มีสมาชิก a, b และ c อยู่ในลักษณะ $(a, b), (a, c)$ และ (b, c)

ตัวอย่าง 7 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคตัวเลขทั้งสามที่เห็นได้ชัด

1	2	45 89		6	6		3	45 789
3	456 78	45 89	1	2	1	45 8		1 45 789
79 78		89	4	5	13 789	12 789	2	6
123 6 9	13 6	7		8	4	5	2	12
2 456 9	13 456	123 45	123 5	13 79	123 79	123 6	2 46	12 4 78
8	13 45	123 45	6	7	13 7	123 7	9	12 4 7
2 4	13 4	6	123 89	13 4	5	2 89	7	2 89
2 45 7	13 45 78	2 45 8	46 789	46 79	2 789	6 89	1	3
2 5 7		123 5 8	123 78	13 6	123 78	2 6	2	2 5 8

1	2	45		6	6		3	45 789
3	456	45	1	2	1	45 8		1 45 789
79 78		89	4	5	13 789	12 789	2	6
123 6 9	13 6	7		8	4	5	2	12
2 456 9	13 456	123 45	123 5	13 79	123 79	123 6	2 46	12 4 78
8	13 45	123 45	6	7	13 7	123 7	9	12 4 7
2 4	13 4	6	123 89	13 4	5	2 89	7	2 89
2 45 7	13 45 78	2 45 8	46 789	46 79	2 789	6 89	1	3
2 5 7		123 5 8	123 78	13 6	123 78	2 6	2	2 5 8

สังเกตตารางซ้ายบน ช่องด้านล่าง 3 ช่อง มีการบันทึกเลข (7, 8), (7, 9) และ (8, 9) หมายความว่าช่องเหล่านี้ต้องมีการเติมเลข 7, 8 และ 9 แต่ยังไม่ได้ว่าตัวเลขใดอยู่ช่องไหน แต่สามารถเห็นได้ชัดว่า เลข 7, 8 และ 9 ไม่สามารถอยู่ในช่องอื่นได้ ดังนั้นจึงสามารถลบการบันทึกของเลข 7, 8 และ 9 ในช่องอื่นๆได้

8. ตัวเลขเดียวที่ซ่อนอยู่ เป็นเทคนิคที่ค่อนข้างเรียบง่ายที่มีจุดสำคัญคือมีตัวเลขเดียวในการบันทึกเพียงตัวเดียวในทั้งแถว คอลัมน์ หรือตารางย่อยขนาด 3×3 อย่างไรก็ตามเทคนิคนี้จำเป็นต้องใช้ความระมัดระวังในการบันทึก

ตัวอย่าง 8 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคตัวเลขเดี่ยวที่ซ่อนอยู่

1	2	45			6	6		3	45
		89	789	7	9	789			789
3	456	45	1		1	45	1	45	
	78	89	789		1	6	789	8	789
			4	5	1	3	12	2	6
7	9	78	89		789	789	89		
123	1	3	7	123	8	4	5	2	12
6		6		9				6	
9									
2	1	3	123	123	1	3	123	2	12
456	456	45	7	9	7	9	7	8	4
9			9	7	9	7	9	7	8
8	1	3	123	1	3	123	123	9	4
45	45	45	6	7	7	7	7	4	7
2	1	3	6	123	1	3	2	7	2
4		8		89	9		89		89
2	1	3	2	2	2	2	2	1	3
45	45	45	4	6	4	6	6		
7	78	8	789	7	9	789	89		
2	123	123	1	3	123	6	2	2	
5	9	5	78	7	78	4	56	5	8
7									

1	2	45			6	6		3	45
		89	789	7	9	789			789
3	456	45	1		1	45	1	45	
	78	89	789		1	6	789	8	789
			4	5	1	3	12	2	6
7	9	78	89		789	789	89		
123	1	3	7	123	8	4	5	2	12
6		6		9				6	
9									
2	1	3	123	123	1	3	123	2	12
456	456	45	7	9	7	9	7	8	4
9			9	7	9	7	9	7	8
8	1	3	123	1	3	123	123	9	4
45	45	45	6	7	7	7	7	4	7
2	1	3	6	123	1	3	2	7	2
4		8		89	9		89		89
2	1	3	2	2	2	2	2	1	3
45	45	45	4	6	4	6	6		
7	78	8	789	7	9	789	89		
2	123	123	1	3	123	6	2	2	
5	9	5	78	7	78	4	56	5	8
7									

จากการบันทึก สังเกตได้ว่าตารางย่อยขนาด 3×3 มีเพียงช่องเดียวที่สามารถเติมเลข 5 เนื่องจากช่องอื่นๆไม่สามารถเติมเลข 5 ได้ในการบันทึก

9. ตัวเลขคู่ที่ซ่อนอยู่ เป็นเทคนิคที่ทำงานเหมือนกับเทคนิคตัวเลขเดี่ยวที่ซ่อนอยู่ สิ่งเดียวที่เปลี่ยนแปลงก็คือจำนวนของช่องและการบันทึก สามารถสังเกตได้จาก 2 ช่องภายในแถวคอลัมน์ หรือตารางย่อยขนาด 3×3 ที่มีตัวเลขในการบันทึกที่ไม่อยู่ในช่องอื่นๆ ตัวเลขในการบันทึกนี้จะต้องอยู่ใน 2 ช่องนี้อย่างแน่นอน จึงสามารถลบการบันทึกตัวเลขในช่องอื่นๆได้

ตัวอย่าง 9 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคตัวเลขคู่ที่ซ่อนอยู่

4	4	1	56	2	3	4	6	45	56
789	89		78			9		789	789
2	2	2	1		123	123	1	3	
789	89	89	4	56	56	56	5	56	
5	6	3	1		12	12	12		
			78	789	789	4	9	789	
	5	2	2	3	2	7	6	1	
	4	89	8		89			89	
23	2	2	2	2	23	23	3		
4	4	4	1	56	456	4	4		
89	89	89		789	789	9	89		
123	7	2	2	2	2	5	123	4	
89	89	8	6	6	6	89	89		
1	1	1	3		1	3			
4	4	45	56	56	56	8	45	2	
9	9	9	7	7	7	7	7		
2	3	6	2	5	1	4	45	5	
89	89	78	78	78	9	9	7	9	
12	12	7	9	4	2	1	3	1	3
4	4	8	56	6	5	5	56		

4	4	1	56	2	3	4	6	45	56
789	89		78			9		789	789
2	2	2	1		123	123	1	3	
789	89	89	4	56	56	56	5	56	
5	6	3	1		12	12	12		
			78	789	789	4	9	789	
	5	2	2	3	2	7	6	1	
	4	89	8		89			89	
3	2	2	2	2	23	23	3		
6	4	4	1	56	456	4	4		
89	89	89		789	789	9	89		
3	7	2	2	2	2	5	123	4	
6	89	8	6	6	6	89	89		
1	1	1	3		1	3			
4	4	45	56	56	56	8	45	2	
9	9	9	7	7	7	7	7		
2	3	6	2	5	1	4	45	5	
89	89	78	78	78	9	9	7	9	
12	12	7	9	4	2	1	3	1	3
4	4	8	56	6	5	5	56		

สังเกตจากช่องที่มีการบันทึก และมองหาตัวเลขในการบันทึกที่พบได้น้อยกว่าเลขอื่นๆ จะมีเพียง 2 ช่องที่มีเลข 3 และ 6 หมายความว่าเลข 3 ต้องอยู่ใน 1 ใน 2 ช่องนี้ และเลข 6 ต้องอยู่ในอีกช่อง ตัวเลขในการบันทึกนี้จะต้องอยู่ใน 2 ช่องนี้อย่างแน่นอน จึงสามารถลบการบันทึกตัวเลขในช่องอื่นๆได้

10. ตัวเลขทั้งสามที่ซ่อนอยู่ เป็นเทคนิคคล้ายกับเทคนิคตัวเลขคู่ที่ซ่อนอยู่ และทำงานด้วยแนวคิดเดียวกัน ซึ่งเทคนิคจะใช้ได้เมื่อมี 3 ช่องภายในแถว คอลัมน์ หรือตารางย่อยขนาด 3×3 มีตัวเลขในการบันทึกเหมือนกัน 3 ช่อง

ตัวอย่าง 10 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคตัวเลขทั้งสามที่ซ่อนอยู่

56 78	56 79	1	46 79	4 78	2	456 789	456 789	456 9
2 6 78	3	4	1 6 79	1 78	5	2 6 789	1 6 789	12 6 9
2 56 78	2 56 79	2 5 789	13 46 79	13 4 89	2 46 789	13 456 789	2 456 789	123 456 9
23 45	2 45	6	23 45	23 45	7	1 45	3 45	8
123 45 8	2 45	23 5 8	123 456 9	123 45 8	13 46 89	2 456 9	456 9	7
9	2 45 7	23 5 78	123 456 8	123 45 8	13 46 8	2 456 8	3 456	23 456
45 7	1	5 79	8 7	6 7	4	3	2	45 9
23 456 7	2 456 7	23 5 7	123 45 7	123 45 7	13 4 78	1 456 78	1 456	1 456
23 456 7	8	23 45 79	123 45 7	123 45 7	13 4 7	1 456 79	1 456	1 456

จากการสังเกตตารางย่อยขนาด 3×3 มีเพียง 3 ช่องที่มีตัวเลขซ้ำกัน ซึ่งก็คือ เลข 2, 5 และ 7 หมายความว่าตัวเลขเหล่านี้ต้องอยู่ใน 1 ใน 3 ช่องเหล่านี้ และไม่สามารถเติมตัวเลขใดๆ ได้ภายในช่องเหล่านี้ ในทางเดียวกันก็คือ เลข 2, 5 และ 7 ไม่สามารถอยู่ในช่องอื่นๆภายในตารางย่อยขนาด 3×3 ได้ด้วยเช่นกัน ดังนั้นตัวเลขในการบันทึกนี้จะต้องอยู่ใน 3 ช่องนี้อย่างแน่นอน จึงสามารถลบการบันทึกตัวเลขในช่องอื่นๆได้

11. ตัวเลขคู่ชี้ทาง เป็นเทคนิคที่ใช้ได้เมื่อมีเลขในการบันทึก 2 ครั้งในตารางขนาด 3×3 และเลขนั้นอยู่ในแถวหรือคอลัมน์เดียวกัน หมายความว่าเลขในการบันทึกต้องอยู่ในตารางขนาดย่อย 3×3 ดังนั้นสามารถลบเลขนั้นออกจากแถวหรือคอลัมน์ได้

ตัวอย่าง 11 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคตัวเลขคู่ชี้ทาง

56 78	56 79	1	46 79	4 78	2	456 789	456 789	3 456 9
2 6 78	3	4	1 6 79	1 78	5	2 6 789	1 6 789	12 6 9
2 56 78	2 56 79	2 5 789	13 46 79	13 4 89	2 46 789	13 456 789	2 456 789	123 456 9
23 45	2 45	6	23 45	23 45	7	1 45	3 45	8
123 45 8	2 45	23 5 8	123 456 9	123 45 8	13 46 89	2 456 9	456 9	7
9	2 45 7	23 5 78	123 456 8	123 45 8	13 46 8	2 456 8	3 456	23 456
45 7	1	5 79	8 7	6 7	4	3	2	45 9
23 456 7	2 456 7	23 5 7	123 45 7	123 45 7	13 4 78	1 456 78	1 456	1 456
23 456 7	8	23 45 79	123 45 7	123 45 7	13 4 7	1 456 79	1 456	1 456

จากการสังเกตจะ发现有เลข 3 อยู่ในตารางย่อยขนาด 3×3 และมีเลข 3 อยู่ในคอลัมน์เดียวกัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าเลข 3 จะต้องอยู่ในตารางย่อยขนาด 3×3 จึงสามารถลบการบันทึกเลข 3 ที่อยู่ในคอลัมน์ในช่องอื่นได้

12. ตัวเลขทั้งสามชี้ทาง เป็นเทคนิคคล้ายกับตัวเลขคู่ชี้ทาง ซึ่งใช้ได้เมื่อเลขในการบันทึกอยู่ในช่องสามช่องของตารางย่อยขนาด 3×3 และอยู่ในแถวหรือคอลัมน์เดียวกัน หมายความว่าเลขในการบันทึกต้องอยู่ใน 1 ใน 3 ช่องของตารางย่อยขนาด 3×3 อย่างแน่นอน ดังนั้นจะเห็นได้ชัดว่าเลขนี้ไม่สามารถอยู่ในแถวหรือคอลัมน์ในช่องอื่นได้ จึงสามารถลบเลขเหล่านั้นได้

ตัวอย่าง 12 เกมที่เกิดขึ้นของเทคนิคตัวเลขทั้งสามชี้ทาง

56 78	56 79	1	46 79	46 78	2	456 789	3 456 789	456 79
2 6 78	3	4	16 79	1 78	5	26 789	16 789	12 6 9
2 56 78	2 56	2 5	13 46	13 46	13 46	2 456	13 456	123 456 789
23 45	2 45	6	23 45	23 45	7	1 45	3 45	8 9
123 45 8	2 45	23 5	123 456	123 45	13 46	2 456	3 456	7 456 9
9	2 45 7	23 5 78	123 456	123 45	13 46	2 456	3 456	23 456
45 7	1	5 79	8	6	4	3	2	45 9
23 456 7	2 456	23 5	123 45	9	1 4	456 78	1 456	1 456
23 456 7	23 5	23 45	123 45	123 45	13 4	456 79	1 456	1 456

56 78	56 79	1	46 79	46 78	2	456 789	3 456 789	456 79
2 6 78	3	4	16 79	1 78	5	26 789	16 789	12 6 9
2 56 78	2 56	2 5	13 46	13 46	13 46	2 456	13 456	123 456 789
23 45	2 45	6	23 45	23 45	7	1 45	3 45	8 9
123 45 8	2 45	23 5	123 456	123 45	13 46	2 456	3 456	7 456 9
9	2 45 7	23 5 78	123 456	123 45	13 46	2 456	3 456	23 456
45 7	1	5 79	8	6	4	3	2	45 9
23 456 7	2 456	23 5	123 45	9	1 4	456 78	1 456	1 456
23 456 7	23 5	23 45	123 45	123 45	13 4	456 79	1 456	1 456

สังเกตตารางย่อยขนาด 3×3 ในแถว 2 คอลัมน์ 3 ซึ่งสามารถเห็นได้ชัดว่าทุกช่องสามารถเป็นเลข 3 ได้ และภายในคอลัมน์ก็สามารถเป็นเลข 3 ได้เช่นกัน แต่เลข 3 จะต้องปรากฏในตารางย่อยขนาด 3×3 เพียง 1 ครั้ง จึงสรุปได้ว่าเลข 3 จะต้องอยู่ในตารางย่อยขนาด 3×3 นั่นคือสามารถลบการบันทึกเลข 3 ที่อยู่ในคอลัมน์ในช่องอื่นได้

1.1.4 ตัวอย่างเกมซูโดกุที่มีการดัดแปลง

1. ขอบเขตการเติมตัวเลข

ตารางซูโดกุแบบมาตรฐานจะเป็นแบบตารางขนาด 9x9 นอกจากนี้ยังมีขนาดตารางซูโดกุที่แตกต่างกันออกไป เช่น ตารางขนาด 16x16 และ ในตารางแต่ละขนาดนั้นจะมีวิธีเล่นที่คล้ายกัน คือในตารางนั้น จะต้องเติมตัวเลข 1 ถึง n โดยที่ไม่ซ้ำกันในแถวแนวนอน และคอลัมน์แนวตั้ง

ตัวอย่าง 13 ซูโดกุเติมตัวเลขแบบตารางขนาด 9×9

	1		2	3	4		5	
	6						7	
3		6				7		4
4		8				1		5
	7						3	
	4		6	7	1		2	

8	3	5	1	6	7	9	4	2
7	1	9	2	3	4	8	5	6
2	6	4	9	8	5	3	7	1
3	2	6	5	1	8	7	9	4
1	5	7	4	9	6	2	8	3
4	9	8	7	2	3	1	6	5
5	7	1	8	4	2	6	3	9
9	4	3	6	7	1	5	2	8
6	8	2	3	5	9	4	1	7

จากรูปสังเกตได้จากตารางมีขนาด 9×9 คือ มีทั้งหมด 9 คอลัมน์และแถวแนวนอน 9 แถว โดยมีตารางย่อยขนาด 3×3 จำนวน 9 ตารางและเลขในแต่ละคอลัมน์, แถว ตารางย่อยใส่เลข 1 ถึง 9 โดยไม่ซ้ำกัน

2. ซูโดกุเอกซ์ (Sudoku X)

เป็นตารางซูโดกุที่คล้ายกับกับกติกาแบบปกติทุกอย่าง นอกจากเติมเลขโดยที่ไม่ซ้ำกันในแถวแนวนอน คอลัมน์แนวตั้ง และตารางย่อยแล้ว นอกจากนี้ต้องเติมเลขแนวทแยงที่ตัดผ่านตาราง (รูปตัว X) โดยไม่ซ้ำกันเช่นกัน

ตัวอย่าง 14 ซูโดกุเอกซ์

	1		2	3	4		5	
	6						7	
3		6				7		4
4		8				1		5
	7						3	
	4		6	7	1		2	

8	3	5	1	6	7	9	4	2
7	1	9	2	3	4	8	5	6
2	6	4	9	8	5	3	7	1
3	2	6	5	1	8	7	9	4
1	5	7	4	9	6	2	8	3
4	9	8	7	2	3	1	6	5
5	7	1	8	4	2	6	3	9
9	4	3	6	7	1	5	2	8
6	8	2	3	5	9	4	1	7

จากรูปสังเกตได้จากช่องที่มีการแรเงาแบบแนวทแยงจะใส่เลข 1 ถึง 9 โดยไม่ซ้ำกัน

3. ซูโดกุคู่คี่ (Even/Odd Sudoku)

เป็นซูโดกุที่มีการแรเงาในช่อง เพื่อแยกให้เห็นได้ชัดว่า ช่องที่แรเงานั้นต้องเติมเลขคู่หรือเลขคี่ ขึ้นอยู่กับกติกาที่กำหนด

ตัวอย่าง 15 ซูโดกุเลขคู่

	1		2	3	4		5	
	6						7	
3		6				7		4
4		8				1		5
	7						3	
	4		6	7	1		2	

8	3	5	1	6	7	9	4	2
7	1	9	2	3	4	8	5	6
2	6	4	9	8	5	3	7	1
3	2	6	5	1	8	7	9	4
1	5	7	4	9	6	2	8	3
4	9	8	7	2	3	1	6	5
5	7	1	8	4	2	6	3	9
9	4	3	6	7	1	5	2	8
6	8	2	3	5	9	4	1	7

จากรูปสังเกตได้จากตัวเลขที่อยู่ในช่องมีการแรเงา ทำให้ได้ว่าช่องว่างที่มีการแรเงาต้องเป็นเลขคู่

4. ซูโดกุบวกเลข หรือ คิลเลอร์ซูโดกุ หรือซูโดกุแบบผลรวม (Killer Sudoku)

เป็นซูโดกุที่มีการนำเกมคักกุโรมาผสมผสานเข้าด้วยกัน ในตารางจะมีช่องตามสีหรือตามเส้นประ และมีตัวเลขจำนวนหนึ่งอยู่บนมุมซ้ายของเส้นประ ซึ่งแสดงว่าเลขที่เติมในช่องรอบเส้นประนั้นจะต้องรวมกันให้ได้เท่ากับเลขที่อยู่ด้านบน

ตัวอย่าง 16 ซูโดกุบวกเลข

		5					2
	1		2	3	4		5
	6		9				7
3		6				7	4
				9			8
4		8	7		3	1	5
	7						3
	4		6	7	1		2
		2					1

8	3	5	1	6	7	9	4	2
7	1	9	2	3	4	8	5	6
2	6	4	9	8	5	3	7	1
3	2	6	5	1	8	7	9	4
1	5	7	4	9	6	2	8	3
4	9	8	7	2	3	1	6	5
5	7	1	8	4	2	6	3	9
9	4	3	6	7	1	5	2	8
6	8	2	3	5	9	4	1	7

จากรูปสังเกตได้จากแถวสุดท้ายที่มีช่องเส้นประรวมกันเท่ากับ 10 แต่เรารู้ว่าในช่องเส้นประนั้นมีเลขต้นต้นเลข 2 อยู่ ทำให้รู้ว่าช่องว่างอีกช่องต้องเป็นเลข 8 ซึ่งเป็นไปตามรูปถัดไปที่มีเติมตัวเลขสมบูรณ์

5. ซูโดกุมากกว่าหรือน้อยกว่า (Comparison Sudoku)

มีลักษณะที่แสดงเครื่องหมายมากกว่าหรือน้อยกว่าตรงเส้นตาราง โดยที่ต้องเติมเลขให้มากกว่าหรือน้อยกว่าในช่องถัดไป

ตัวอย่าง 17 ซูโดกุมากกว่าหรือน้อยกว่า

		5						2
	1		2	3	4			5
	6		9					7
3		6				7		4
				9				8
4		8	7		3	1		5
	7							3
	4		6	7	1			2
		2						1

8	3	5	1	6	7	9	4	2
7	1	9	2	3	4	8	5	6
2	6	4	9	8	5	3	7	1
3	2	6	5	1	8	7	9	4
1	5	7	4	9	6	2	8	3
4	9	8	7	2	3	1	6	5
5	7	1	8	4	2	6	3	9
9	4	3	6	7	1	5	2	8
6	8	2	3	5	9	4	1	7

สังเกตจากการพิจารณาตัวเลข 2 ช่องว่าตัวเลขช่องนั้นมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่ากับตัวเลขในอีกช่อง

6. จิ๊กซอว์ซูโดกุ (Jigsaw Sudoku)

กรอบตารางที่ใส่เลข 1 ถึง 9 จะเป็นรูปที่บิดเบือนคล้ายกับชิ้นส่วนของจิ๊กซอว์ หมายความว่ากรอบตารางที่บิดเบือนจะต้องเติมเลข 1 ถึง 9 โดยไม่ซ้ำกัน

ตัวอย่าง 18 จิกซอร์ซูโดกุ

		3	4		6		9	
3		8		2		4	1	6
	1		3		8	9	6	
8		4	6	3	1			7
6	8		2				7	
	4		8	1	7			5
9		7			2	1	4	
7		6			9		5	2
	5		7	6	3		8	

1	2	3	4	5	6	7	9	8
3	7	8	9	2	5	4	1	6
5	1	2	3	7	8	9	6	4
8	9	4	6	3	1	5	2	7
6	8	5	2	9	4	3	7	1
2	4	9	8	1	7	6	3	5
9	6	7	5	8	2	1	4	3
7	3	6	1	4	9	8	5	2
4	5	1	7	6	3	2	8	9

เป็นปริศนาที่มีกติกาเพิ่มเติมของเกมซูโดกุขนาด 9×9 สังเกตได้จากรูปทางด้านขวาที่แต่ละคอลัมน์และแถวใส่เลข 1 ถึง 9 โดยไม่ซ้ำกัน

7. ไฮเปอร์ซูโดกุ (Hypersudoku)

ภายในตารางจะมีช่องแรเงาข้ามเส้น โดยมีกติกาว่าตารางแรเงา ก็ต้องเติมเลข 1-9 โดยไม่ซ้ำกันเช่นกัน

ตัวอย่าง 19 ไฮเปอร์ซูโดกุ

เป็นปริศนาที่มีกติกาเพิ่มเติมของเกมซูโดกุขนาด 9×9 คือ จากรูปในตารางแรเงาขนาด 3×3 ข้ามเส้นต้องใส่เลข 1 ถึง 9 โดยไม่ซ้ำกัน

						7		
4		6				1	2	
				1				5
							5	
	6			3	4			
	7							
	4	2		7				
3		8	6		1		7	4
	1						3	

1	2	3	4	6	5	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	2	1	3	4	6	5
9	3	4	1	2	7	8	5	6
2	6	5	8	3	4	9	1	7
8	7	1	5	9	6	3	4	2
6	4	2	3	7	8	5	9	1
3	9	8	6	5	1	2	7	4
5	1	7	9	4	2	6	3	8

8. ซูโดกุแบบตารางซ้อน

เป็นตาราง 9×9 ที่มี 2 ถึง 5 ตารางทับซ้อนกัน โดยส่วนที่ทับซ้อนจะเป็นคำตอบเดียวกันกับตารางที่ทับซ้อนกันอยู่ ซูโดกุแบบตารางซ้อนนี้เป็นที่รู้จักในชื่อของ "ซามูไร ซูโดกุ" (Samurai Sudoku) โดยกติกาจะอยู่ที่การกำหนดตารางแต่ละตาราง เช่น ทั้ง 5 ตารางเป็นซูโดกุเอกซ์หรือ แต่ละตารางเป็นซูโดกุคนละชนิดกัน

วิธีการดำเนินการค้นคว้าอิสระ

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานของเกมซูโดกุ
2. ค้นหาไอโซเมตริกซูโดกุที่สมบูรณ์
3. เลือกไอโซเมตริกสมบูรณ์ จากนั้นสร้างปริศนาแบบสุ่มและสังเกตรูปแบบ
4. แบ่งปริศนาที่เป็นไปได้ออกเป็นกลุ่มตามจำนวนที่เหลือในแต่ละตาราง
5. พิจารณาแต่ละกรณีอย่างละเอียด
6. ตรวจสอบความถูกต้องโดยใช้ชุดคำสั่งไพทอน

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการค้นคว้าอิสระ

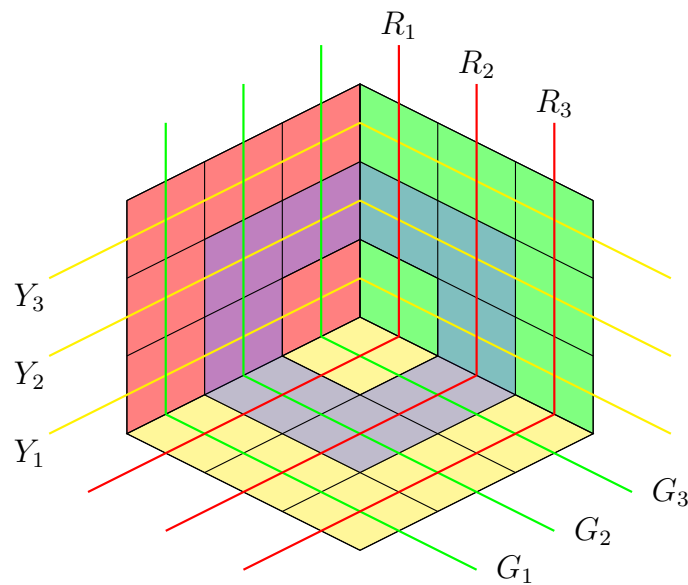
1. ได้เกมซูโดกุรูปแบบใหม่
2. ได้ทราบผลคำตอบที่อยากรู้จากการพิจารณาแต่ละกรณี

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

ช่วงแรกจะกล่าวถึงกติกาเกมไอโซเมตริกซูโดกุที่เพิ่มเติมจากเกมซูโดกุมาตรฐานขนาด 9×9 แต่จะแตกต่างจากจำนวนตารางย่อยขนาด 3×3 ที่จากเดิมมีจำนวน 9 ตาราง จะเหลือเพียง 3 ตารางที่วางอยู่ในรูปแบบปริภูมิ 3 มิติ และมีตารางย่อยตารางที่ 4 ซ้อนทับกับตารางย่อย 3 ตารางแรกเรียกว่าตารางร่วม ต่อไปจะกล่าวถึงข้อตกลงของตารางปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุและข้อตกลงการกำหนดสัญลักษณ์

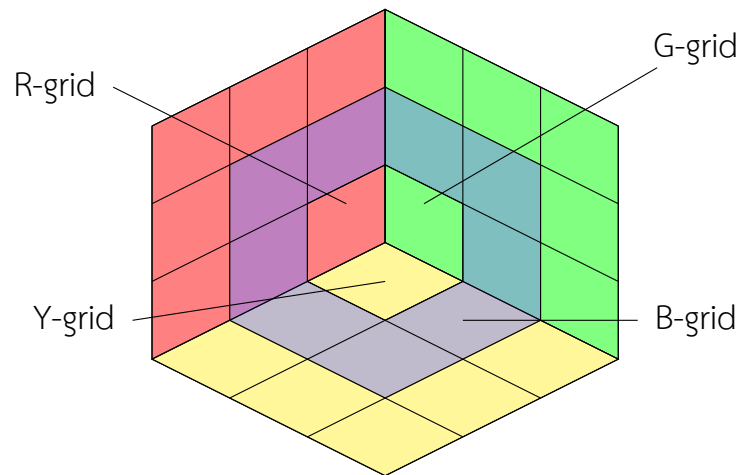
2.1 กติกาไอโซเมตริกซูโดกุ



1. ตารางขนาด 3×3 แต่ละสี สามารถใส่เลข 1 ถึง 9 โดยไม่ซ้ำกัน
2. ในตารางร่วมสีน้ำเงินสามารถใส่เลข 1 ถึง 9 โดยไม่ซ้ำกัน
3. แต่ละคอลัมน์แนวตั้งและแถวแนวนอนสามารถใส่เลข 1 ถึง 9 โดยไม่ซ้ำกัน

2.2 ข้อตกลงและส่วนประกอบของไอโซเมตริกซูโดกุ

2.2.1 ข้อตกลงของตาราง



โดยที่กำหนดชื่อตาราง เป็นดังนี้

1. ตาราง R (R-grid) คือตารางสีแดงขนาด 3×3
2. ตาราง Y (Y-grid) คือตารางสีเหลืองขนาด 3×3
3. ตาราง G (G-grid) คือตารางสีเขียวขนาด 3×3
4. ตาราง B (B-grid) คือตารางร่วมสีน้ำเงินหรือตารางร่วมที่มีส่วนทับกับ 3 ตารางข้างต้น

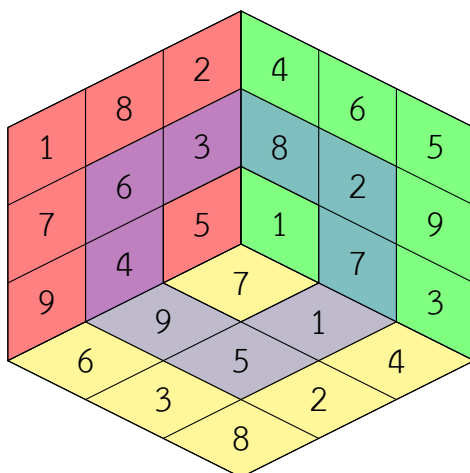
2.2.2 ข้อตกลงการกำหนดสัญลักษณ์

สำหรับ $u, v, w \in \{0, 1, \dots, 9\}$:

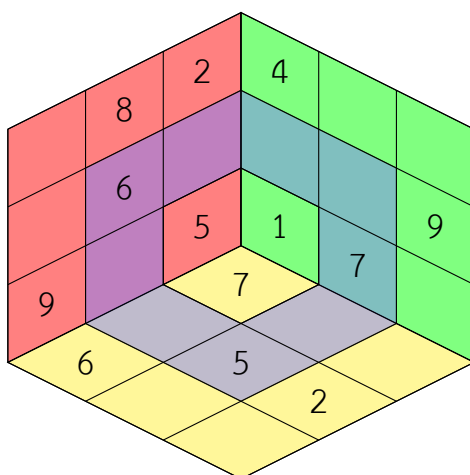
1. ให้ $n(R, Y, G) = n(u, v, w)$ คือจำนวนตัวเลขตั้งต้นมีจำนวน u, v และ w ตัว ในตาราง R, Y และ G ตามลำดับ และจะได้ว่า $n(R, Y, G) = n(u, v, w)$ ถูกย่อให้อยู่ในรูปแบบ $n(u, v, w)$ เช่น $n(R, Y, G) = n(5, 4, 6)$ คือจำนวนตัวเลขตั้งต้นมีจำนวน 5, 4 และ 6 ตัว ในตาราง R, Y และ G ตามลำดับ
2. ให้ (u, v, w) เป็นชุดยูเนียนของการเรียงสับเปลี่ยนพิกัดสมาชิกทั้ง 3 เช่น $(u, v, w) = n(u, v, w) \cup n(u, w, v) \cup n(v, u, w) \cup n(v, w, u) \cup n(w, u, v) \cup n(w, v, u)$.

2.2.3 ปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุที่สนใจ

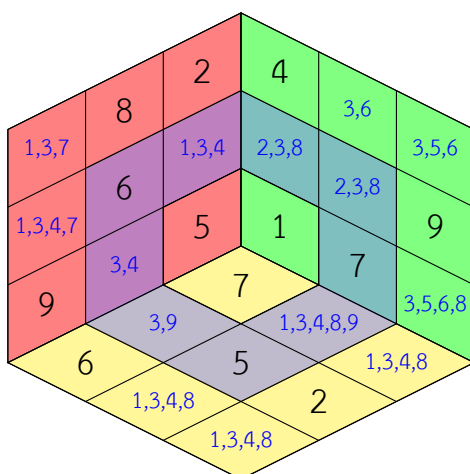
ตัวอย่าง 21 ไอโซเมตริกซูโดกุดังภาพเป็นไอโซเมตริกซูโดกุแบบสมบูรณ์



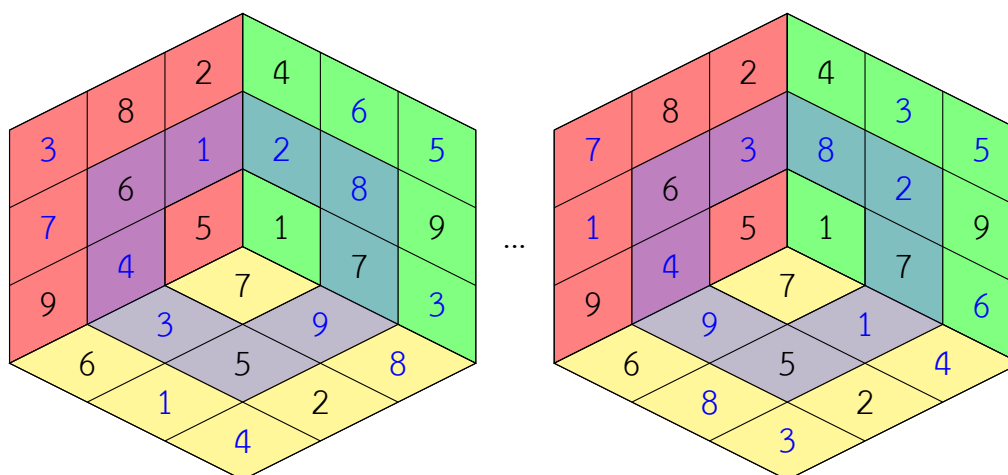
ตัวอย่าง 22 ปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุดังภาพเป็นโจทย์ไอโซเมตริกซูโดกุที่ได้จากการสลับตัวเลขตั้งต้นในตัวอย่าง 21



ตัวอย่าง 23 บันทึกตัวเลขที่เป็นไปได้ในช่องว่างของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุในตัวอย่าง 22 ได้ดังภาพ



ตัวอย่าง 24 คำตอบในไอโซเมตริกซูโดกุที่เป็นไปได้ของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุในตัวอย่าง 22



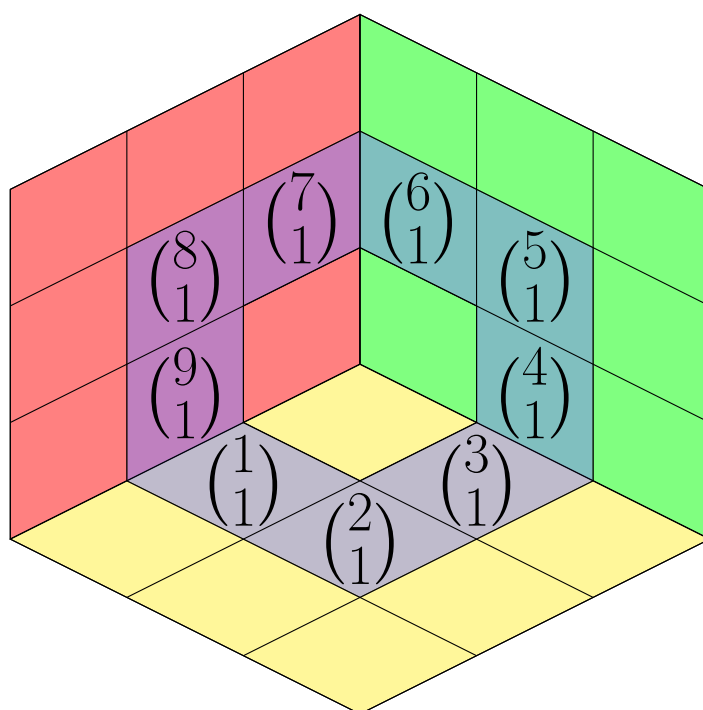
จากตัวอย่าง 21 และ 24 ได้ว่าไอโซเมตริกซูโดกุแบบสมบูรณ์ของทั้ง 2 รูปไม่เหมือนกัน จากการลบเลขตัวตั้งต้นเพื่อใส่คำตอบ จึงทำให้ได้ว่าไอโซเมตริกซูโดกุสามารถมีได้หลายคำตอบ

บทที่ 3

จำนวนไอโซเมตริกสมบูรณ์

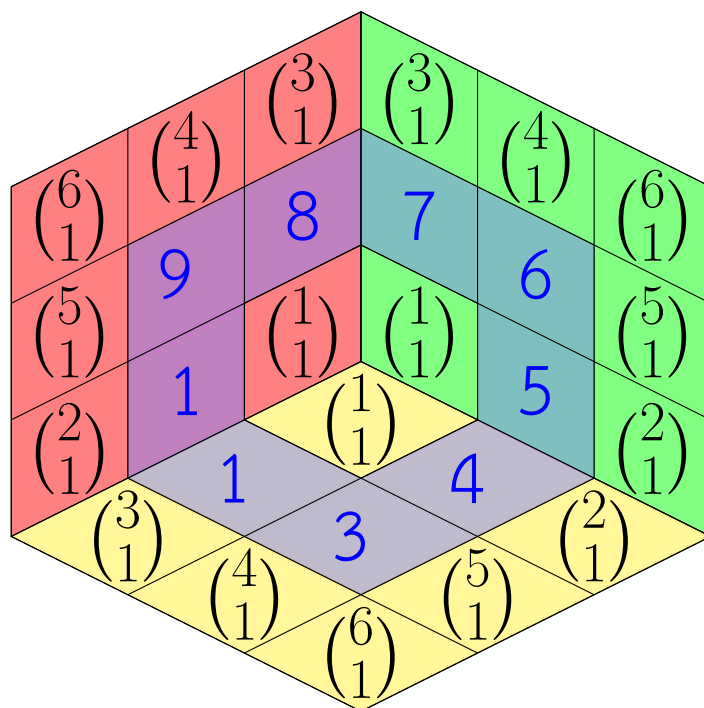
ในส่วนนี้จะกล่าวถึงจำนวนไอโซเมตริกสมบูรณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ พิจารณาตัวเลขแต่ละตัวว่าสามารถอยู่ในช่องใดได้บ้าง แล้วเมื่อตัวเลขนั้นอยู่ช่องนี้ช่องถัดไปสามารถเป็นเลขใดได้บ้าง จากนั้นมาคำนวณหาจำนวนไอโซเมตริกสมบูรณ์ที่เป็นไปได้

ตัวอย่าง 25 พิจารณาการใส่ตัวเลขที่เป็นไปได้ลงในช่องแต่ละช่องในตาราง B



จากรูปตารางไอโซเมตริกข้างต้น เราจะเริ่มพิจารณาจากตาราง B ว่าในตาราง B สามารถมีเลข 1 ถึง 9 โดยไม่ซ้ำกัน จากนั้นจะได้ว่าในตาราง B นั้นสามารถเรียงสับเปลี่ยนกันไปได้จำนวน $9!$

ตัวอย่าง 26 พิจารณาการใส่ตัวเลขที่เป็นไปได้ลงในช่องแต่ละช่องในตาราง R, Y และ G แล้วกำหนดตัวเลขในตาราง B เพื่อช่วยในการพิจารณาช่องว่างของตารางแต่ละสีว่าช่องว่างนั้นสามารถเป็นเลขอะไรได้บ้าง



เมื่อมีการสมมติตัวเลขในตาราง B แล้วจากนั้นจะพิจารณาจำนวนเลขที่เป็นไปได้ในตารางแต่ละสี ในตาราง R จะได้ว่าเหลือช่องว่างจำนวน 6 ช่องที่สามารถเติมตัวเลขลงไปได้ ทำให้ได้ว่าช่องแรกที่เราพิจารณาสามารถเลือกเลขมา 1 ตัว จากเลขที่เหลือทั้งหมด 6 ตัว โดยที่ช่องถัดไปจะใช้หลักพิจารณานี้ในการเติมต่อไป และในตารางสี Y และ G ก็ใช้วิธีคิดเหมือนกับตาราง B จึงทำให้ได้รูปข้างต้น

ดังนั้นเราสรุปได้ว่าจำนวนที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุคือ น้อยกว่าหรือเท่ากับ $9! \times (6!)^3$ เนื่องจากใน $9! \times (6!)^3$ วิธีนั้น อาจจะมีจำนวนที่ไม่สามารถเป็นไปได้จากการมีตัวเลขซ้ำกันในคอลัมน์และแถวแนวนอนค่าดังกล่าวจึงเป็นเพียงขอบเขตบน

บทที่ 4

ปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุที่มีเพียงคำตอบเดียว

ในบทนี้เราจะศึกษาปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุที่มีเพียงคำตอบเดียว โดยเริ่มจากการเลือกไอโซเมตริกสมบรูณ์ จากนั้นสร้างปริศนาแบบสุ่ม และสังเกตเพื่อพิจารณาแต่กรณีอย่างละเอียดว่าเลขตั้งต้นน้อยสุดของตารางแต่ละสี่คือเท่าไรที่สามารถทำให้ปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุมีคำตอบเดียว จากนั้นจะได้ข้อสรุปเลขตั้งต้นทั้งหมดของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุที่ทำให้ปริศนามีคำตอบเดียว และจากการพิจารณาหาคำตอบในบทนี้จะใช้ กลยุทธ์ เทคนิคและเคล็ดลับการไขปริศนาข้อ 1. ช่องว่างสุดท้าย, 2. ช่องสุดท้ายที่เหลืออยู่, 3. ตัวเลขสุดท้ายที่เป็นไปได้, 4. การบันทึกและ 5. ตัวเลขเดียวที่เห็นได้ชัด เข้ามาใช้พิจารณาการหาจำนวนคำตอบของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุที่เป็นไปได้ในแต่ละกรณี

4.1 วิธีการตรวจสอบ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงกลยุทธ์และลำดับของการพิจารณาปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุในหัวข้อถัดๆไปของบทนี้

ตัวอย่าง 27 ตารางใช้พิจารณาในการลบตำแหน่งเลขตั้งต้นเพื่อสร้างปริศนา

1	2	3
4	5	6
7	8	9

ลำดับแรกคือ การกำหนดตำแหน่งในตารางขนาด 3×3 โดยการเรียงเลข 1 ถึง 9 ลงในตาราง

ตัวอย่าง 28 เรียงลำดับการพิจารณาเมื่อมีการเลขตั้งต้น 2 ตัว

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

...

1	2	3
4	5	6
7	8	9

เป็นการพิจารณาลบเลขตั้งต้นโดยการจับคู่ตัวเลขทุกตัว เช่น ลบเลขตั้งต้นตำแหน่ง 1 ในตำแหน่ง 1 จะจับคู่กับเลขในตำแหน่ง 2, 3, ..., 9 เช่นเดียวกับการลบเลขในตำแหน่ง 2 ในตำแหน่ง 2 จะจับคู่กับเลขในตำแหน่ง 3, 4, ..., 9 จนไปถึงลบเลขตั้งต้นในตำแหน่ง 8 จับคู่กับเลขตั้งต้นตำแหน่ง 9 จากการเรียงพิจารณาการพิจารณาเมื่อมีการเลขตั้งต้น 2 ตัว จะมีทั้งหมด 36 กรณี

ตัวอย่าง 29 เรียงลำดับการพิจารณาเมื่อมีการเลขตั้งต้น 3 ตัว

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
4	5	6
7	8	9

...

1	2	3
4	5	6
7	8	9

เป็นการพิจารณาลบเลขตั้งต้นโดยการจับคู่ตัวเลขทุกตัว เช่น ลบเลขตั้งต้นตำแหน่ง 1 ในตำแหน่ง 1 จะจับคู่กับเลขในตำแหน่ง 2 กับ 3, 2 กับ 4, ..., 2 กับ 9 เช่นเดียวกับการลบเลขในตำแหน่ง 2 ในตำแหน่ง 2 จะจับคู่กับเลขในตำแหน่ง 3 กับ 4, 3 กับ 5, ..., 3 กับ 9 จนไปถึงลบเลขตั้งต้นในตำแหน่ง 7 จับคู่กับเลขตั้งต้นตำแหน่ง 8 กับ 9

หมายเหตุ ถ้าในกรณีการพิจารณาเมื่อมีการเลขตั้งต้น 2 ตัว เมื่ออยู่ในเกมปริศนาไอโซเมตริกมีคำตอบมากกว่าหรือเท่ากับ 2 คำตอบ จะไม่มีการพิจารณาในการพิจารณาเมื่อมีการเลขตั้งต้น 3 ตัว เช่น การพิจารณาเมื่อมีการเลขตั้งต้น 2 ตัวมีคำตอบมากกว่าหรือเท่ากับ 2 ในตำแหน่งที่ 1 กับ 2 จะได้ว่าไม่มีการพิจารณาการพิจารณาเมื่อมีการเลขตั้งต้น 3 ตัวในตำแหน่งที่ 1, 2 กับ 3 และในตำแหน่งที่ 1, 2 กับ 4 จนไปถึงตำแหน่งที่ 1, 2 กับ 9

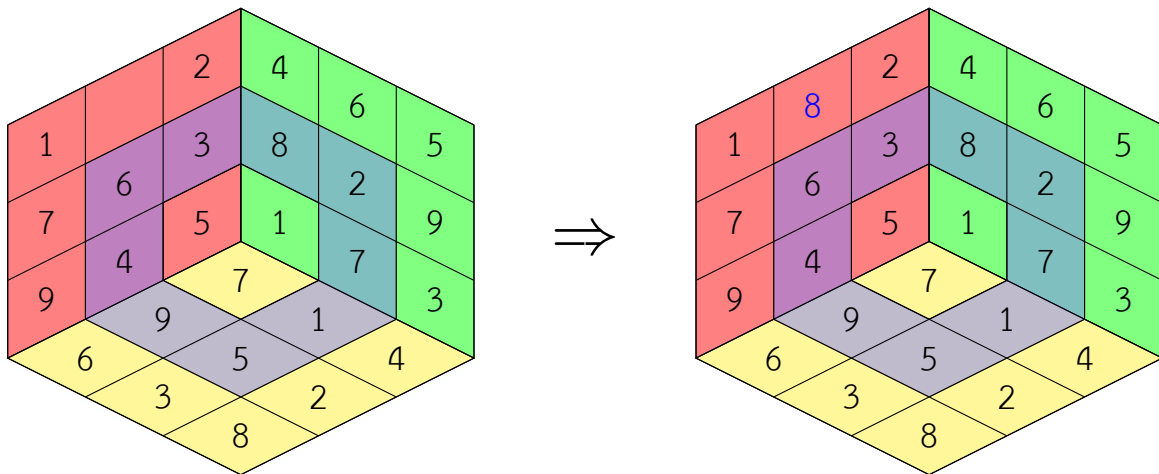
ในการทำงานเดียวกันกับการลบเลขตั้งต้น 4, 5, ..., 9 ตัว จะให้หลักการเดียวกับตัวอย่าง 28 และตัวอย่าง 29

4.2 พิจารณารูปแบบ (8, 9, 9)

รูปแบบนี้จะพิจารณาโดยการลบออกทีละ 1 ช่องจากแต่ละตาราง

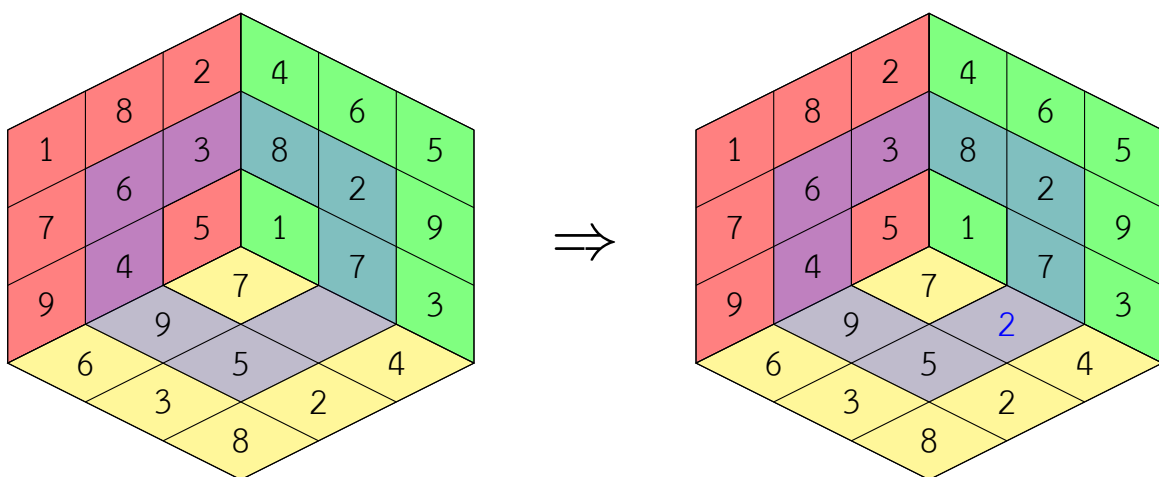
ตัวอย่าง 30 $n(R, Y, G) = n(8, 9, 9)$ และเมื่อใส่คำตอบ จะได้ว่า

จะทำการลบทีละ 1 ช่องเพื่อทำการหาคำตอบเดียวที่ได้จากการเติมช่องว่าง หากได้คำตอบมากกว่า 1 คำตอบจะไม่ทำการพิจารณากรณีนั้นต่อไป นั่นคือรูปแบบ (8, 9, 9) จะมี 27 กรณี โดยที่ $n(8, 9, 9)$ มี 9 กรณี, $n(9, 8, 9)$ มี 9 กรณี และ $n(9, 9, 8)$ มี 9 กรณี



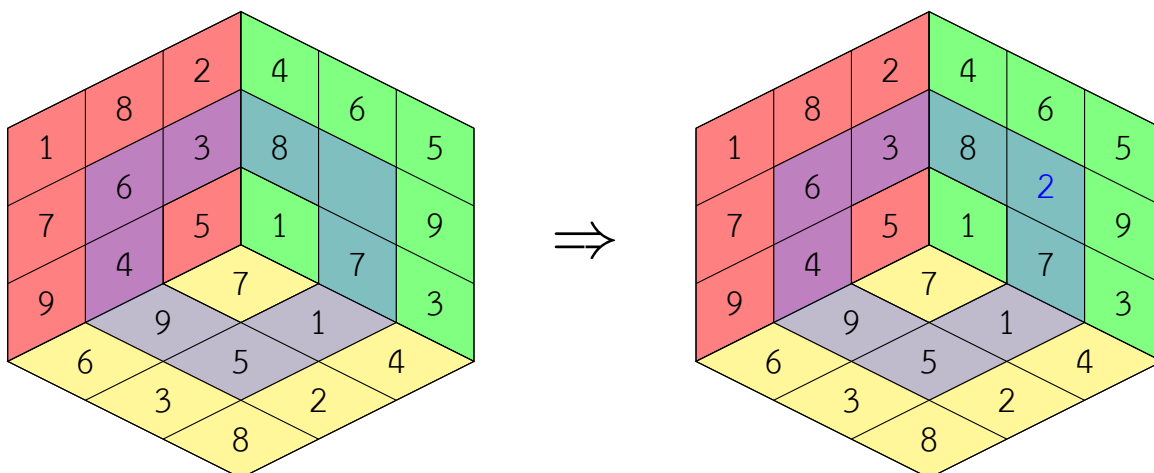
จะได้ว่า $n(8, 9, 9)$ จะมีได้แค่ 1 คำตอบเท่านั้น อ้างอิงจากกลยุทธ์ เทคนิคและเคล็ดลับการไขปริศนา 1. ช่องว่างสุดท้าย

ตัวอย่าง 31 $n(R, Y, G) = n(9, 8, 9)$ และเมื่อใส่คำตอบ จะได้ว่า



จะได้ว่า $n(9, 8, 9)$ จะมีได้แค่ 1 คำตอบเท่านั้น อ้างอิงจากกลยุทธ์ เทคนิคและเคล็ดลับการไขปริศนา 1. ช่องว่างสุดท้าย

ตัวอย่าง 32 $n(R, Y, G) = n(9, 9, 8)$ และเมื่อใส่คำตอบ จะได้ว่า

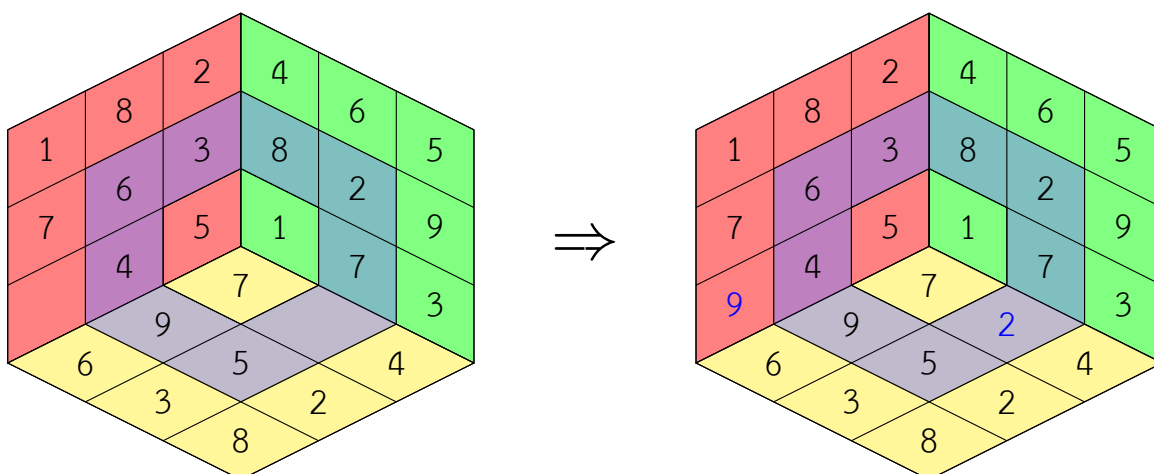


จะได้ว่า $n(9, 9, 8)$ จะมีได้แค่ 1 คำตอบเท่านั้น อ้างอิงจากกลยุทธ์ เทคนิคและเคล็ดลับการไขปริศนา 1. ช่องว่างสุดท้าย สรุปได้ว่า การพิจารณารูปแบบ $(8, 9, 9)$ จะมีได้แค่ 1 คำตอบเท่านั้น อ้างอิงจากกลยุทธ์ เทคนิคและเคล็ดลับการไขปริศนา 1. ช่องว่างสุดท้าย

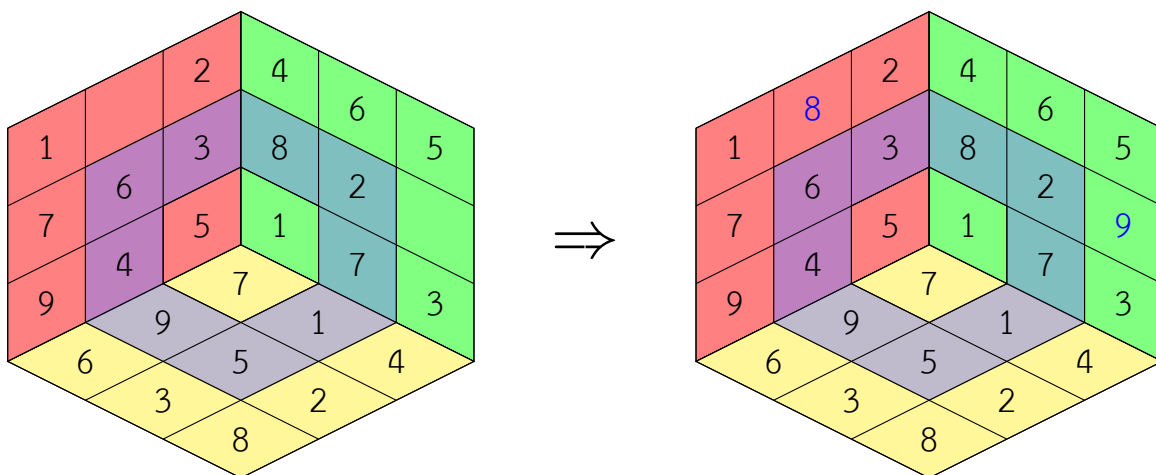
4.3 พิจารณารูปแบบ $(8, 8, 9)$

ในตารางสีจำนวน 2 ตารางจะทำการลบทีละ 1 ช่อง เพื่อทำการหาคำตอบเดียวที่ได้จากการเติมช่องว่าง

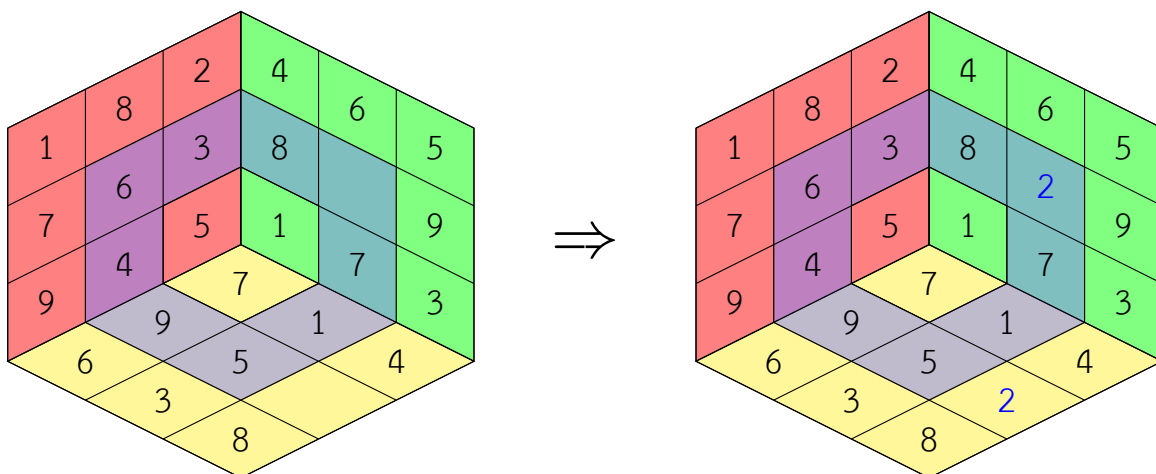
ตัวอย่าง 33 $n(R, Y, G) = n(8, 8, 9)$ และเมื่อใส่คำตอบ จะได้ว่า



ตัวอย่าง 34 $n(R, Y, G) = n(8, 9, 8)$ และเมื่อใส่คำตอบ จะได้ว่า



ตัวอย่าง 35 $n(R, Y, G) = n(9, 8, 8)$ และเมื่อใส่คำตอบ จะได้ว่า

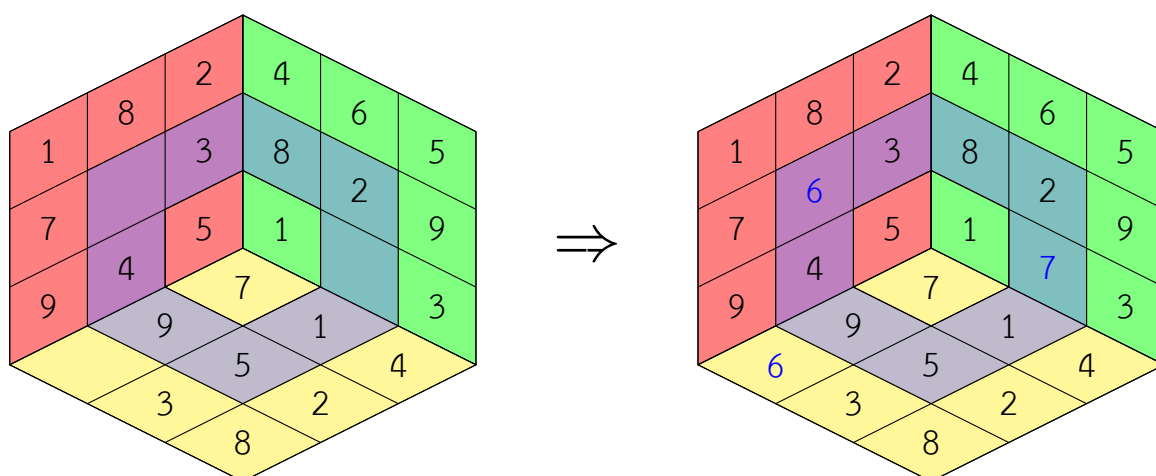


สรุปได้ว่า การพิจารณารูปแบบ (8, 8, 9) จะมีได้แค่ 1 คำตอบเท่านั้น อ้างอิงจากกลยุทธ์ เทคนิคและเคล็ดลับการไขปริศนา 1. ช่องว่างสุดท้าย

4.4 พิจารณารูปแบบ (8, 8, 8)

ในตารางสีจำนวน 3 ตารางจะทำการลบทีละ 1 ช่อง เพื่อทำการหาคำตอบเดียวที่ได้จากการเติมช่องว่าง

ตัวอย่าง 36 $n(R, Y, G) = n(8, 8, 8)$ และเมื่อใส่คำตอบ จะได้ว่า



สรุปได้ว่า การพิจารณารูปแบบ (8, 8, 8) จะมีคำตอบทุกกรณีจากอ้างอิงจากกลยุทธ์ เทคนิคและเคล็ดลับการไขปริศนา 1. ช่องว่างสุดท้าย

4.5 พิจารณารูปแบบ (7, 9, 9)

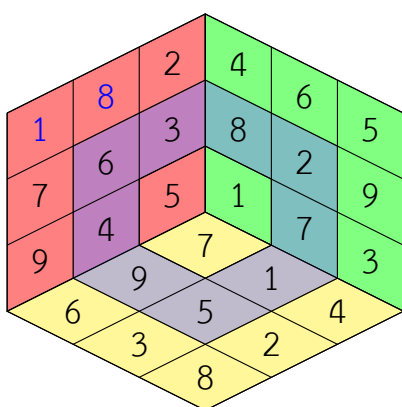
จะทำการลบทีละ 2 ช่อง เพื่อทำการหาคำตอบเดียวที่ได้จากการเติมช่องว่าง หากได้คำตอบมากกว่า 1 คำตอบจะไม่ทำการพิจารณากรณีนั้นต่อไป นั่นคือรูปแบบ (7, 9, 9) จะมี 108 กรณี

โดยที่ $n(7, 9, 9)$ มี 36 กรณี, $n(9, 7, 9)$ มี 36 กรณี และ $n(9, 9, 7)$ มี 36 กรณี

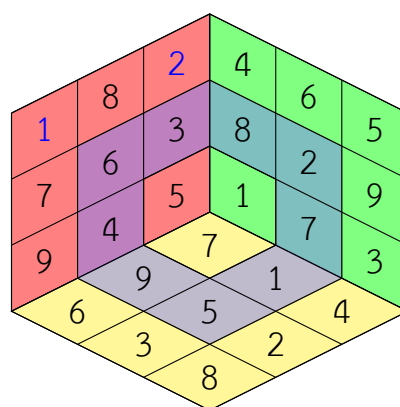
หมายเหตุ ตัวหนังสือสีน้ำเงินคือการลบเลขในช่องนั้นและมีการเติมเลขเข้าไปใหม่ เพื่อทำการหาจำนวนตอบของการเติมตัวเลข

ตัวอย่าง 37 $n(R, Y, G) = n(7, 9, 9)$ และเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

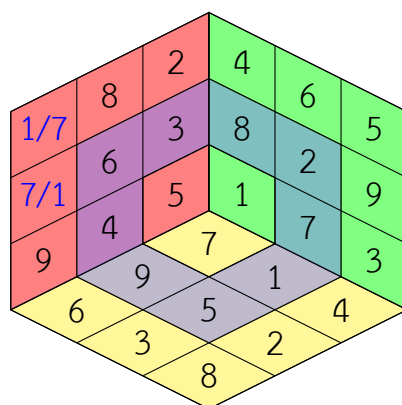
กรณีที่ 1



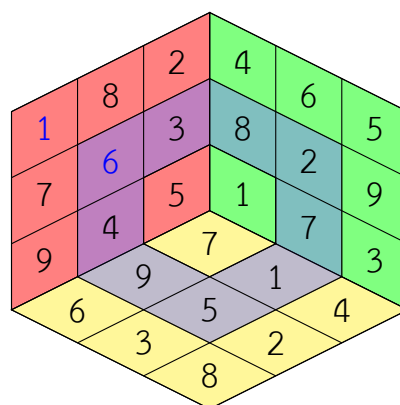
กรณีที่ 2



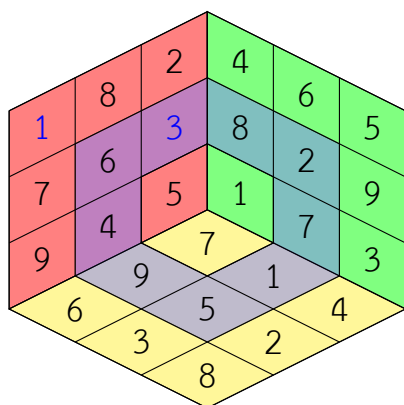
กรณีที่ 3



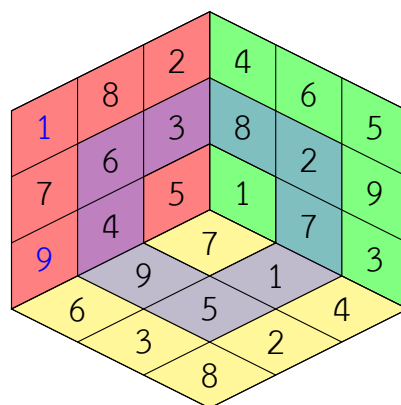
กรณีที่ 4



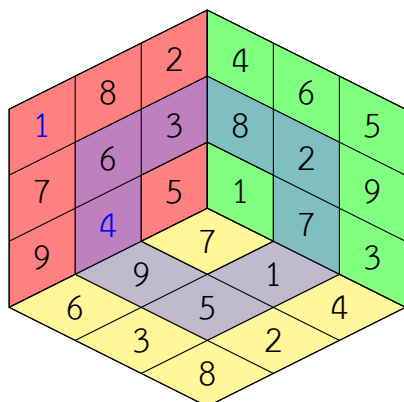
กรณีที่ 5



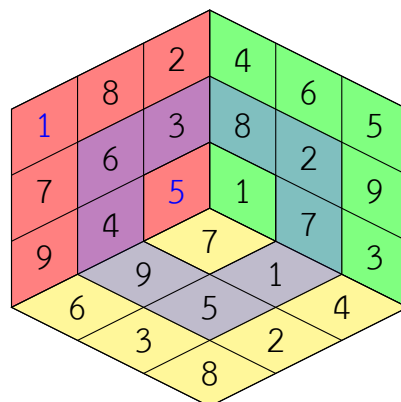
กรณีที่ 6



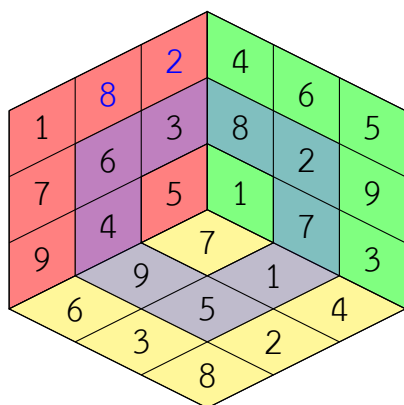
กรณีที่ 7



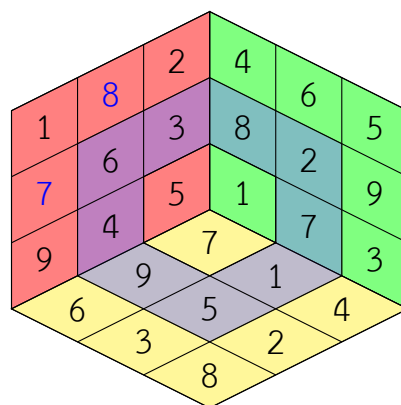
กรณีที่ 8



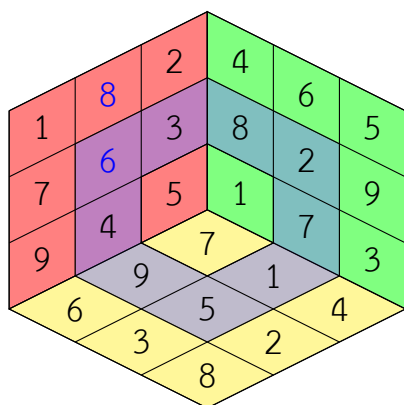
กรณีที่ 9



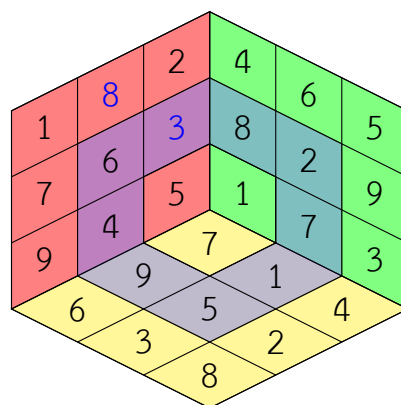
กรณีที่ 10



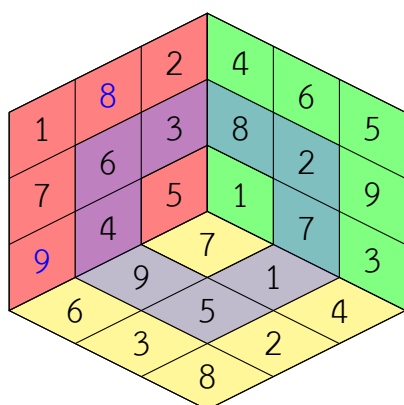
กรณีที่ 11



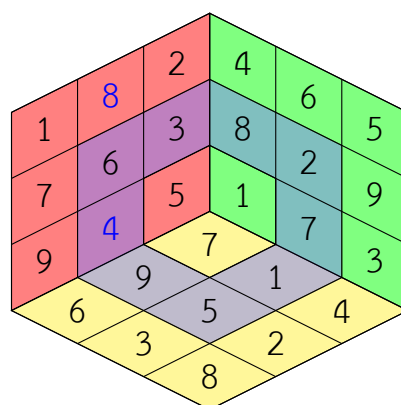
กรณีที่ 12



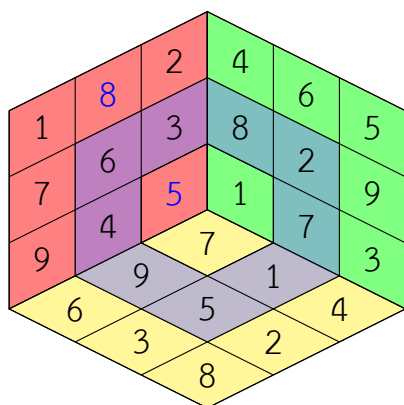
กรณีที่ 13



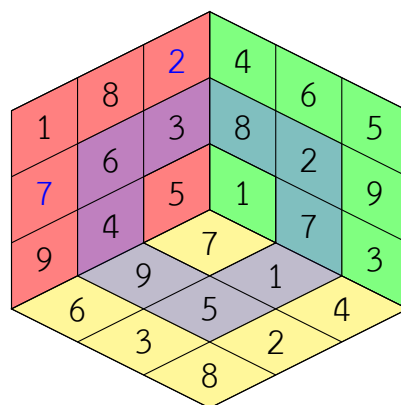
กรณีที่ 14



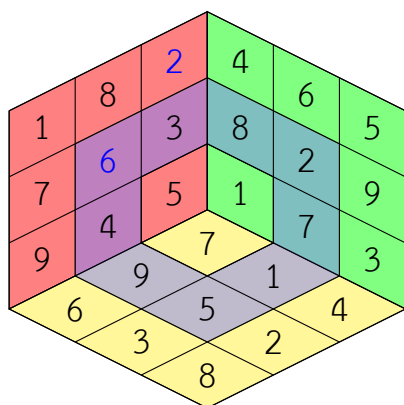
กรณีที่ 15



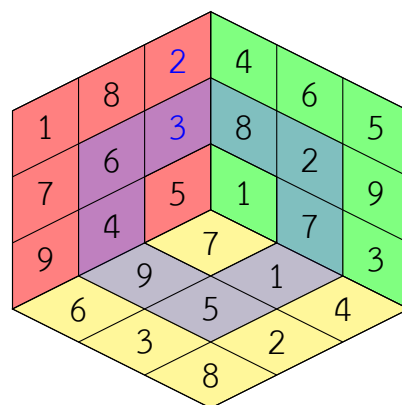
กรณีที่ 16



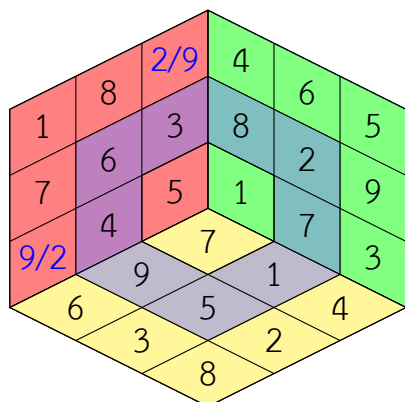
กรณีที่ 17



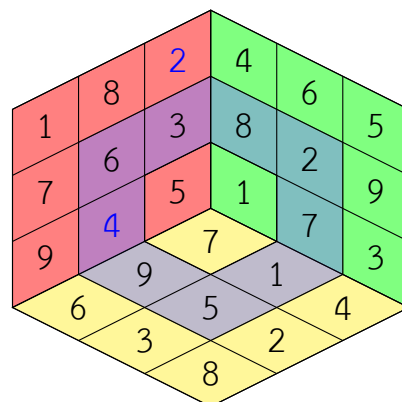
กรณีที่ 18



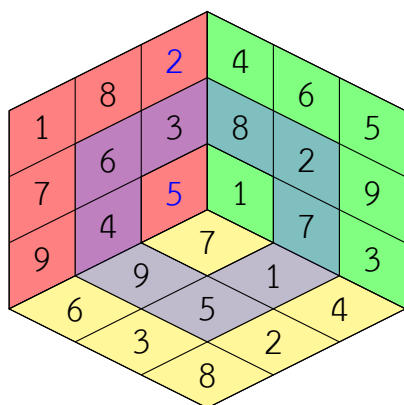
กรณีที่ 19



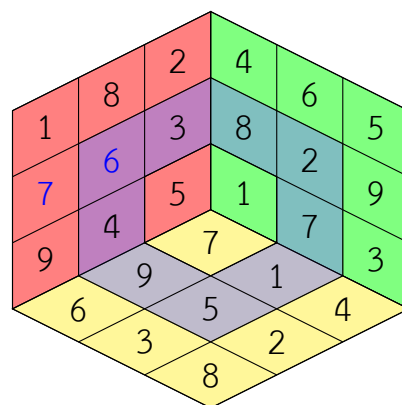
กรณีที่ 20



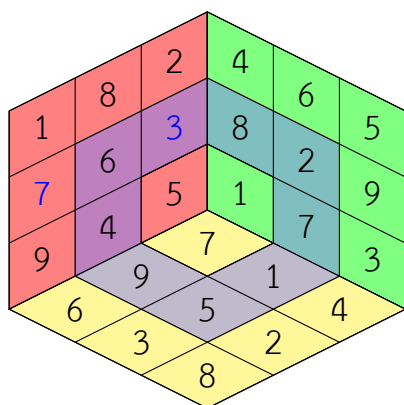
กรณีที่ 21



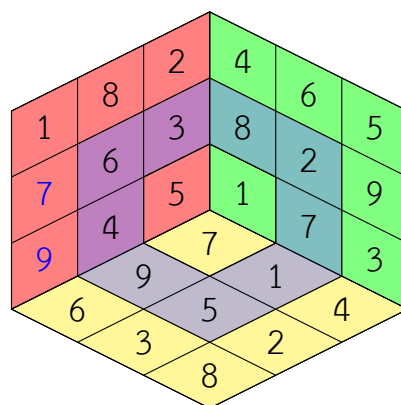
กรณีที่ 22



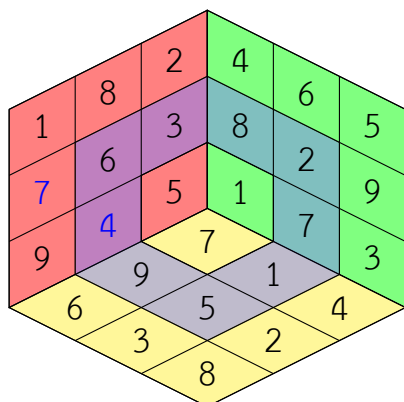
กรณีี่ 23



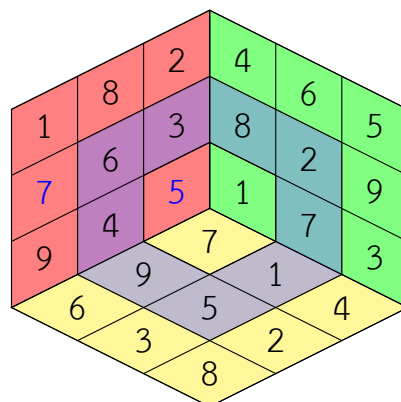
กรณีี่ 24



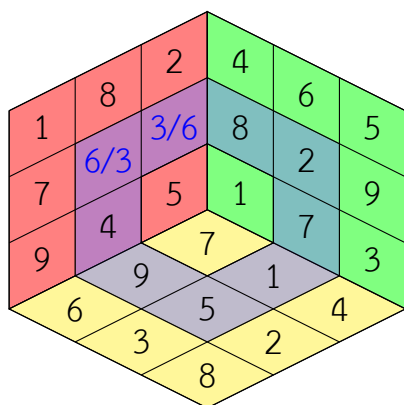
กรณีี่ 25



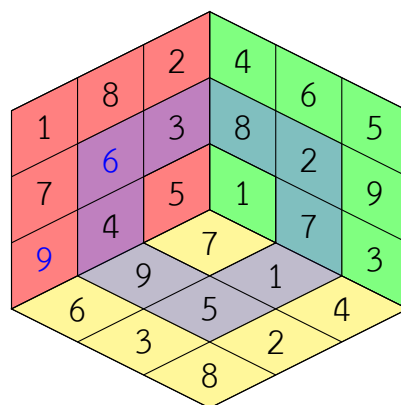
กรณีี่ 26



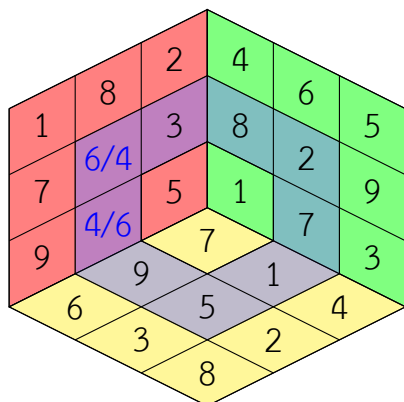
กรณีี่ 27



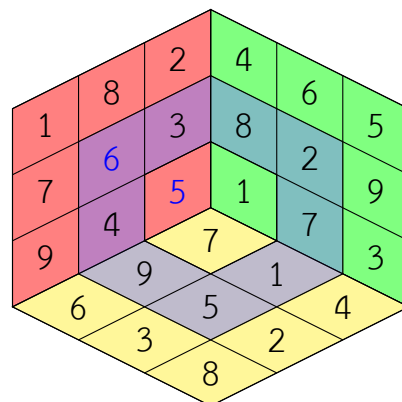
กรณีี่ 28



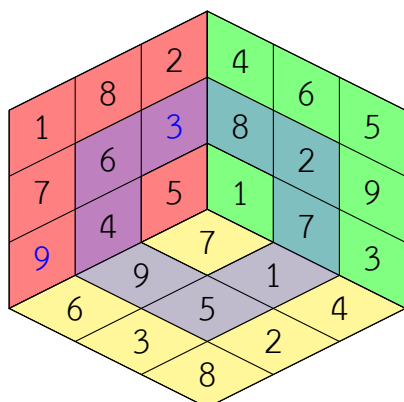
กรณีี่ 29



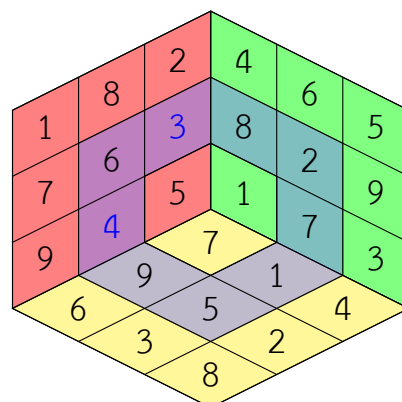
กรณีี่ 30



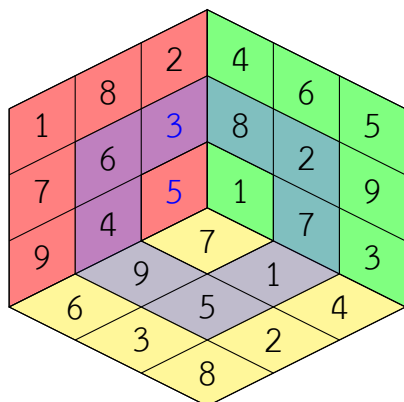
กรณีี่ 31



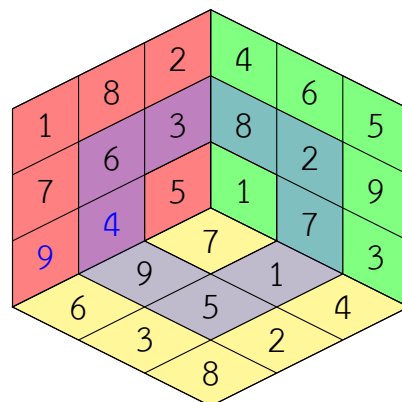
กรณีี่ 32



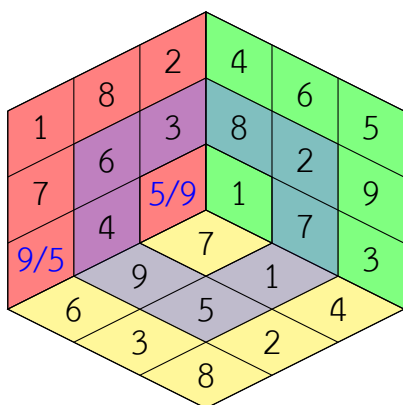
กรณีี่ 33



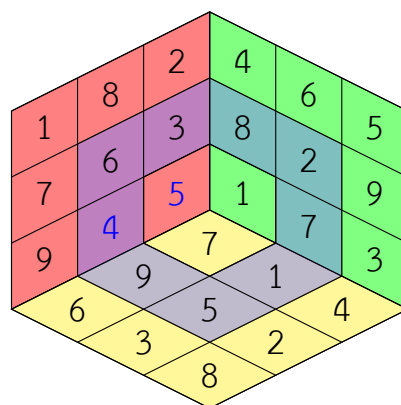
กรณีี่ 34



กรณี 35



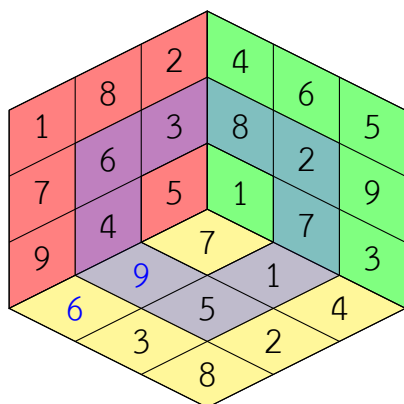
กรณี 36



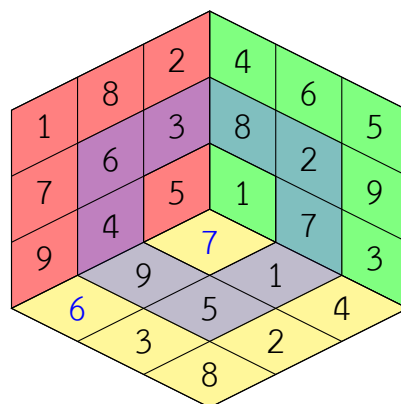
นั่นคือ จากตัวอย่าง 37 จะได้ว่า $n(7, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 31 กรณีจาก 36 กรณี

ตัวอย่าง 38 $n(R, Y, G) = n(9, 7, 9)$ และเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

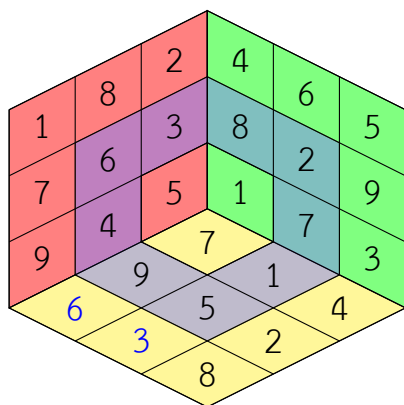
กรณีที่ 1



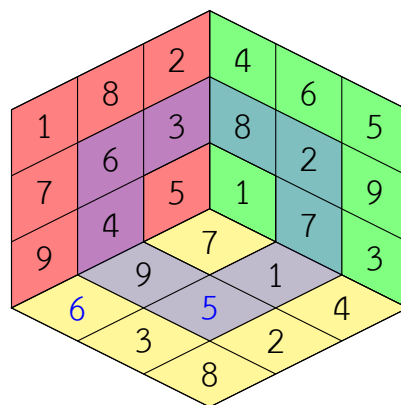
กรณีที่ 2



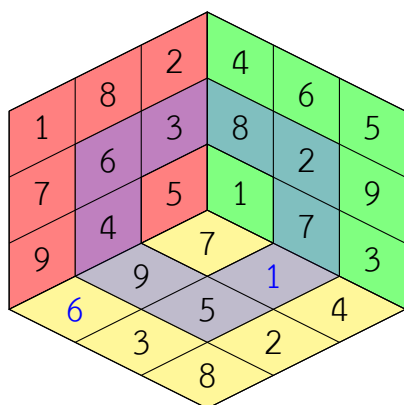
กรณีที่ 3



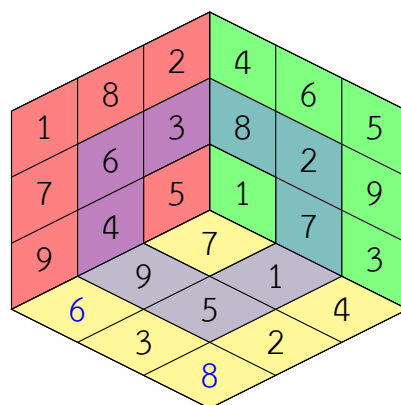
กรณีที่ 4



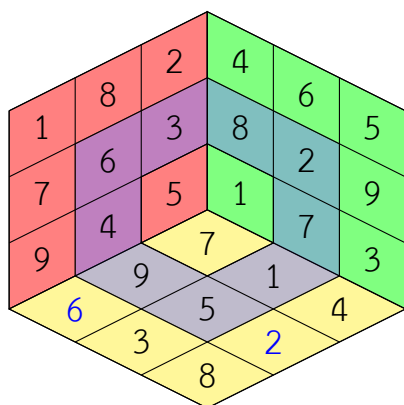
กรณีที่ 5



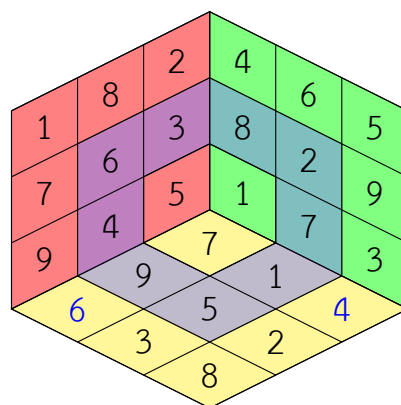
กรณีที่ 6



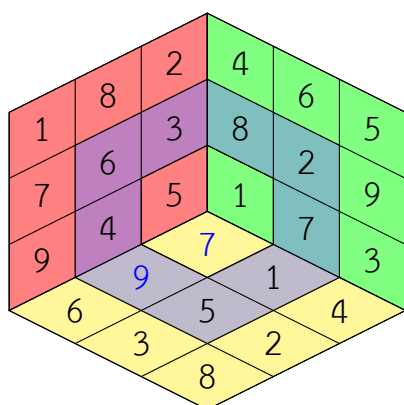
กรณีที่ 7



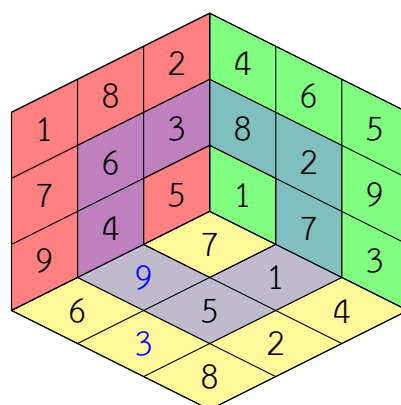
กรณีที่ 8



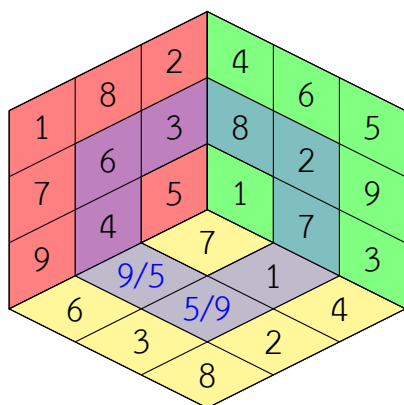
กรณีที่ 9



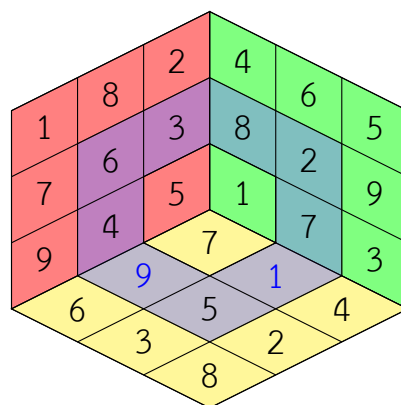
กรณีที่ 10



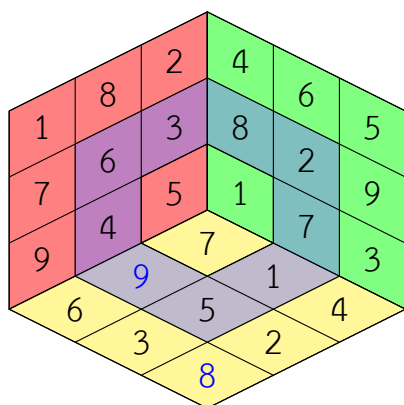
กรณีที่ 11



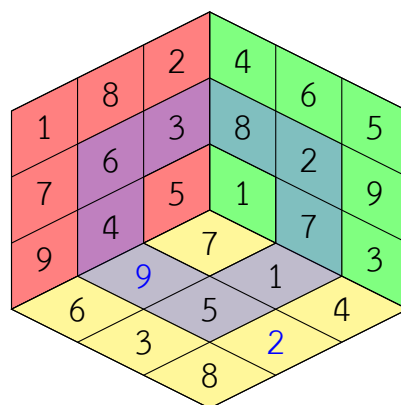
กรณีที่ 12



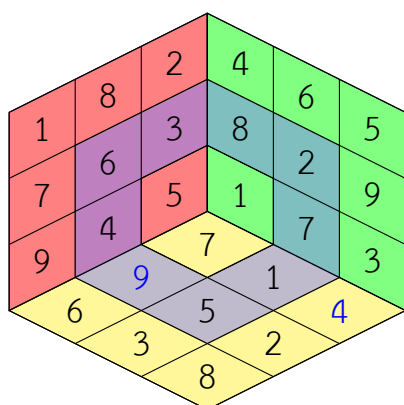
กรณีที่ 13



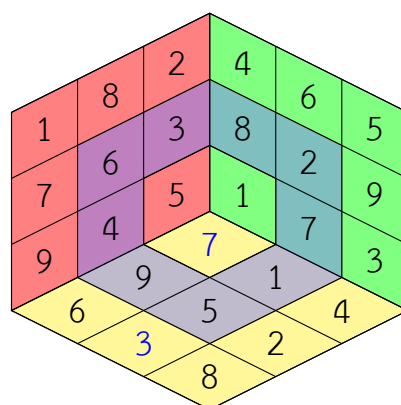
กรณีที่ 14



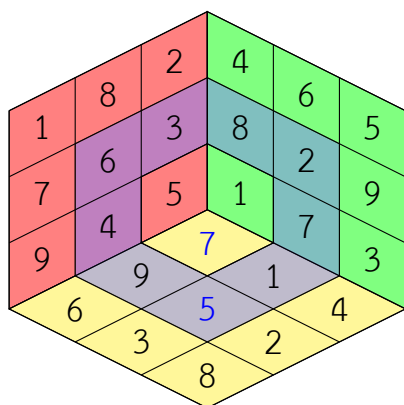
กรณีที่ 15



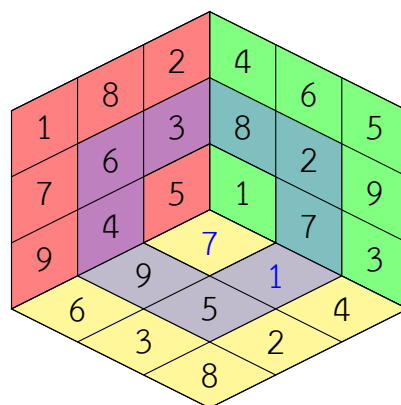
กรณีที่ 16



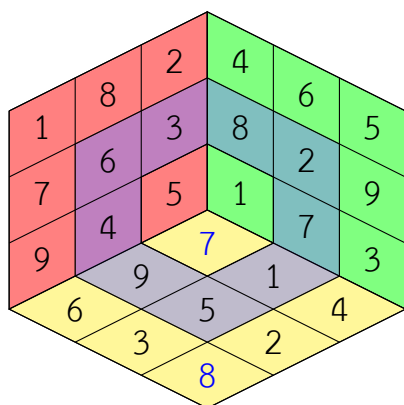
กรณีที่ 17



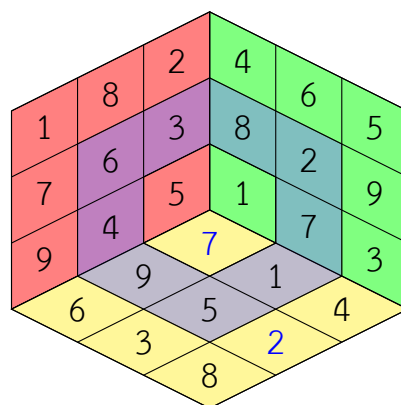
กรณีที่ 18



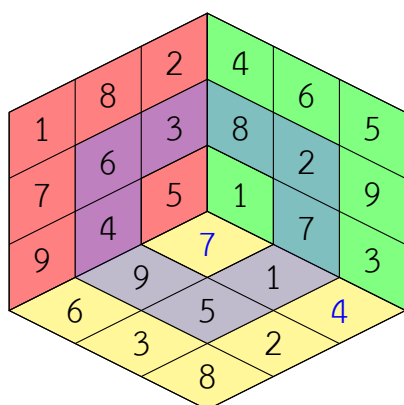
กรณีที่ 19



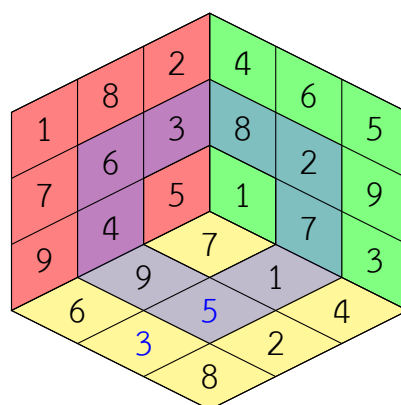
กรณีที่ 20



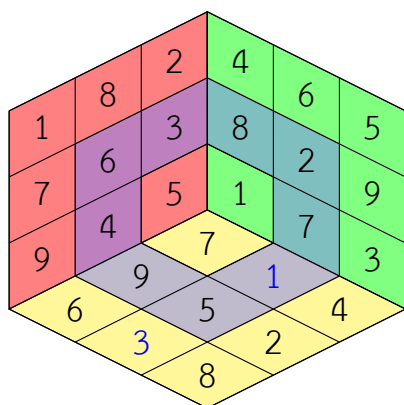
กรณีที่ 21



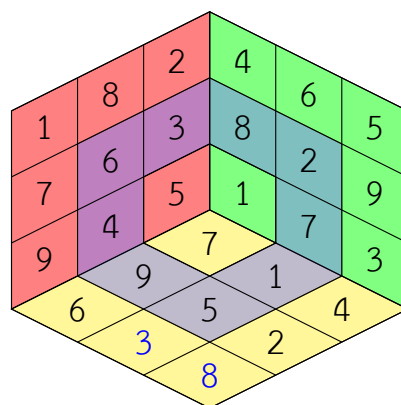
กรณีที่ 22



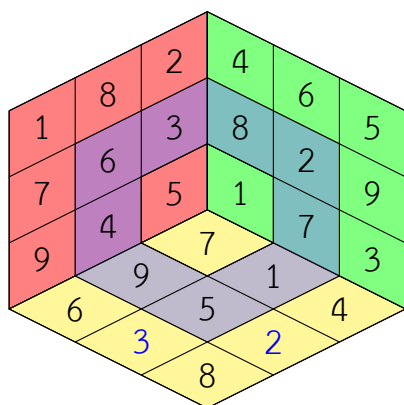
กรณีที่ 23



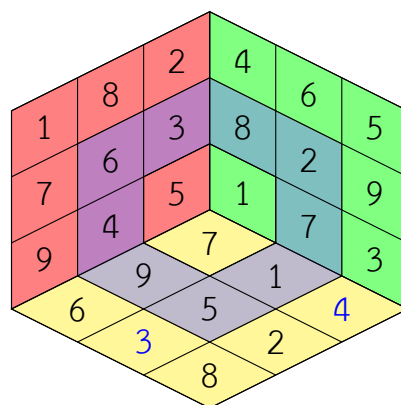
กรณีที่ 24



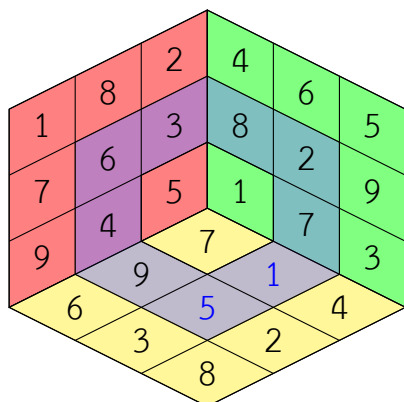
กรณีี่ที่ 25



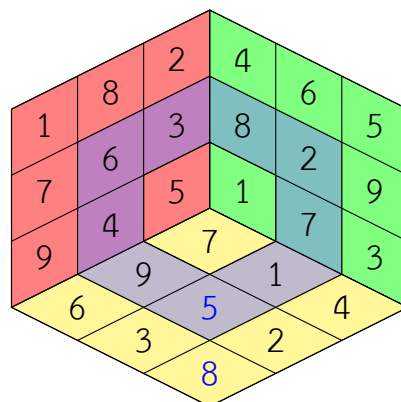
กรณีี่ที่ 26



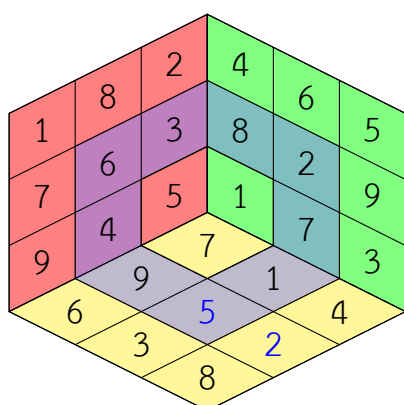
กรณีี่ที่ 27



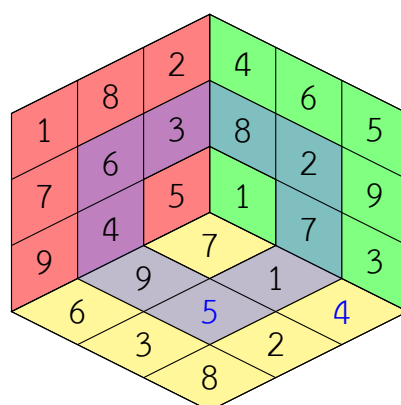
กรณีี่ที่ 28



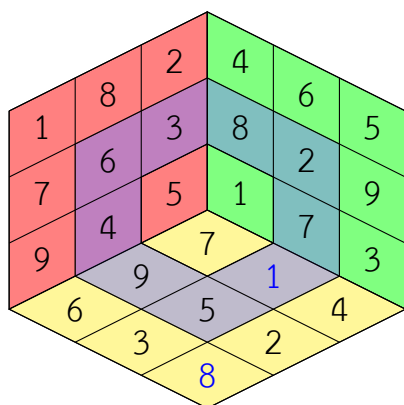
กรณีี่ที่ 29



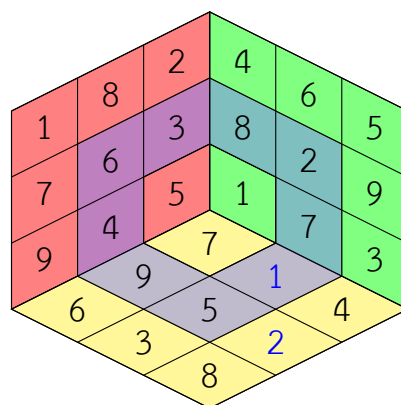
กรณีี่ที่ 30



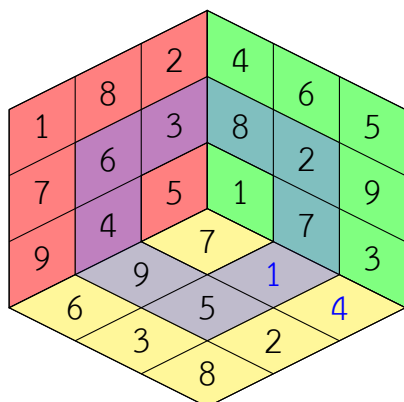
กรณีี่ 31



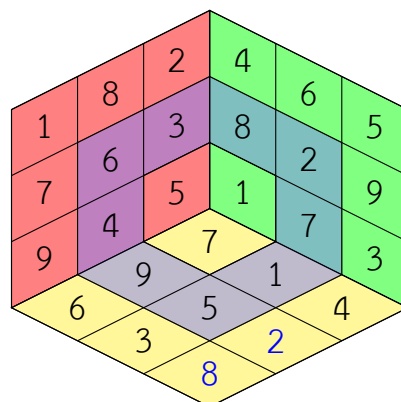
กรณีี่ 32



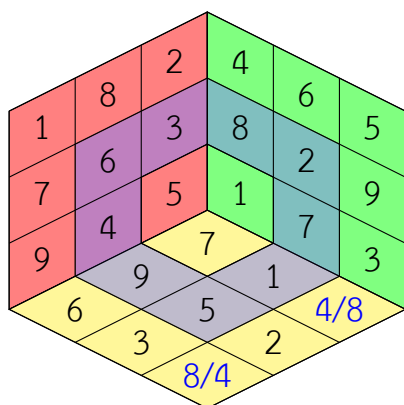
กรณีี่ 33



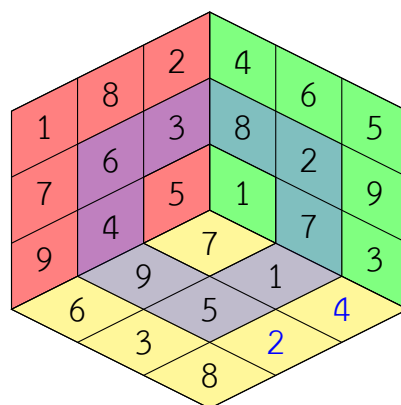
กรณีี่ 34



กรณีี่ 35



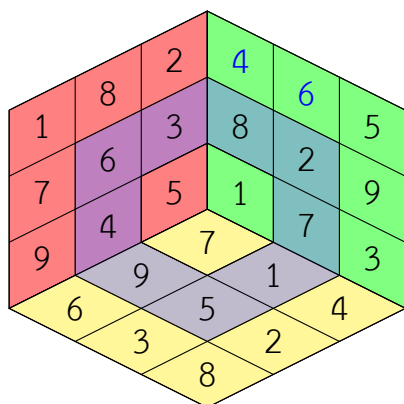
กรณีี่ 36



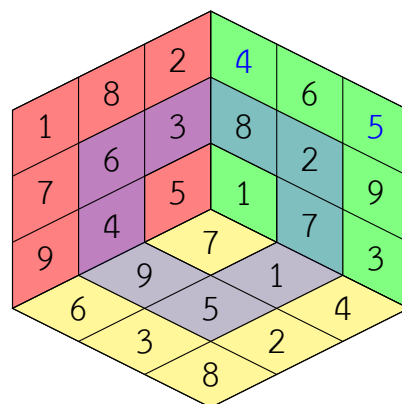
นั่นคือ จากตัวอย่าง 38 จะได้ว่า $n(9, 7, 9)$ มีคำตอบเดียว 34 กรณีจาก 36 กรณี

ตัวอย่าง 39 $n(R, Y, G) = n(9, 9, 7)$ และเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

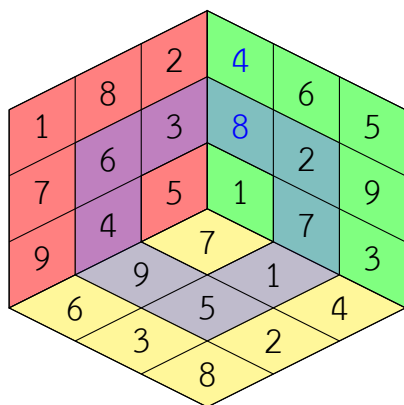
กรณีที่ 1



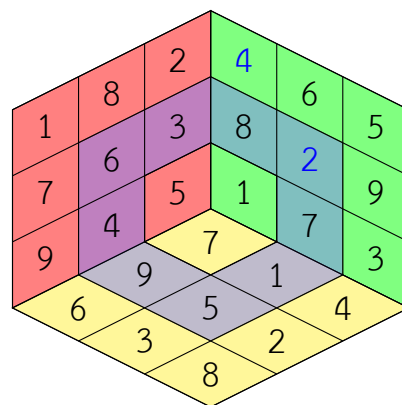
กรณีที่ 2



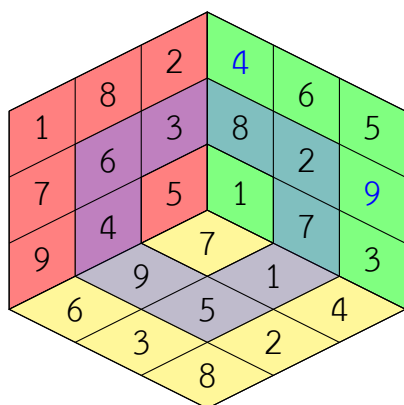
กรณีที่ 3



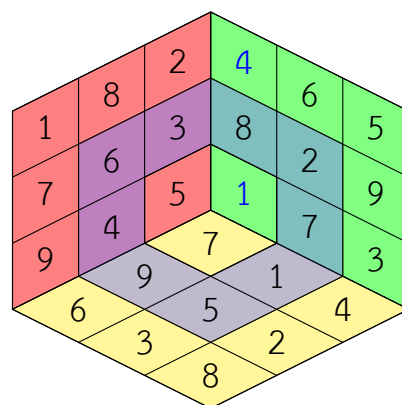
กรณีที่ 4



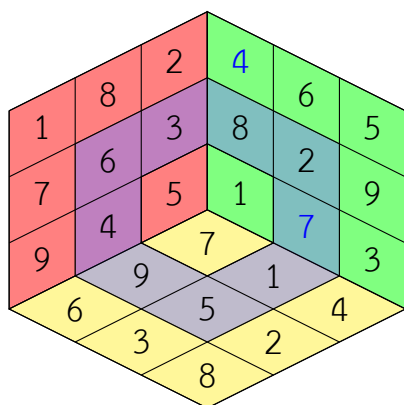
กรณีที่ 5



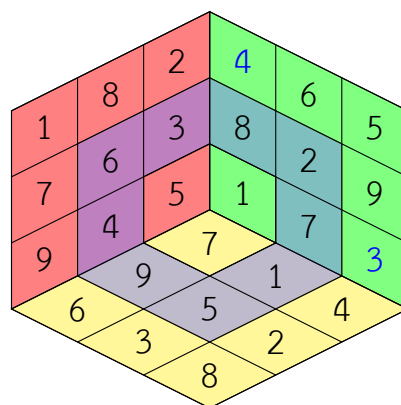
กรณีที่ 6



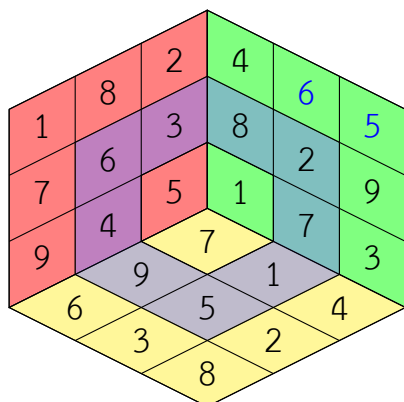
กรณีที่ 7



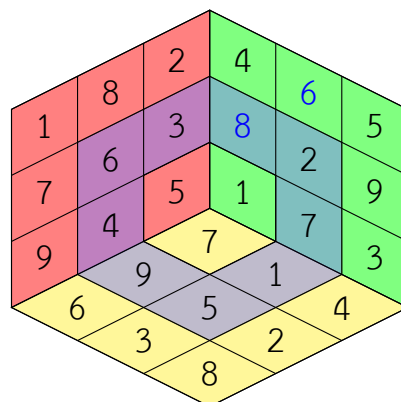
กรณีที่ 8



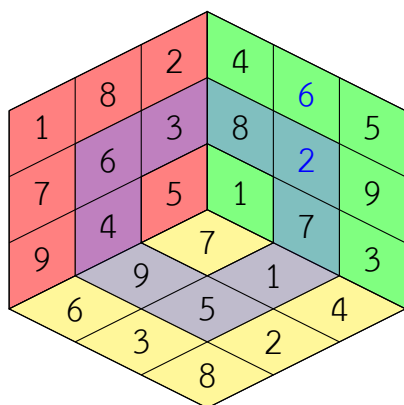
กรณีที่ 9



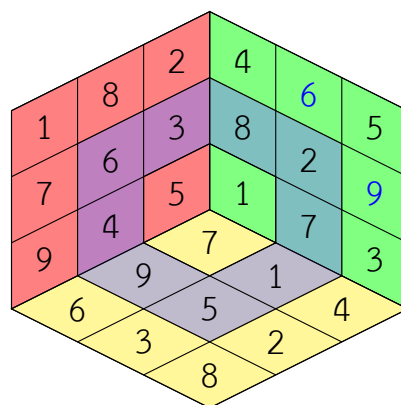
กรณีที่ 10



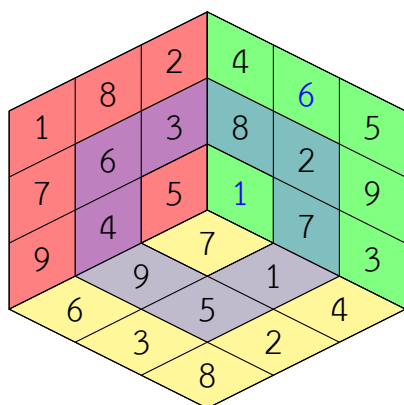
กรณีที่ 11



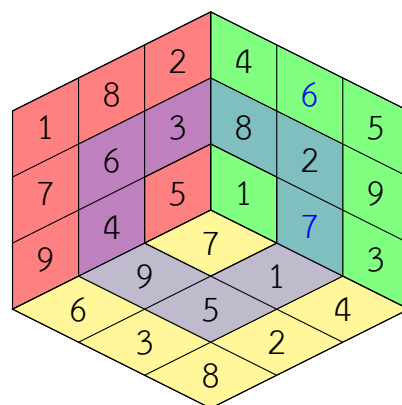
กรณีที่ 12



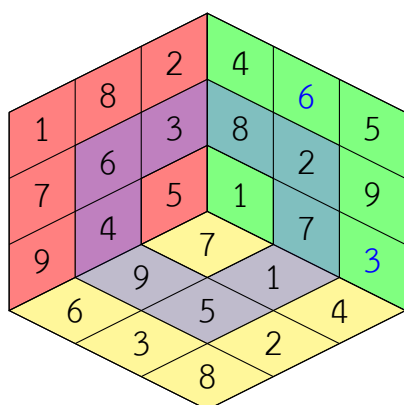
กรณี 13



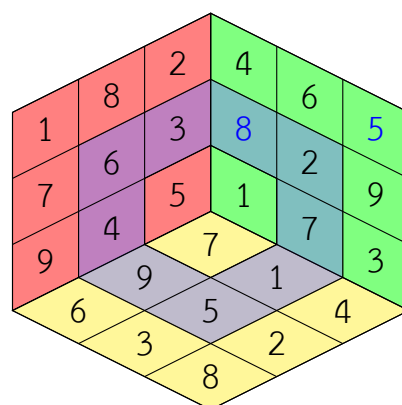
กรณี 14



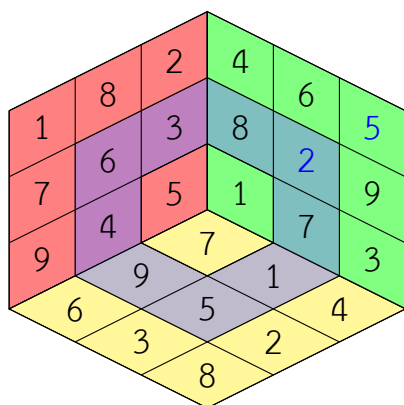
กรณี 15



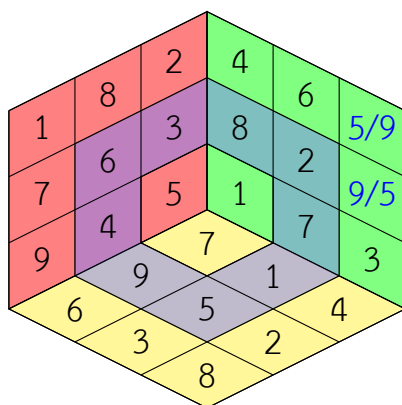
กรณี 16



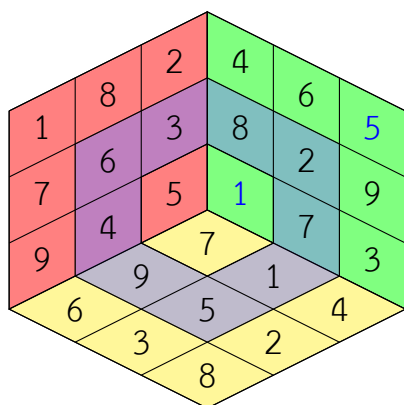
กรณี 17



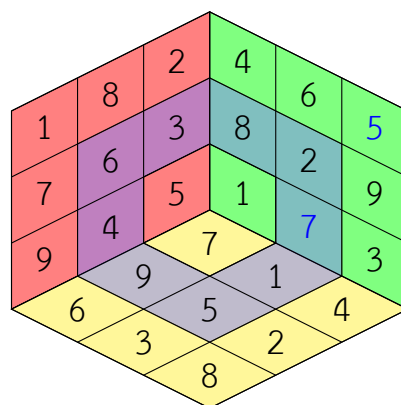
กรณี 18



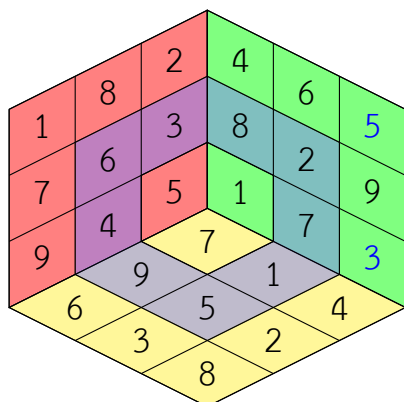
กรณี ที่ 19



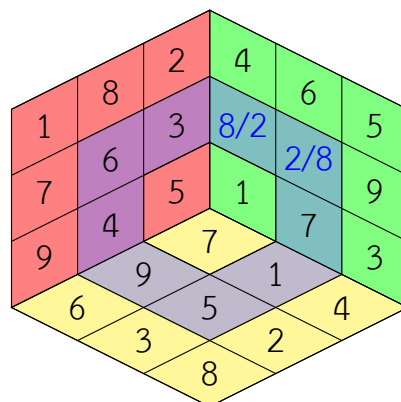
กรณี ที่ 20



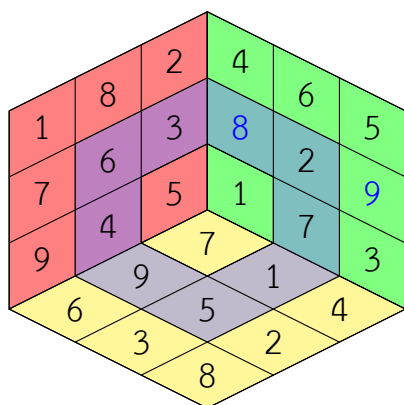
กรณี ที่ 21



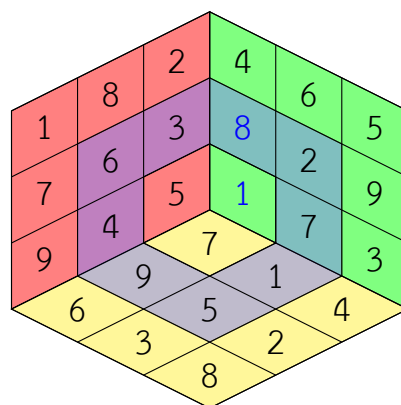
กรณี ที่ 22



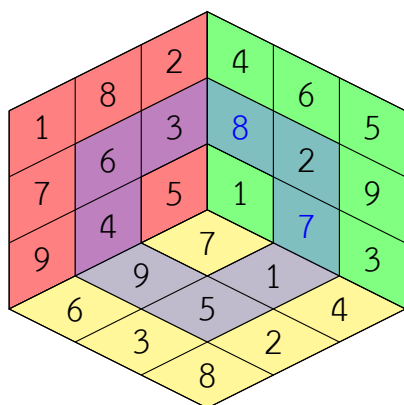
กรณี ที่ 23



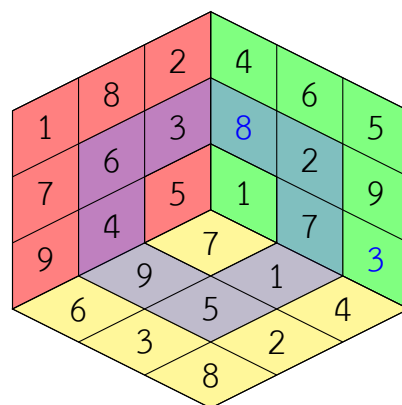
กรณี ที่ 24



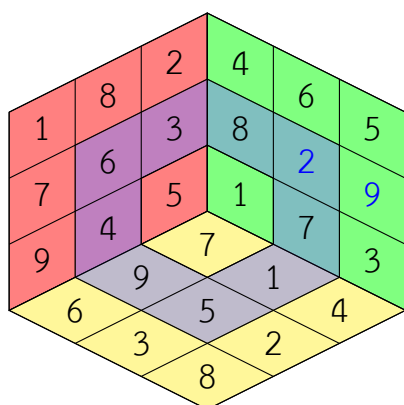
กรณี ที่ 25



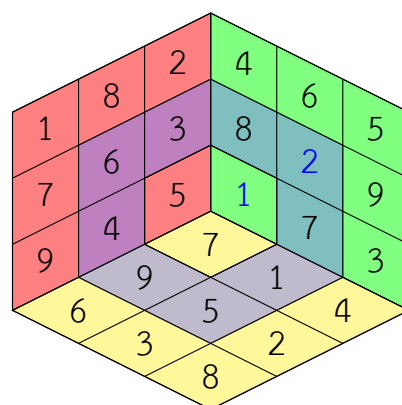
กรณี ที่ 26



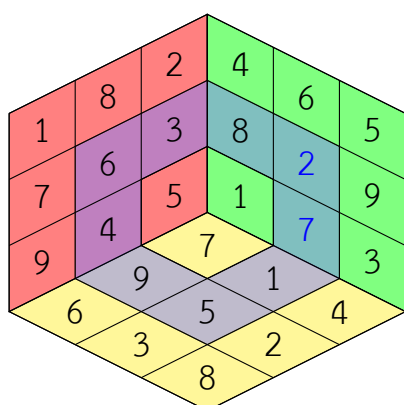
กรณี ที่ 27



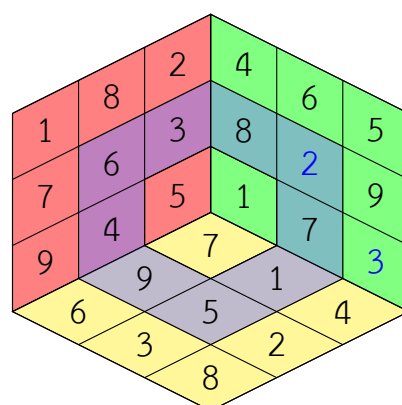
กรณี ที่ 28



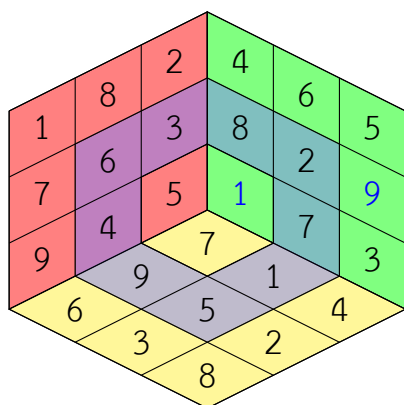
กรณี ที่ 29



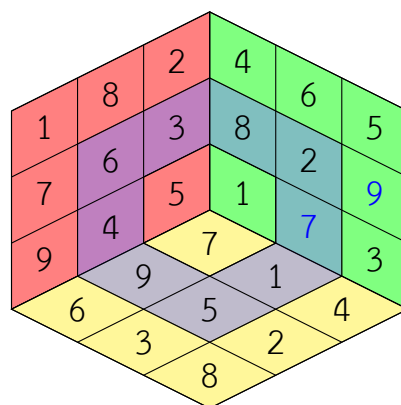
กรณี ที่ 30



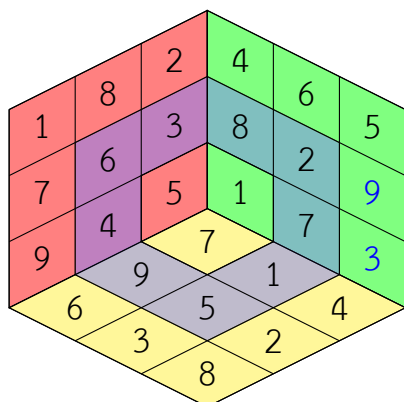
กรณีที่ 31



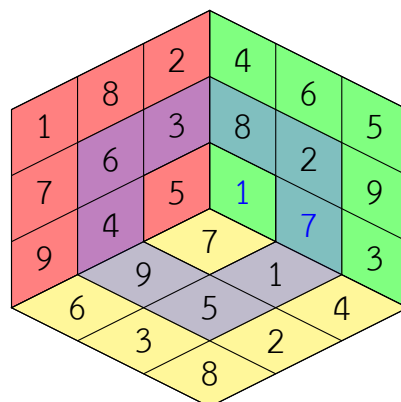
กรณีที่ 32



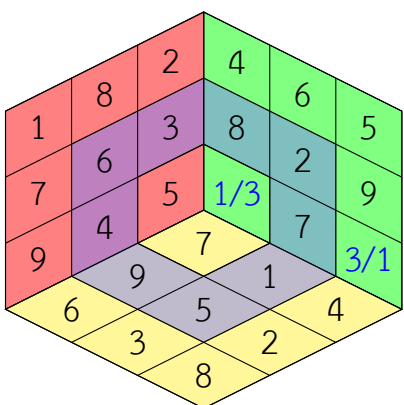
กรณีที่ 33



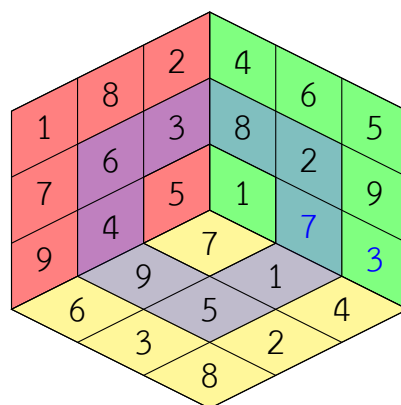
กรณีที่ 34



กรณีที่ 35



กรณีที่ 36



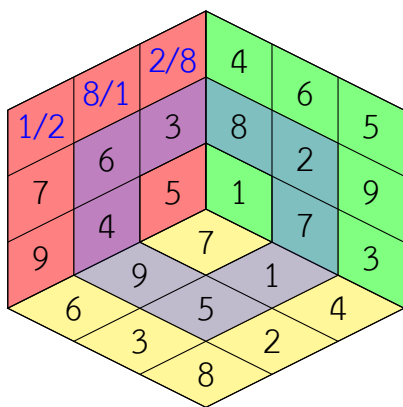
นั่นคือ จากตัวอย่าง 39 จะได้ว่า $n(9, 9, 7)$ มีคำตอบเดียว 33 กรณีจาก 36 กรณี
สรุปได้ว่า จาก $n(7, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 31 กรณี, $n(9, 7, 9)$ มีคำตอบเดียว 34 กรณี และ $n(9, 9, 7)$
มีคำตอบเดียว 33 กรณี
ดังนั้นรูปแบบ $(7, 9, 9)$ จะมีคำตอบเดียว 98 กรณีจาก 108 กรณี

4.6 พิจารณารูปแบบ (6, 9, 9)

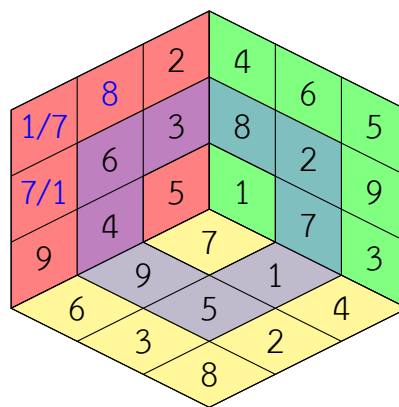
จะทำการลบทีละ 3 ช่อง เพื่อทำการหาคำตอบเดียวที่ได้จากการเติมช่องว่าง หากได้คำตอบมากกว่า 1 คำตอบจะไม่ทำการพิจารณากรณีนั้นต่อ นั่นคือรูปแบบ (6, 9, 9) จะมีทั้งหมด 252 กรณี โดยที่ $n(6, 9, 9)$ มี 84 กรณี, $n(9, 6, 9)$ มี 84 กรณี และ $n(9, 9, 6)$ มี 84 กรณี แต่จากการพิจารณารูปแบบ (7, 9, 9) กรณีใดที่มีจำนวนคำตอบมากกว่า 1 จะไม่นำมาพิจารณาต่อในรูปแบบ (6, 9, 9)

ตัวอย่าง 40 $n(R, Y, G) = n(6, 9, 9)$ โดยพิจารณาเพียง 73 กรณีจาก 84 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

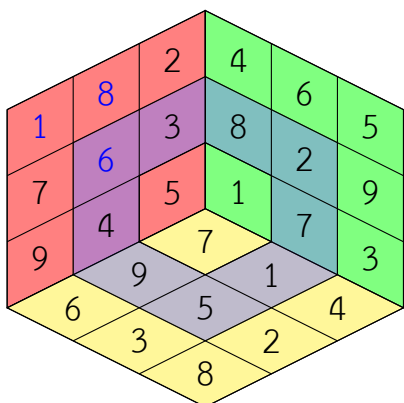
กรณีที่ 1



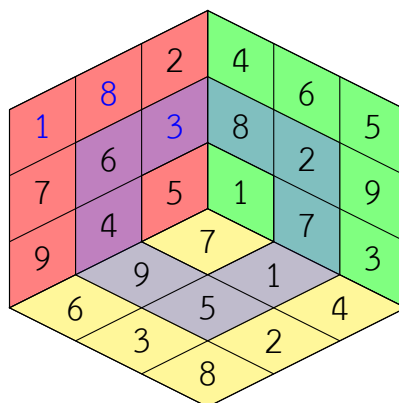
กรณีที่ 2



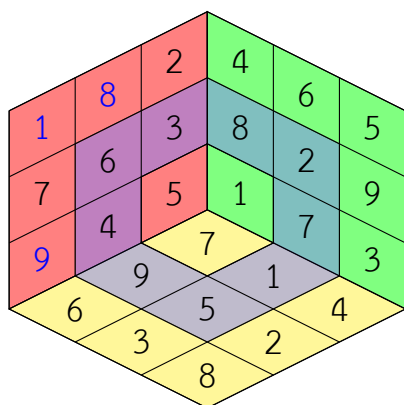
กรณีที่ 3



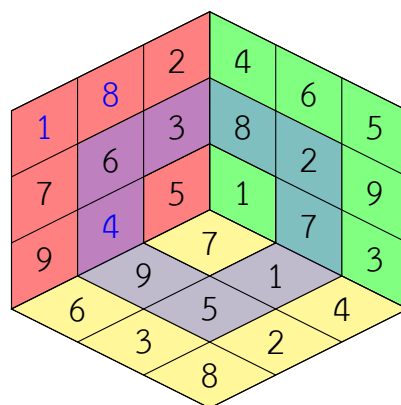
กรณีที่ 4



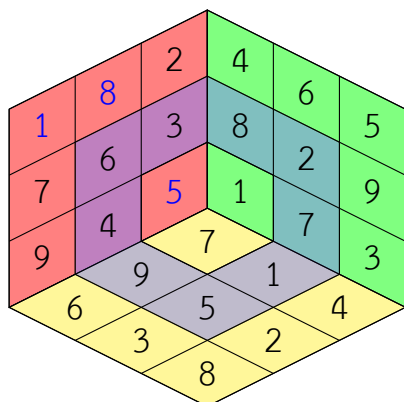
กรณีที่ 5



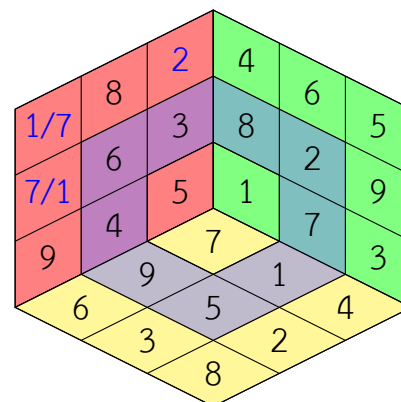
กรณีที่ 6



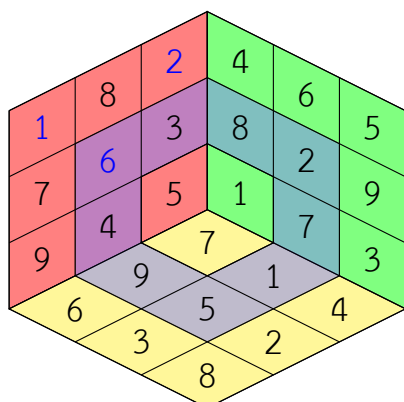
กรณีที่ 7



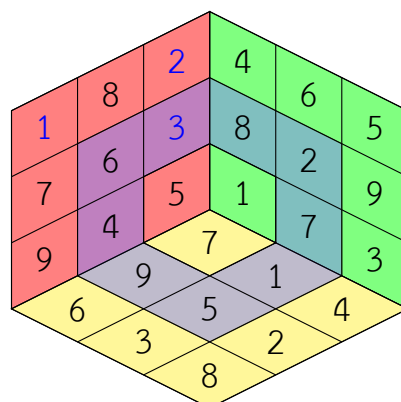
กรณีที่ 8



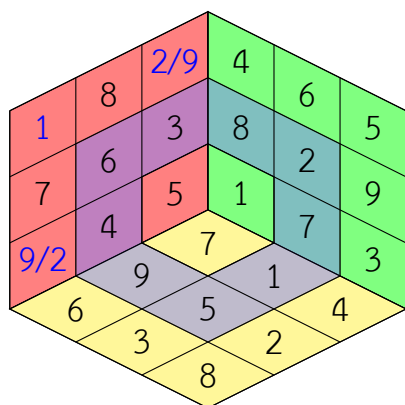
กรณีที่ 9



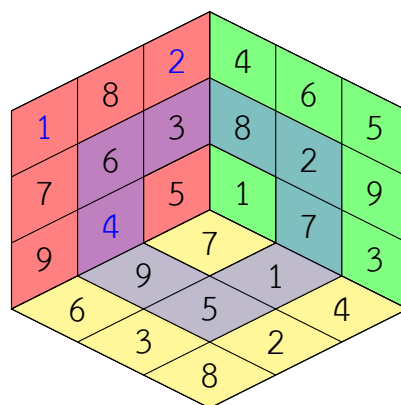
กรณีที่ 10



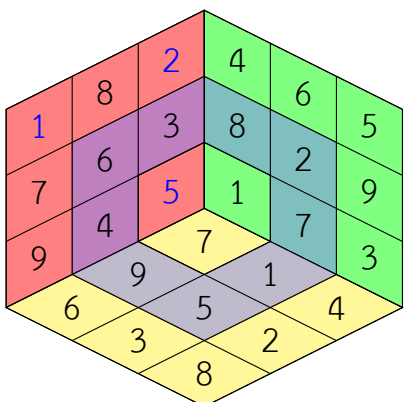
กรณีที่ 11



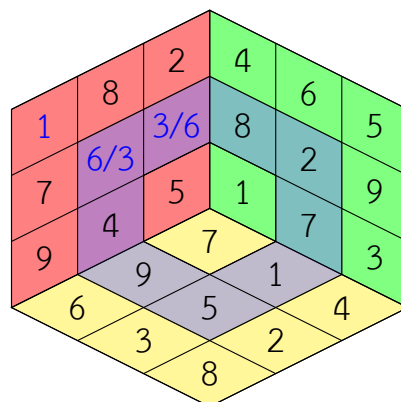
กรณีที่ 12



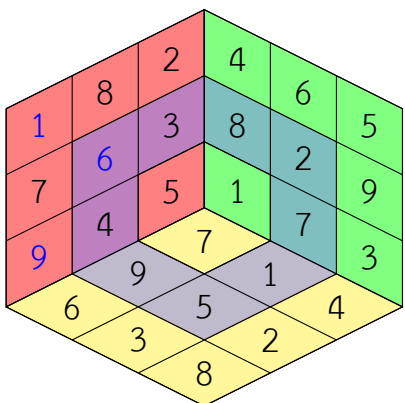
กรณีที่ 13



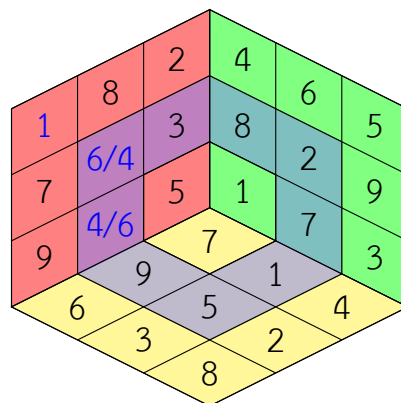
กรณีที่ 14



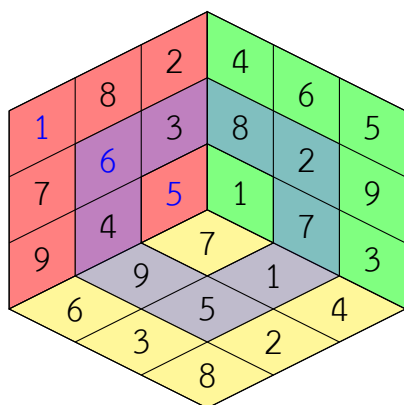
กรณีที่ 15



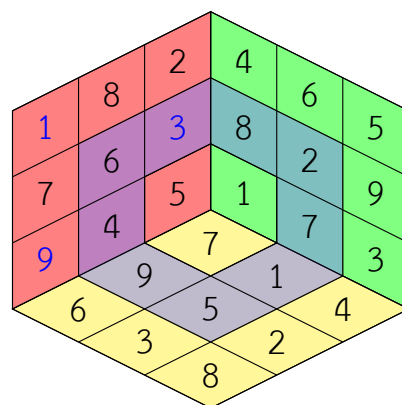
กรณีที่ 16



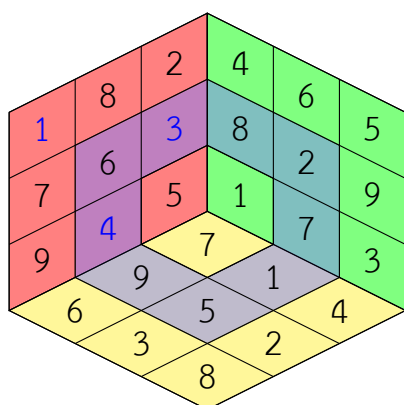
กรณีที่ 17



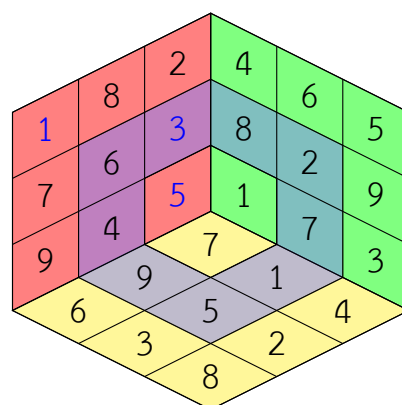
กรณีที่ 18



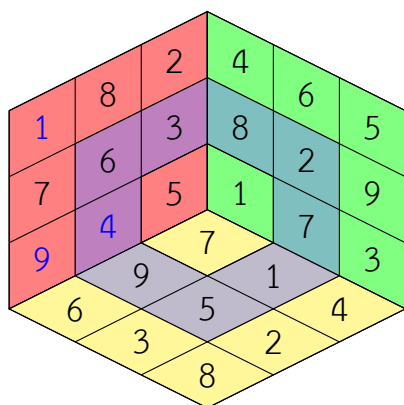
กรณีที่ 19



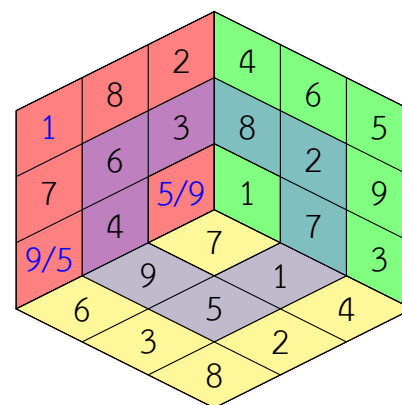
กรณีที่ 20



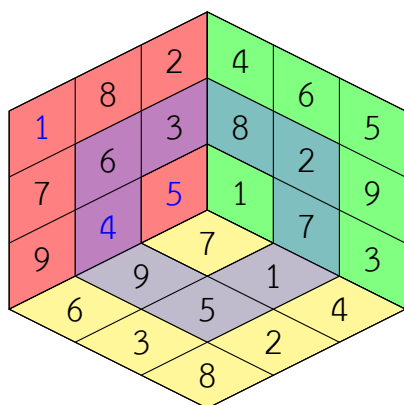
กรณีที่ 21



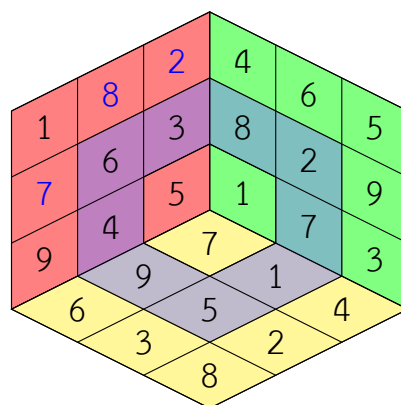
กรณีที่ 22



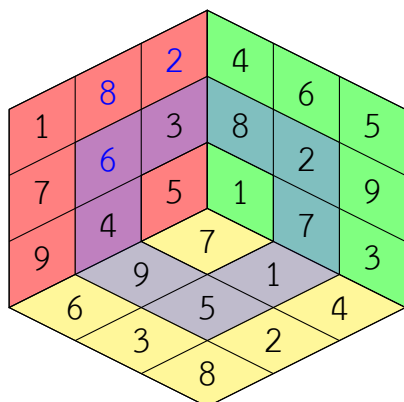
กรณีที่ 23



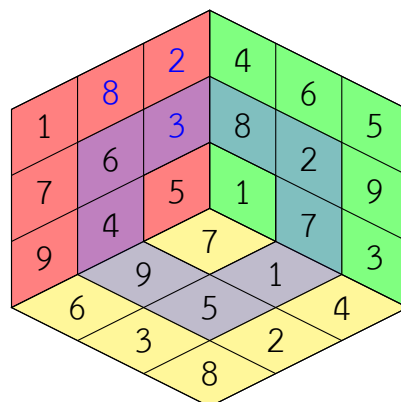
กรณีที่ 24



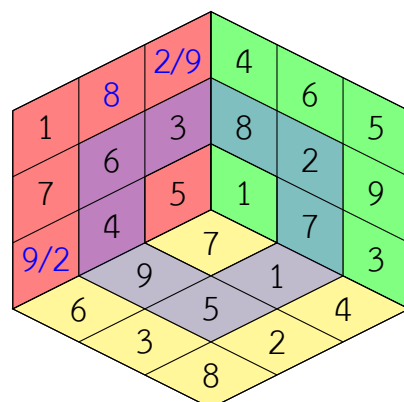
กรณีที่ 25



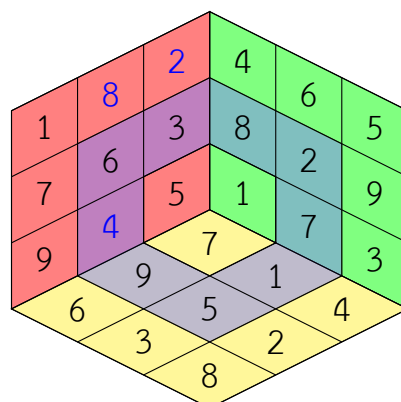
กรณีที่ 26



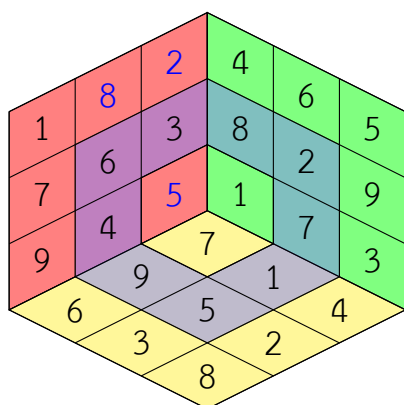
กรณีที่ 27



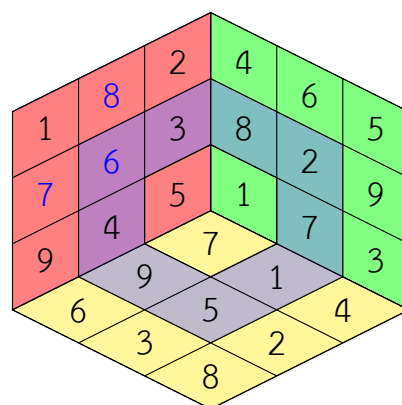
กรณีที่ 28



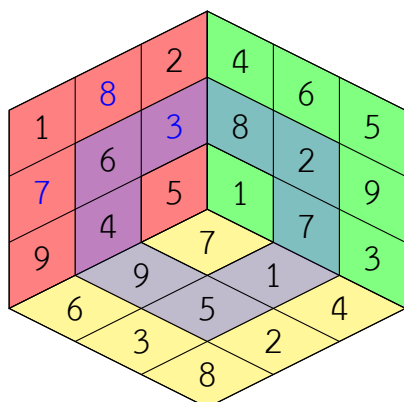
กรณีี่ 29



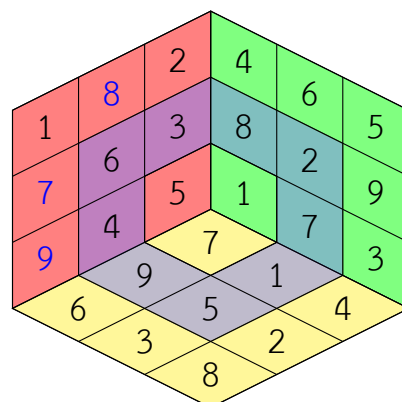
กรณีี่ 30



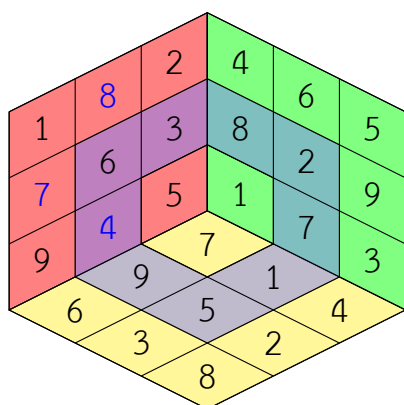
กรณีี่ 31



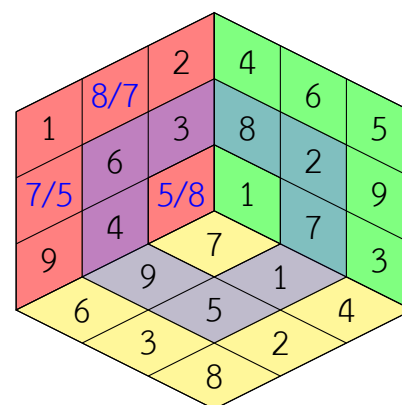
กรณีี่ 32



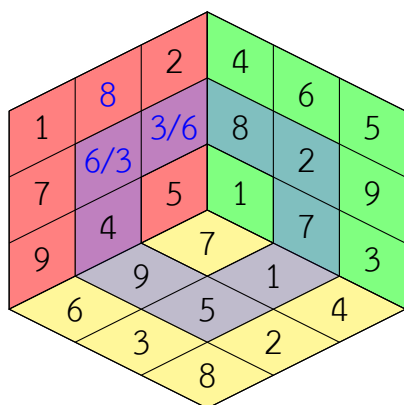
กรณีี่ 33



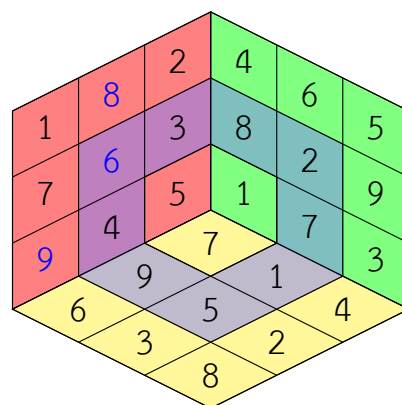
กรณีี่ 34



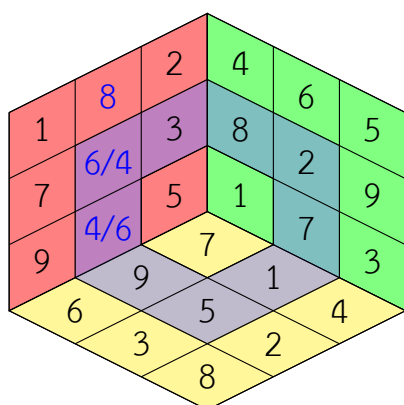
กรณีี่ 35



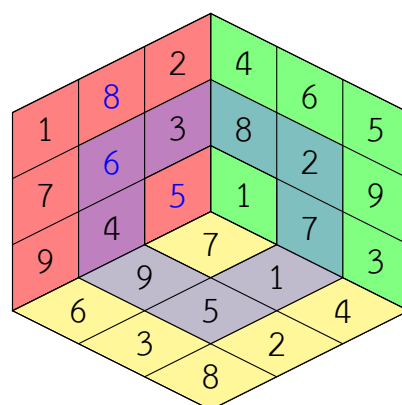
กรณีี่ 36



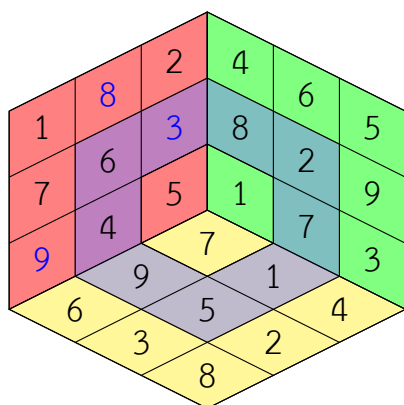
กรณีี่ 37



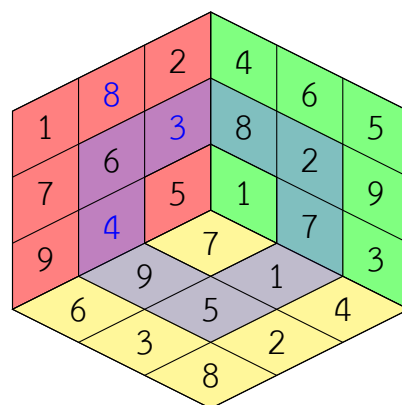
กรณีี่ 38



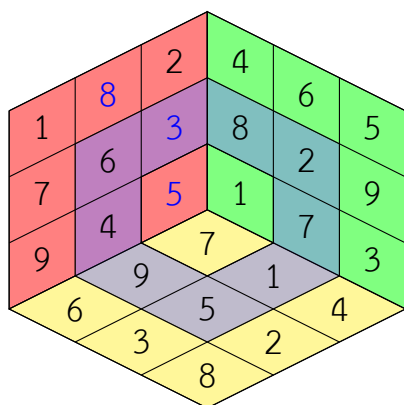
กรณีี่ 39



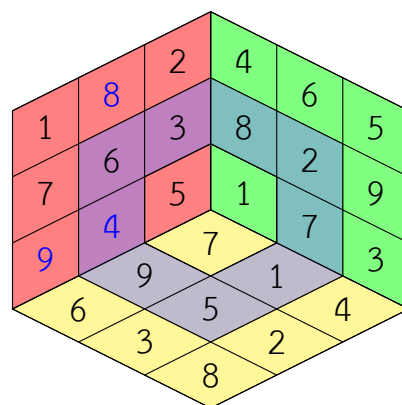
กรณีี่ 40



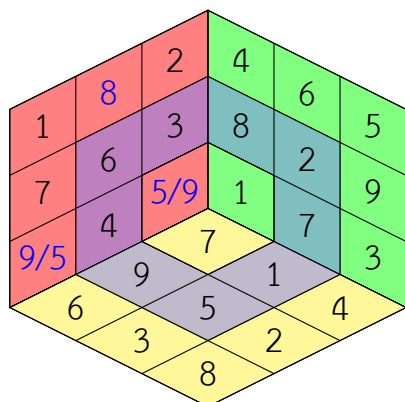
กรณีี่ที่ 41



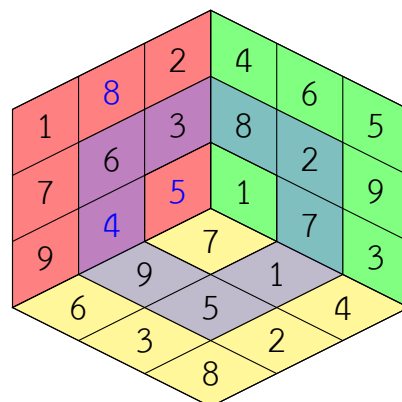
กรณีี่ที่ 42



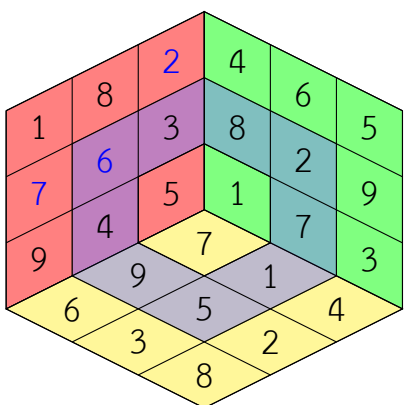
กรณีี่ที่ 43



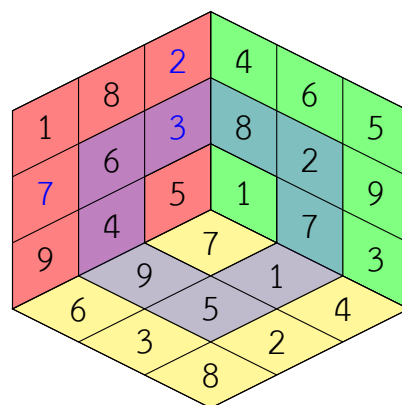
กรณีี่ที่ 44



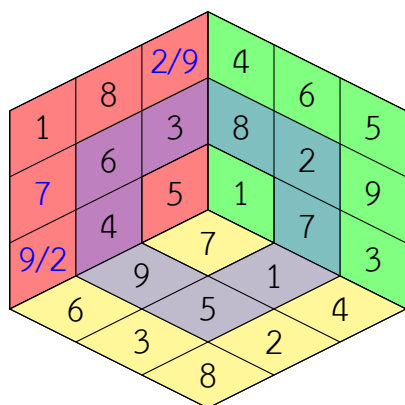
กรณีี่ที่ 45



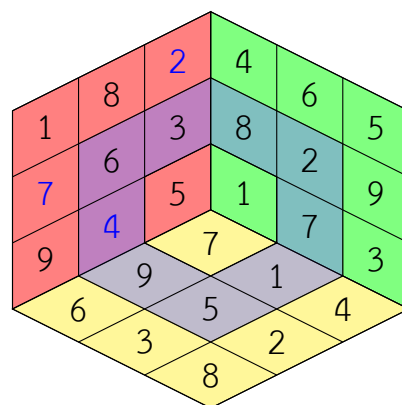
กรณีี่ที่ 46



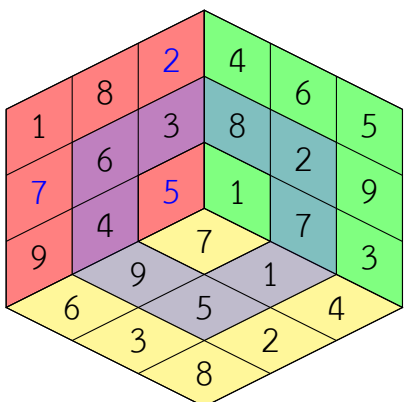
กรณีี่ที่ 47



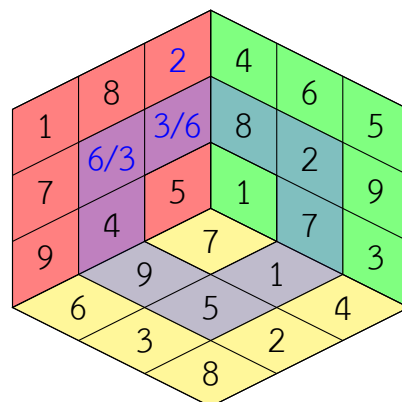
กรณีี่ที่ 48



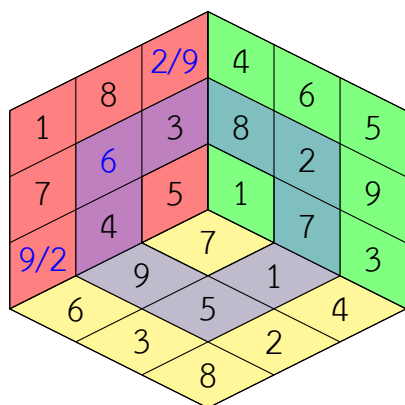
กรณีี่ที่ 49



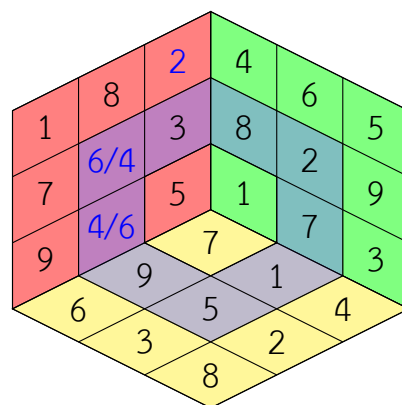
กรณีี่ที่ 50



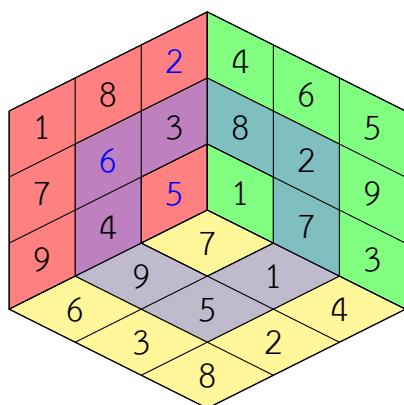
กรณีี่ที่ 51



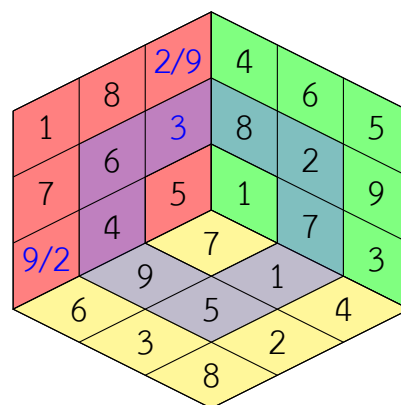
กรณีี่ที่ 52



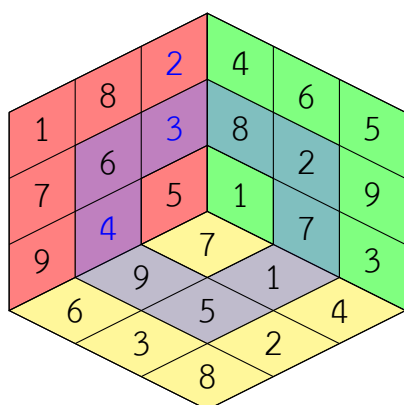
กรณีที่ 53



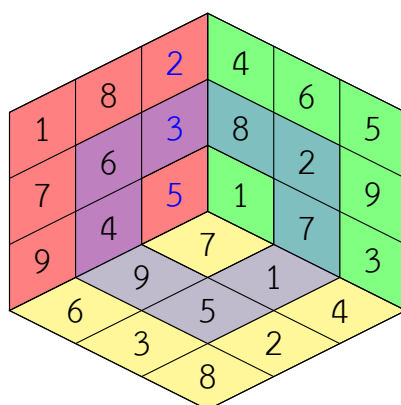
กรณีที่ 54



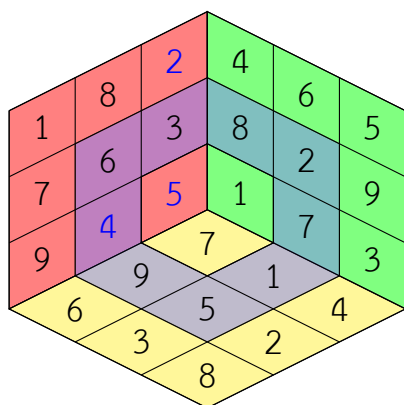
กรณีที่ 55



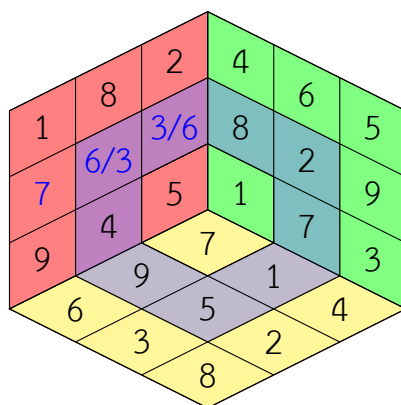
กรณีที่ 56



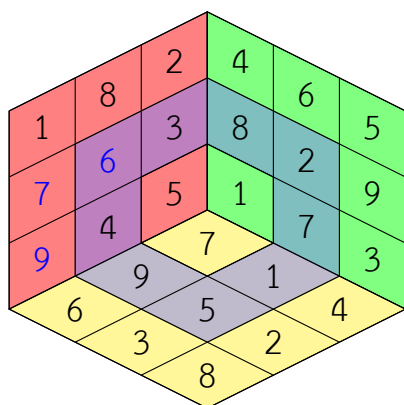
กรณีที่ 57



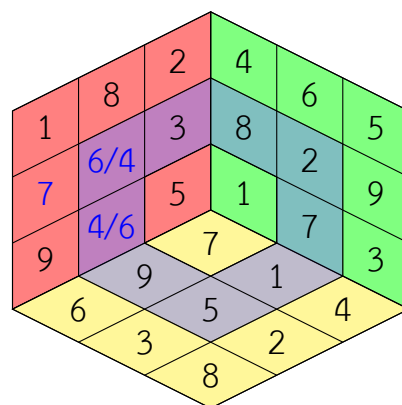
กรณีที่ 58



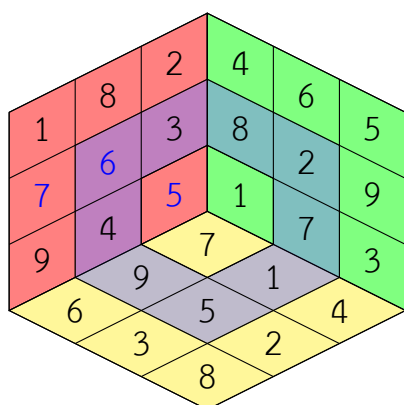
กรณีที่ 59



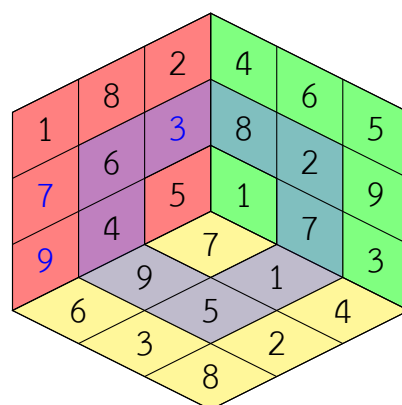
กรณีที่ 60



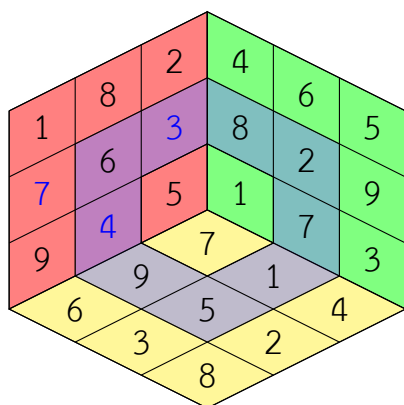
กรณีที่ 61



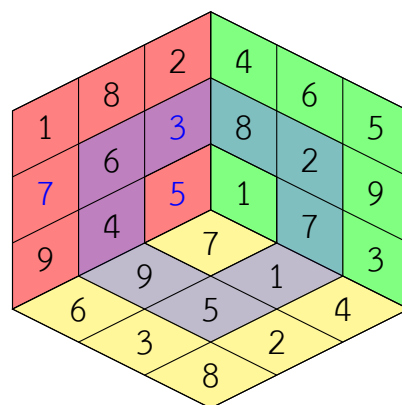
กรณีที่ 62



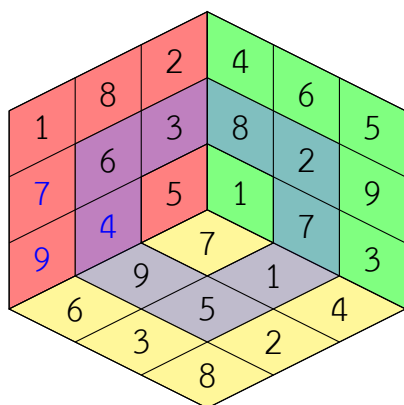
กรณีที่ 63



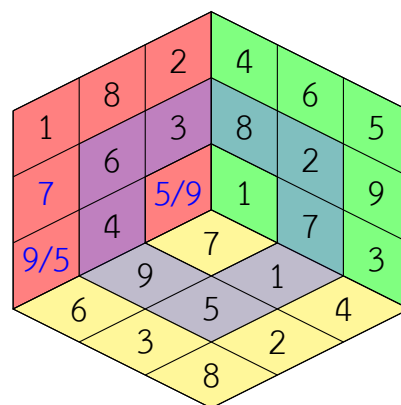
กรณีที่ 64



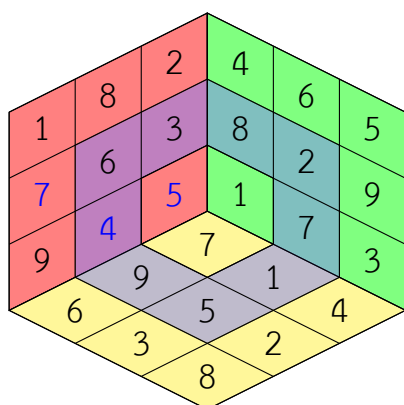
กรณีที่ 65



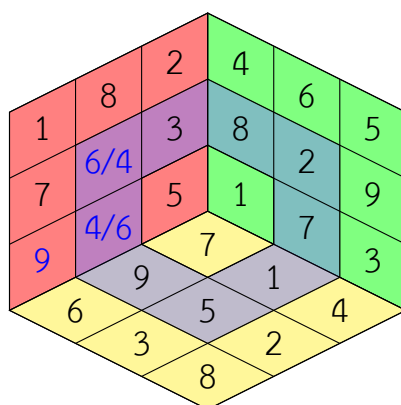
กรณีที่ 66



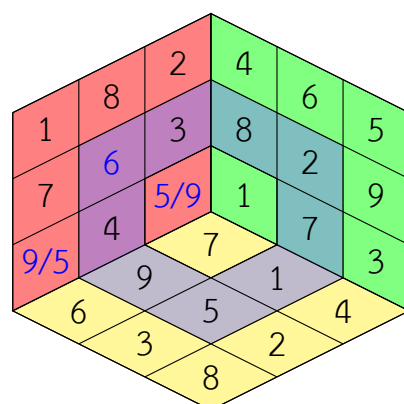
กรณีที่ 67



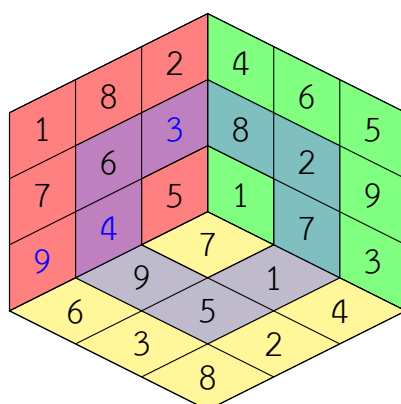
กรณีที่ 68



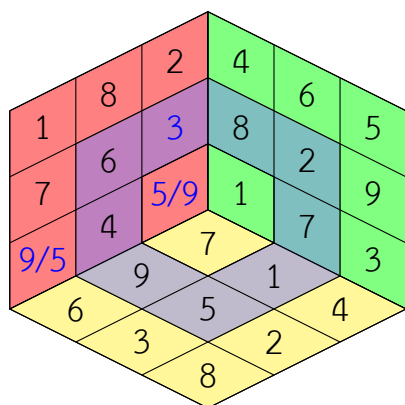
กรณีที่ 69



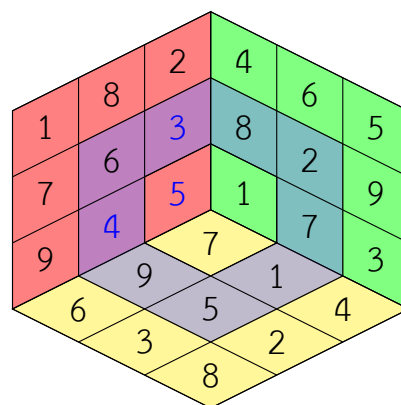
กรณีที่ 70



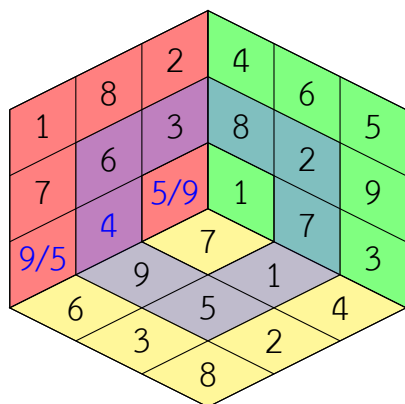
กรณีี่ 71



กรณีี่ 72



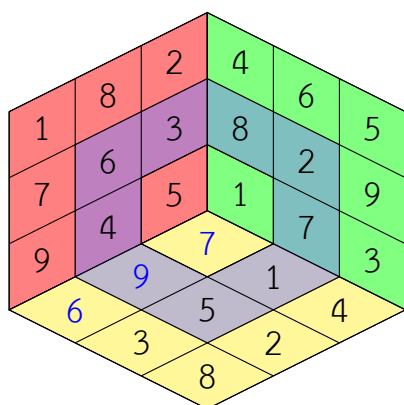
กรณีี่ 73



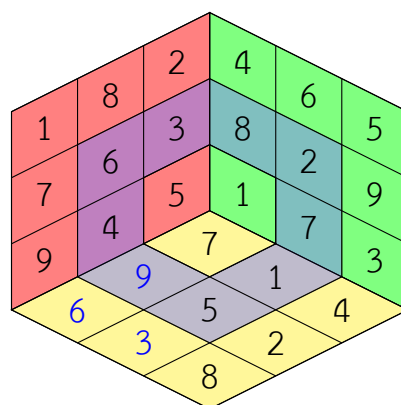
จากตัวอย่าง 40 จะได้ว่า $n(6, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 49 กรณีจาก 84 กรณี

ตัวอย่าง 41 $n(R, Y, G) = n(9, 6, 9)$ โดยพิจารณาเพียง 80 กรณีจาก 84 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

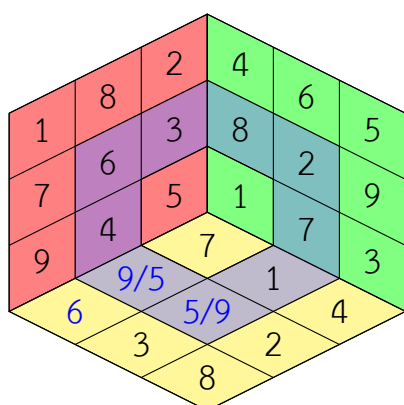
กรณีที่ 1



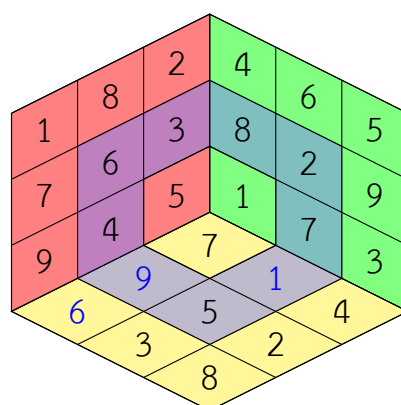
กรณีที่ 2



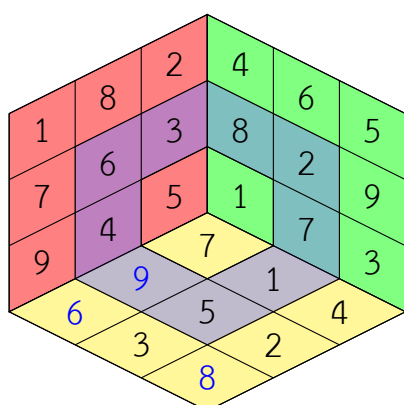
กรณีที่ 3



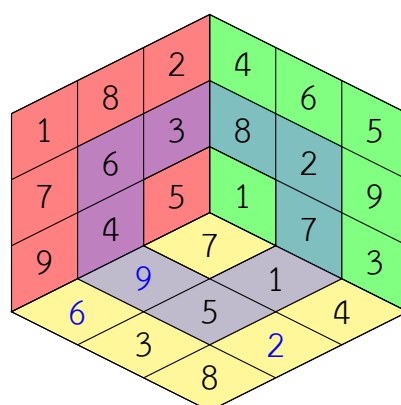
กรณีที่ 4



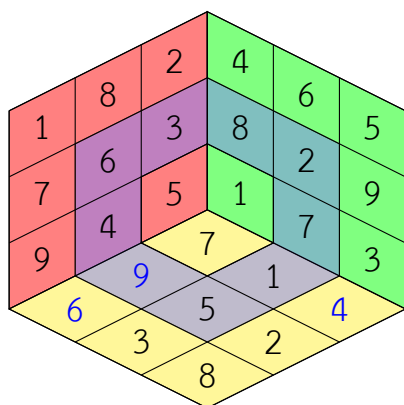
กรณีที่ 5



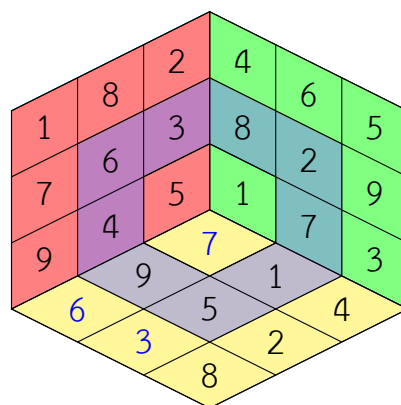
กรณีที่ 6



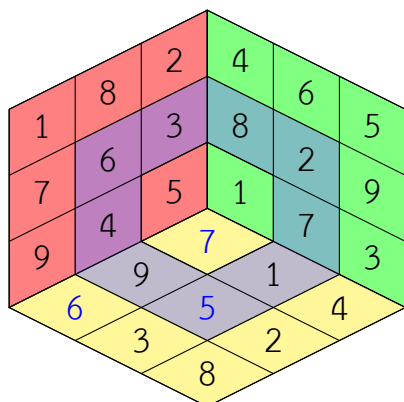
กรณีที่ 7



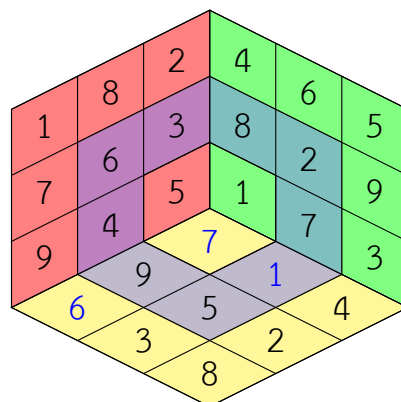
กรณีที่ 8



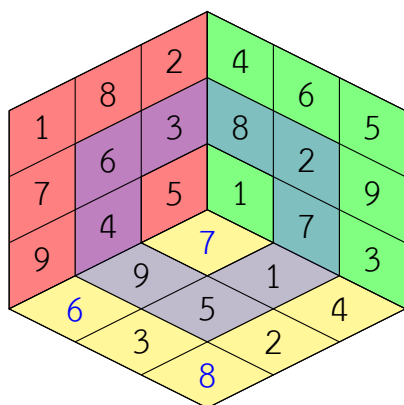
กรณีที่ 9



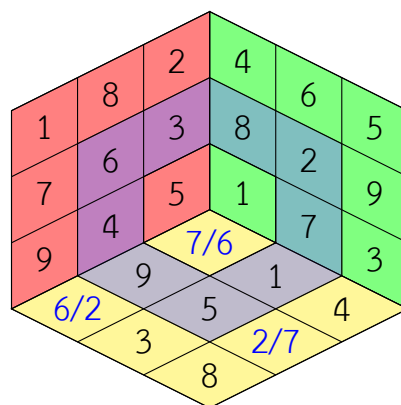
กรณีที่ 10



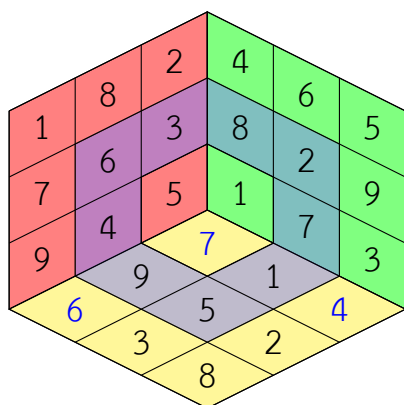
กรณีที่ 11



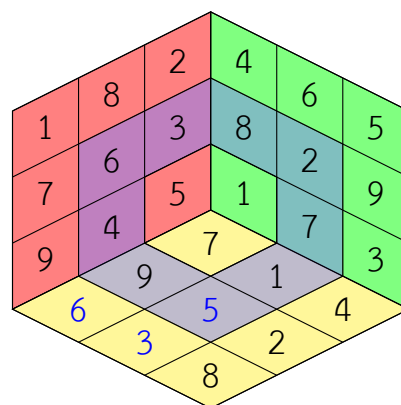
กรณีที่ 12



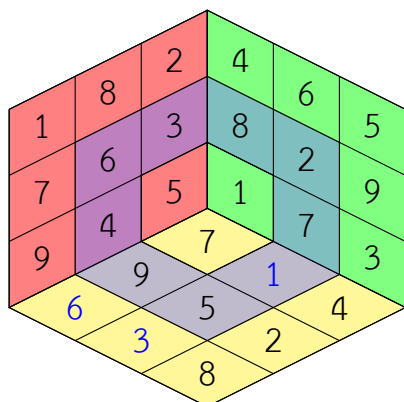
กรณีที่ 13



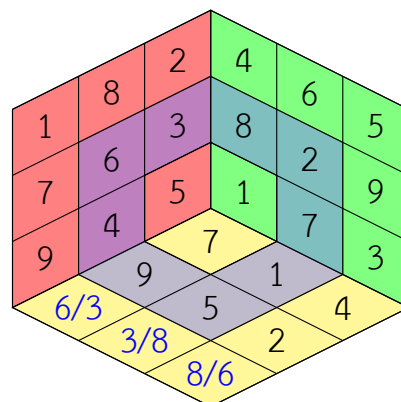
กรณีที่ 14



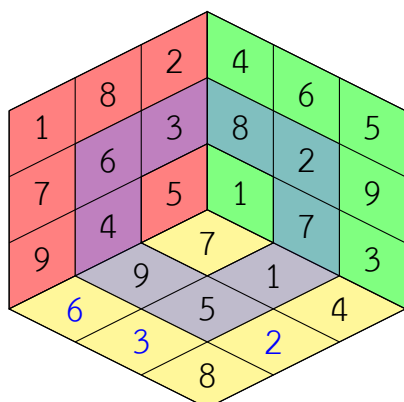
กรณีที่ 15



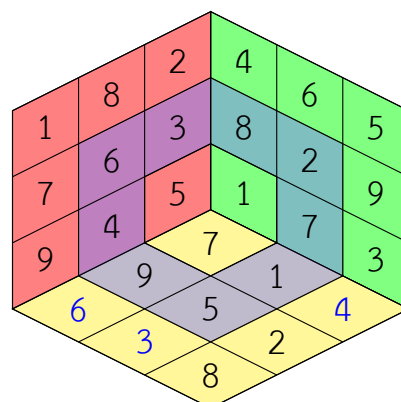
กรณีที่ 16



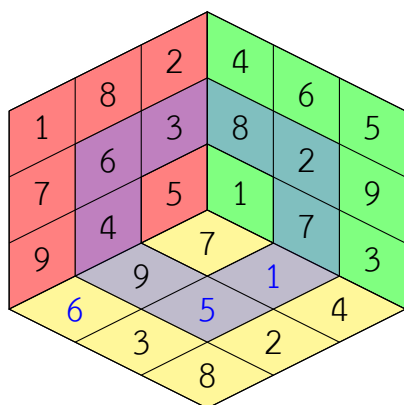
กรณีที่ 17



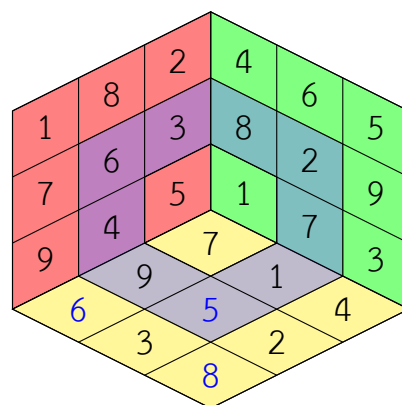
กรณีที่ 18



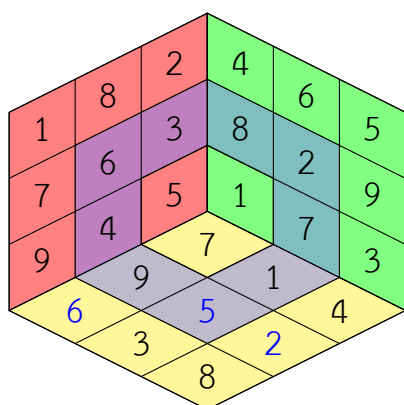
กรณีที่ 19



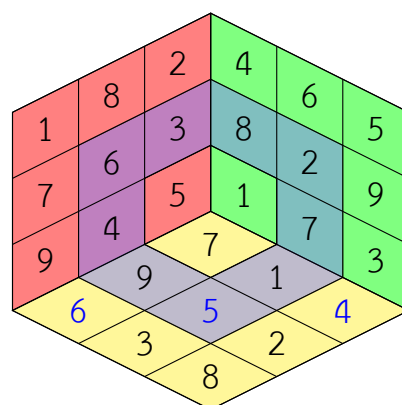
กรณีที่ 20



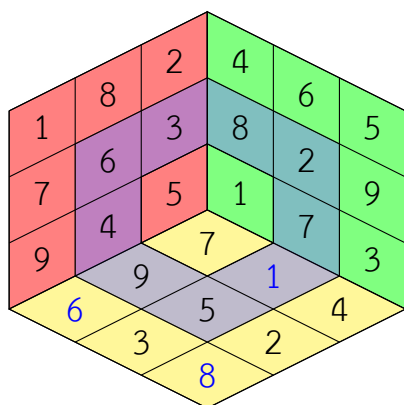
กรณีที่ 21



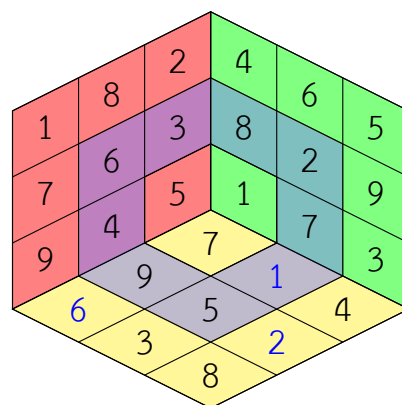
กรณีที่ 22



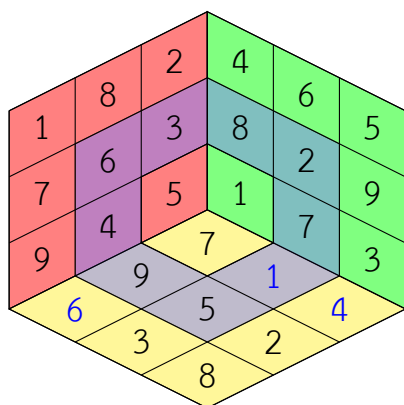
กรณีที่ 23



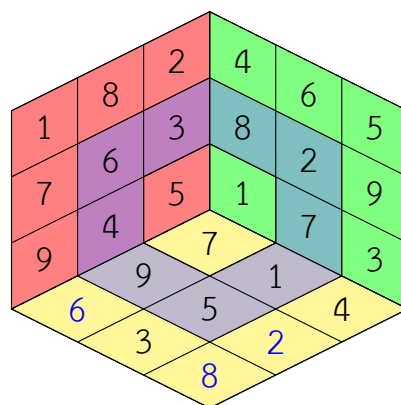
กรณีที่ 24



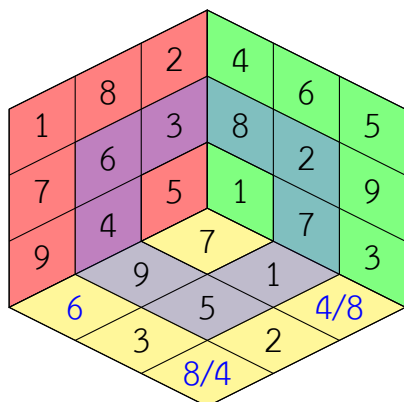
กรณีี่ 25



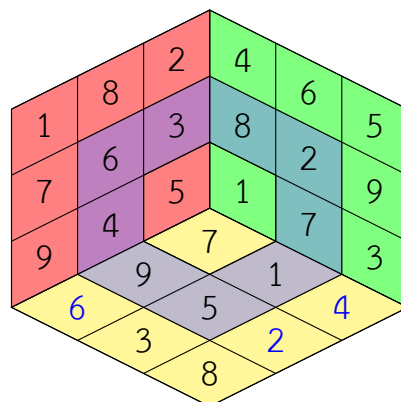
กรณีี่ 26



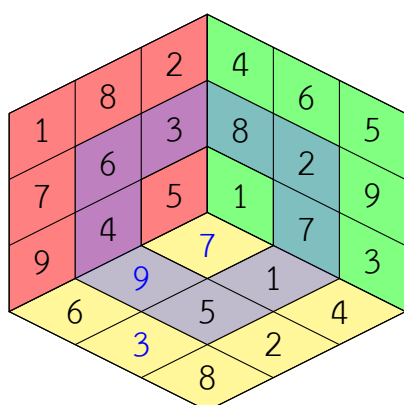
กรณีี่ 27



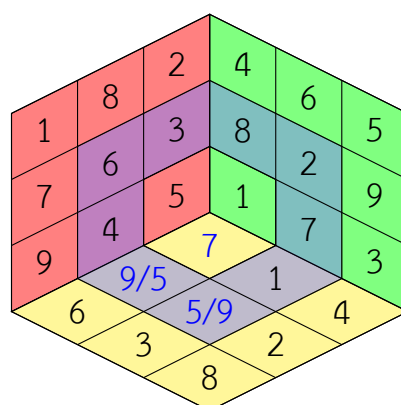
กรณีี่ 28



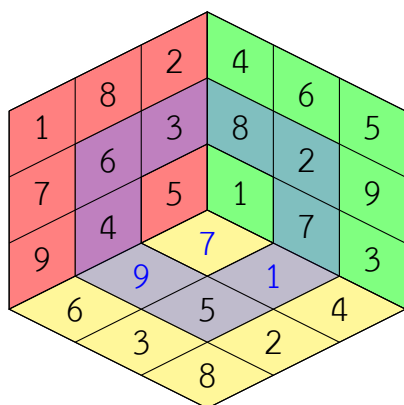
กรณีี่ 29



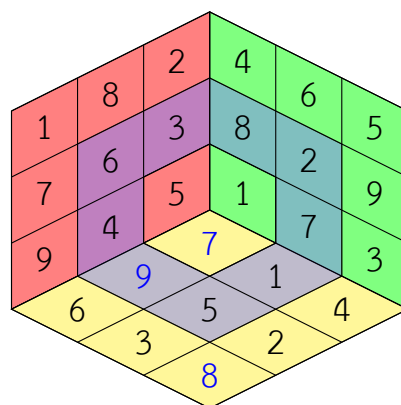
กรณีี่ 30



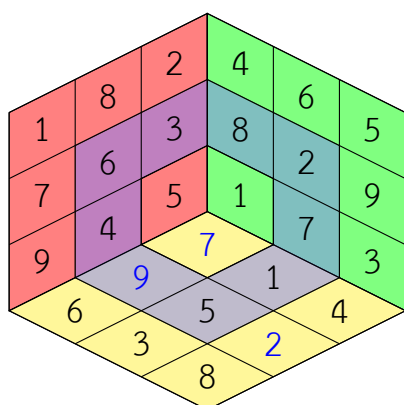
กรณีี่ 31



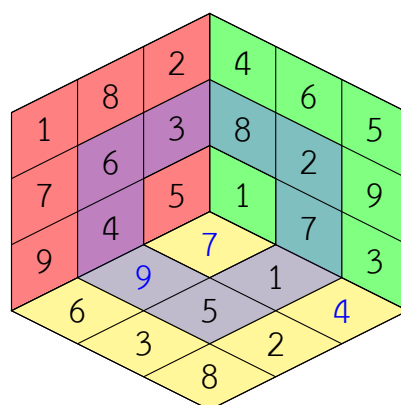
กรณีี่ 32



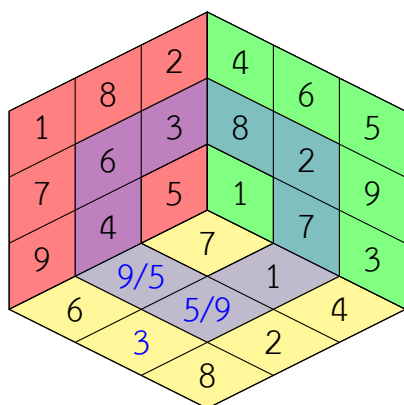
กรณีี่ 33



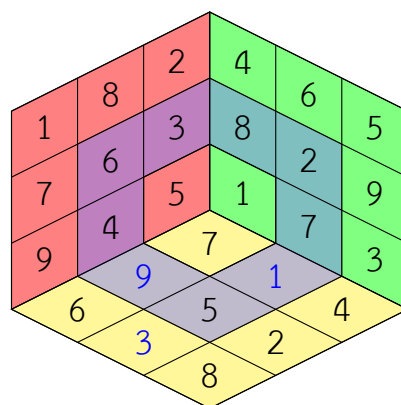
กรณีี่ 34



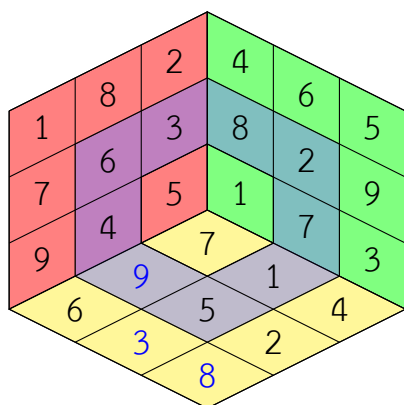
กรณีี่ 35



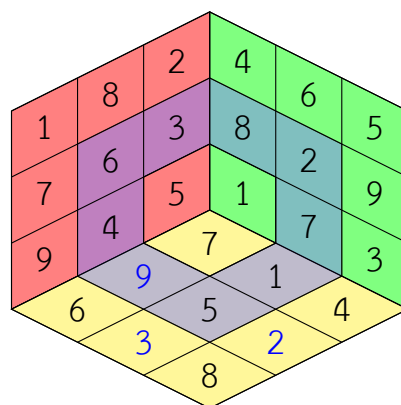
กรณีี่ 36



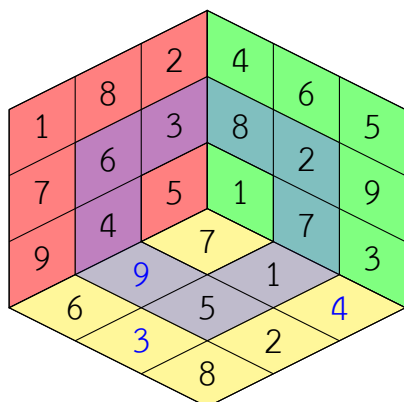
กรณีที่ 37



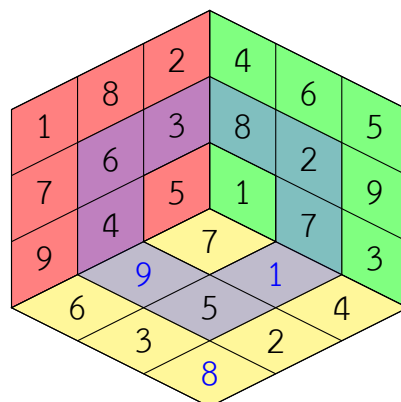
กรณีที่ 38



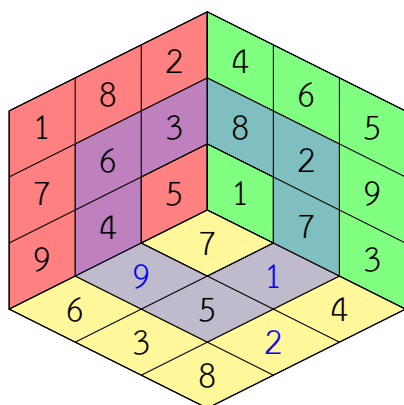
กรณีที่ 39



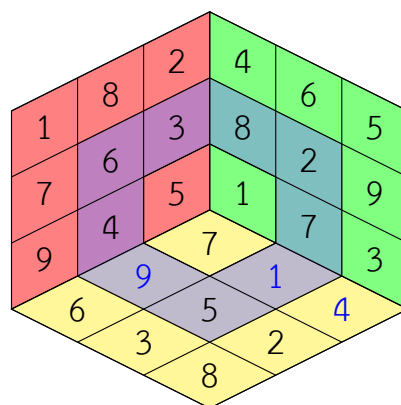
กรณีที่ 40



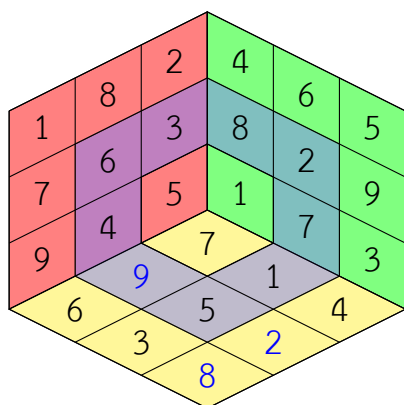
กรณีที่ 41



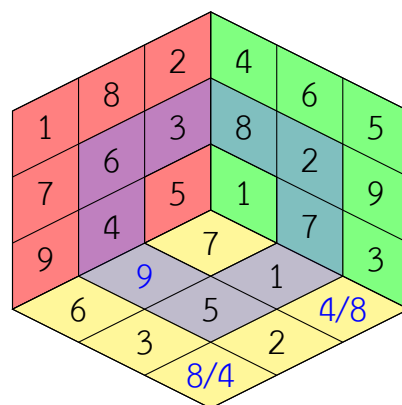
กรณีที่ 42



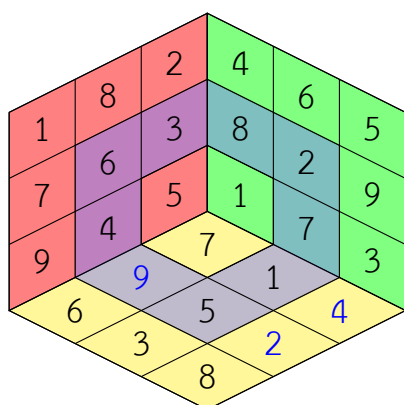
กรณีี่ 43



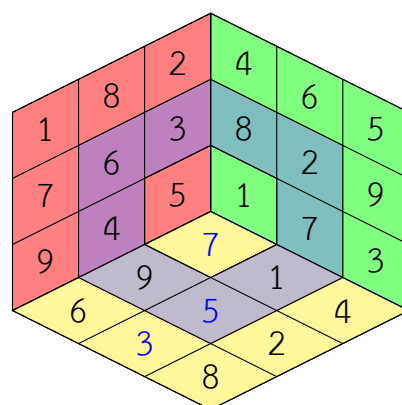
กรณีี่ 44



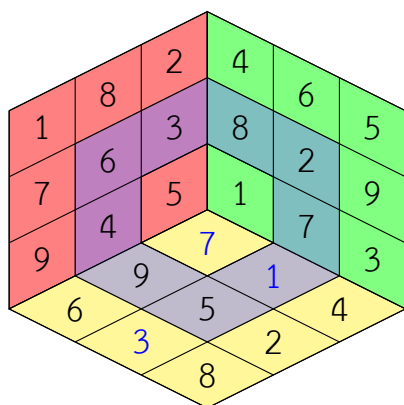
กรณีี่ 45



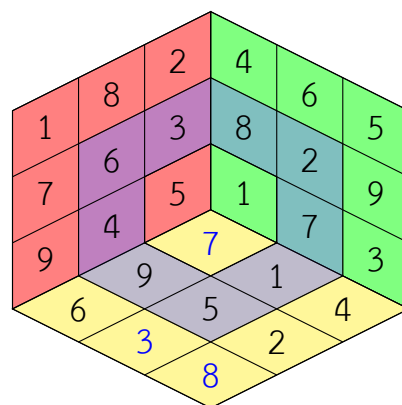
กรณีี่ 46



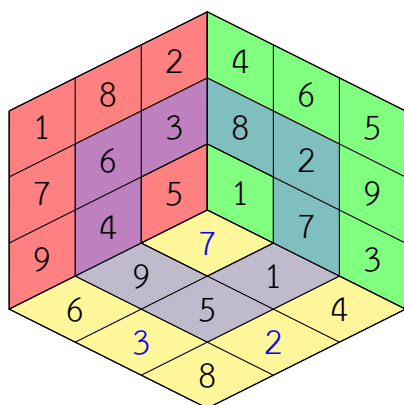
กรณีี่ 47



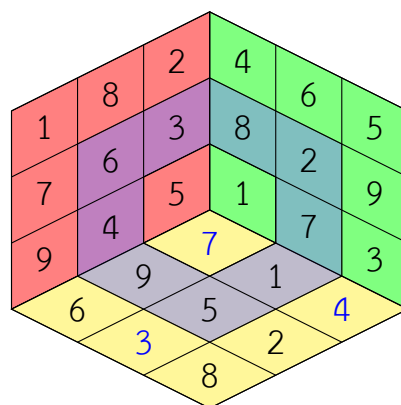
กรณีี่ 48



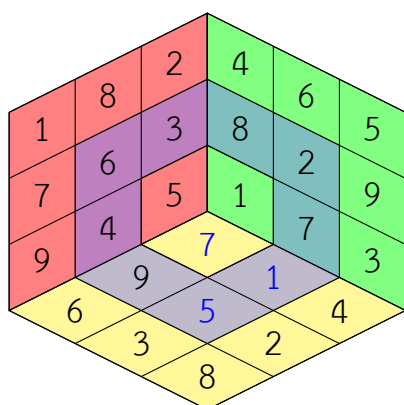
กรณีี่ 49



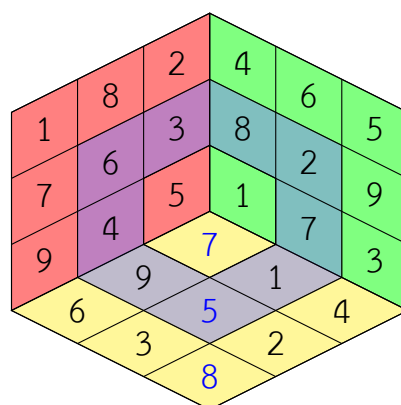
กรณีี่ 50



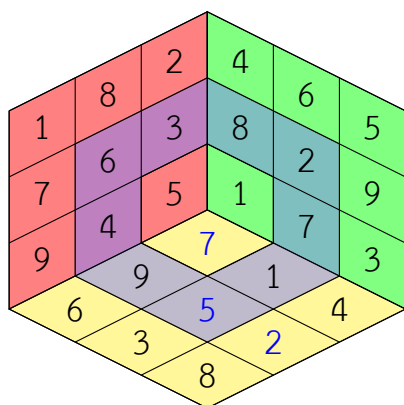
กรณีี่ 51



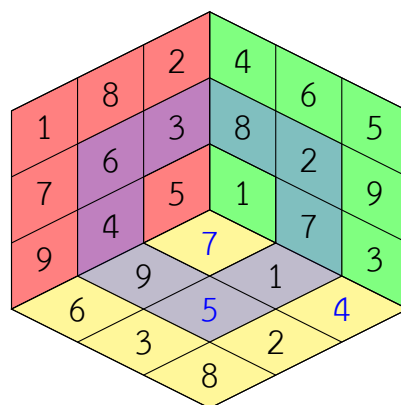
กรณีี่ 52



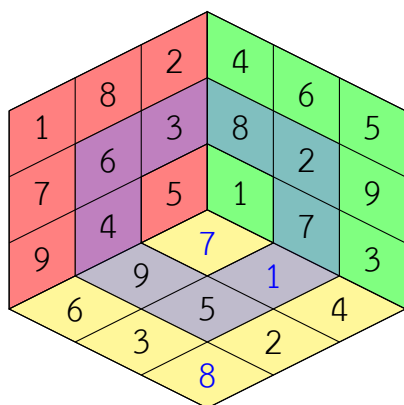
กรณีี่ 53



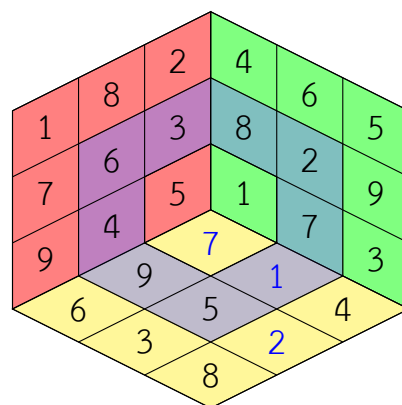
กรณีี่ 54



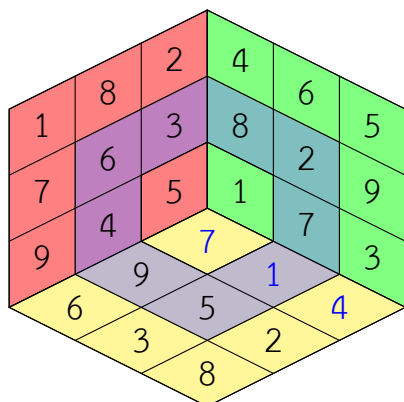
กรณีที่ 55



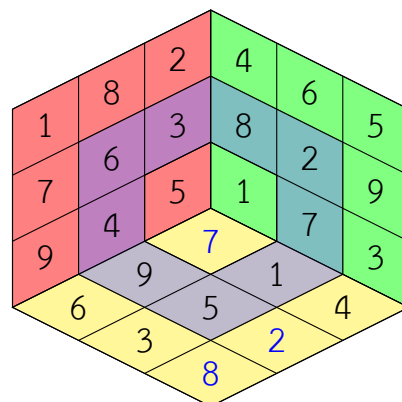
กรณีที่ 56



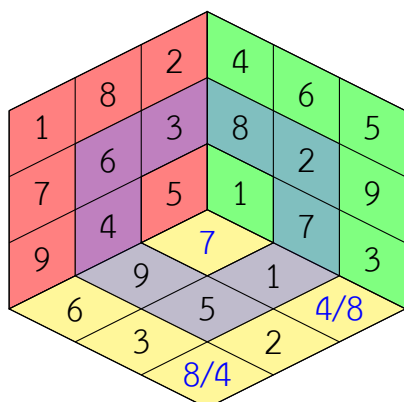
กรณีที่ 57



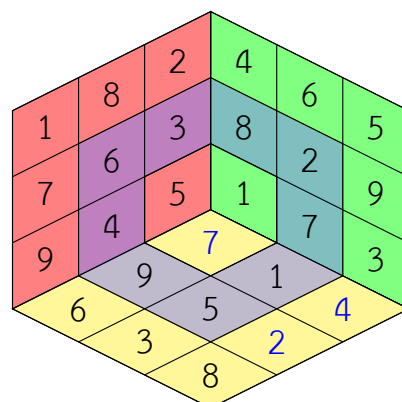
กรณีที่ 58



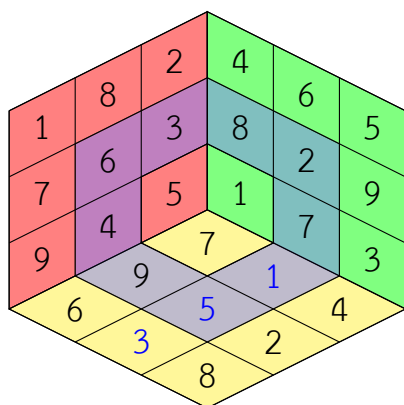
กรณีที่ 59



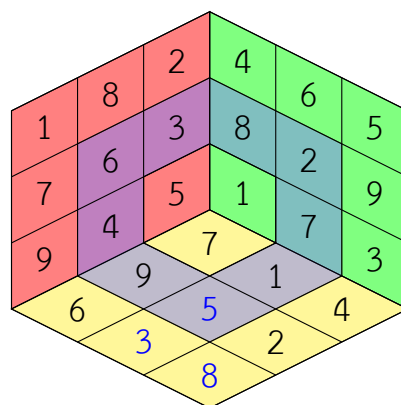
กรณีที่ 60



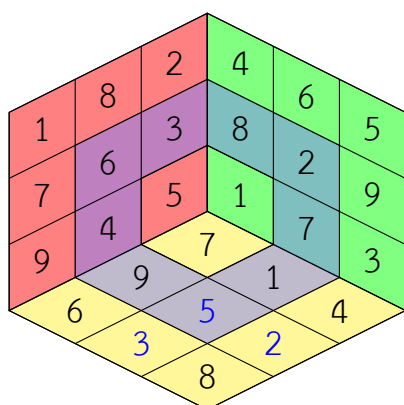
กรณีที่ 61



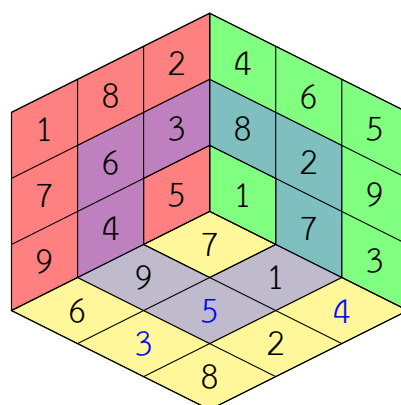
กรณีที่ 62



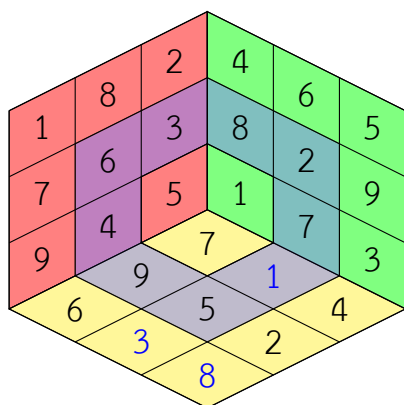
กรณีที่ 63



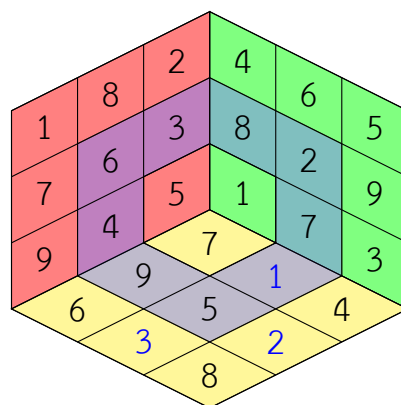
กรณีที่ 64



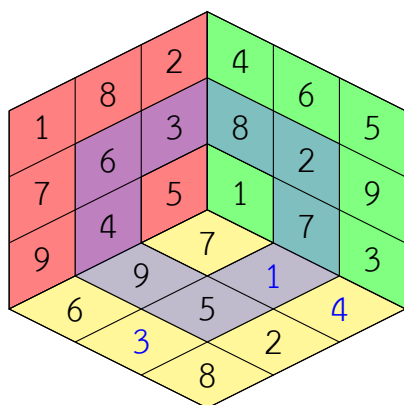
กรณีที่ 65



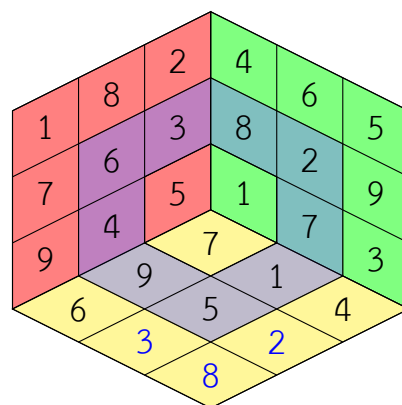
กรณีที่ 66



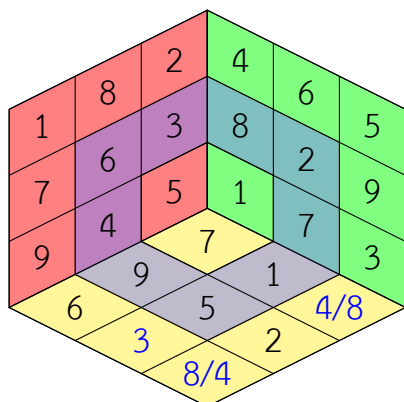
กรณีที่ 67



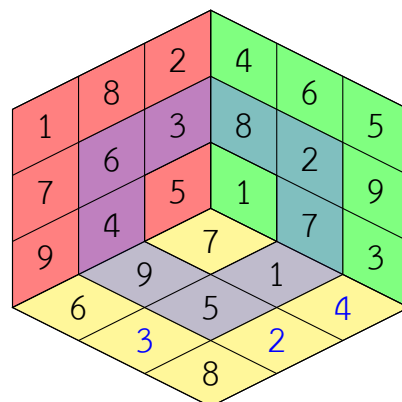
กรณีที่ 68



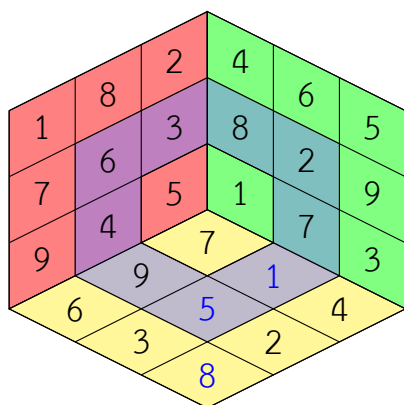
กรณีที่ 69



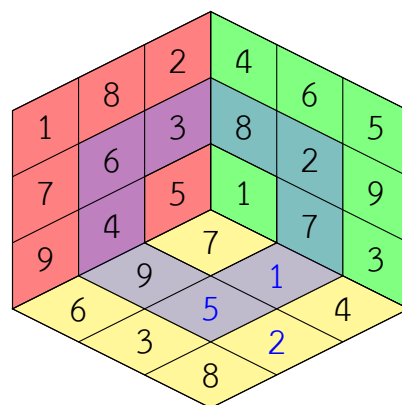
กรณีที่ 70



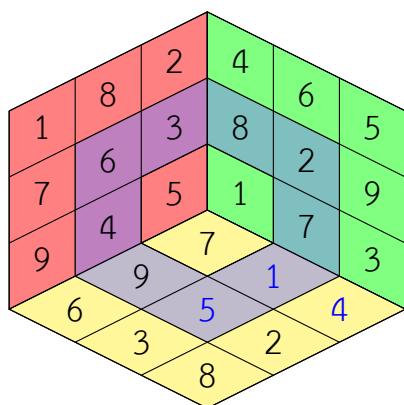
กรณีที่ 71



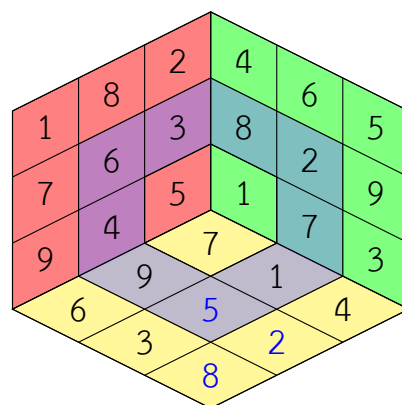
กรณีที่ 72



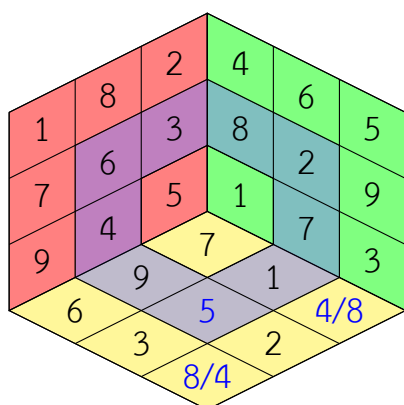
กรณี 73



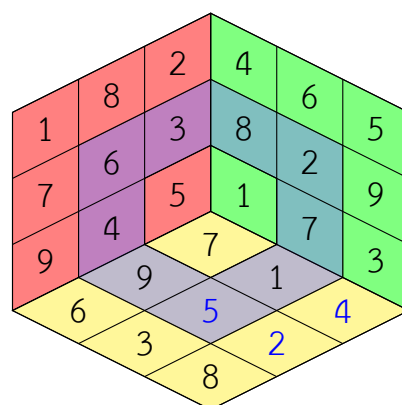
กรณี 74



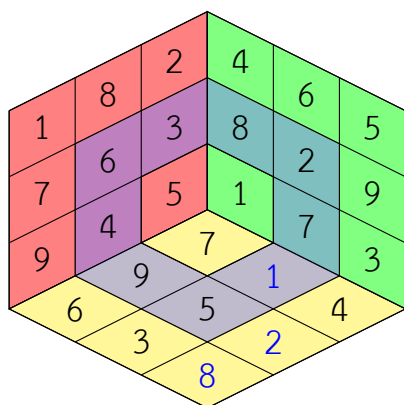
กรณี 75



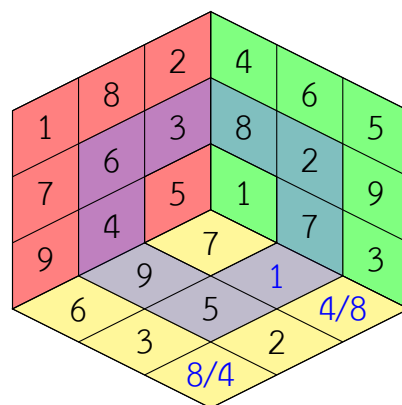
กรณี 76



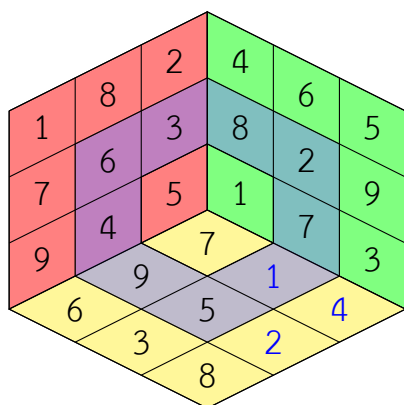
กรณี 77



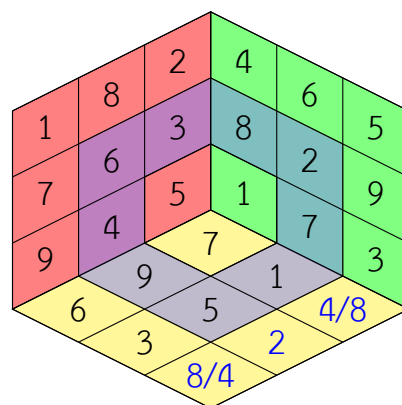
กรณี 78



กรณีที่ 79



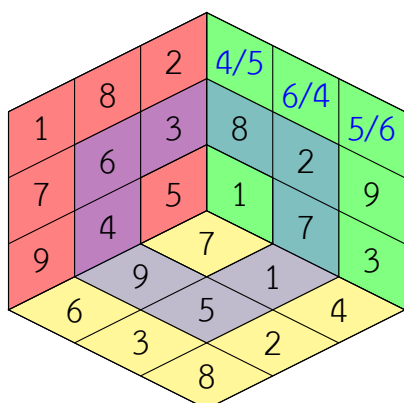
กรณีที่ 80



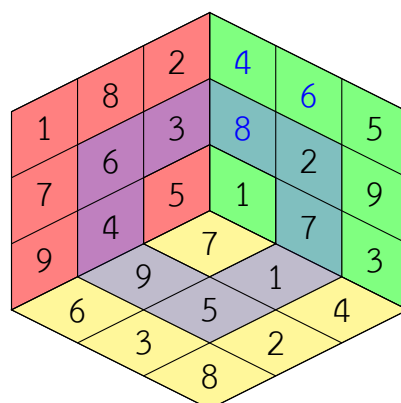
จากตัวอย่าง 41 จะได้ว่า $n(9, 6, 9)$ มีคำตอบเดียว 68 กรณีจาก 84 กรณี

ตัวอย่าง 42 $n(R, Y, G) = n(9, 9, 6)$ โดยพิจารณาเพียง 77 กรณีจาก 84 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

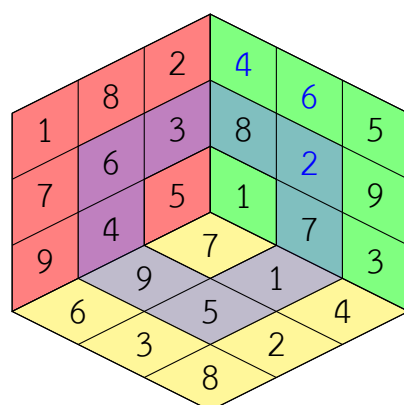
กรณีที่ 1



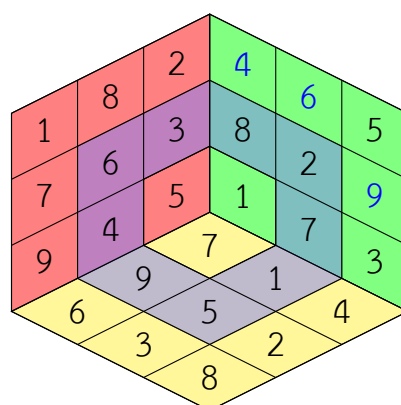
กรณีที่ 2



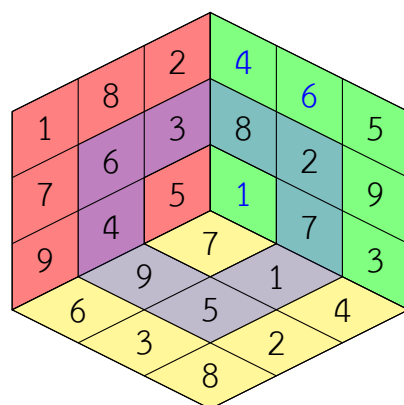
กรณีที่ 3



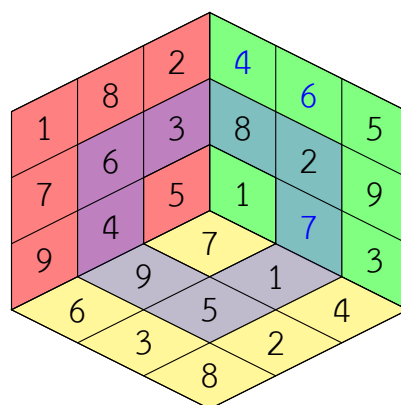
กรณีที่ 4



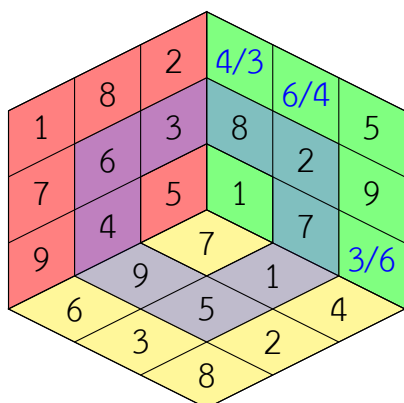
กรณีที่ 5



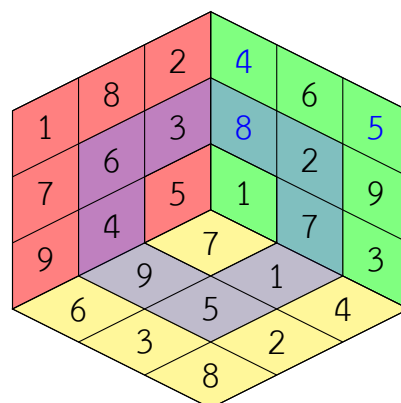
กรณีที่ 6



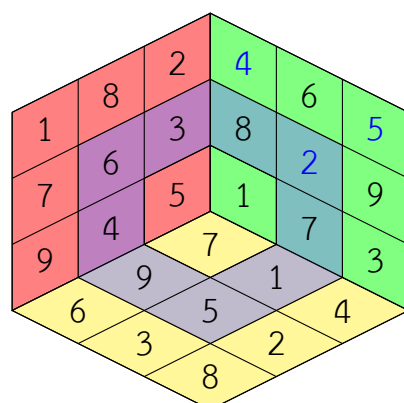
กรณีที่ 7



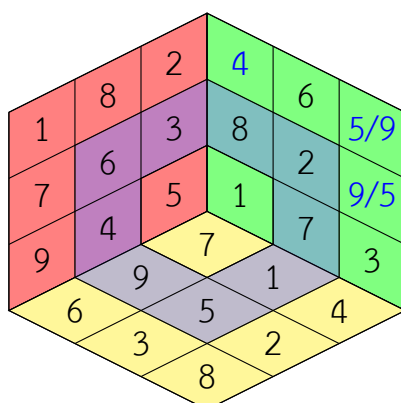
กรณีที่ 8



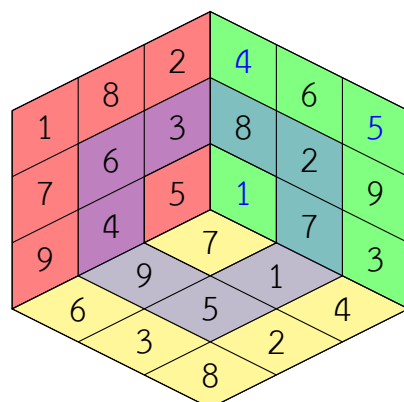
กรณีที่ 9



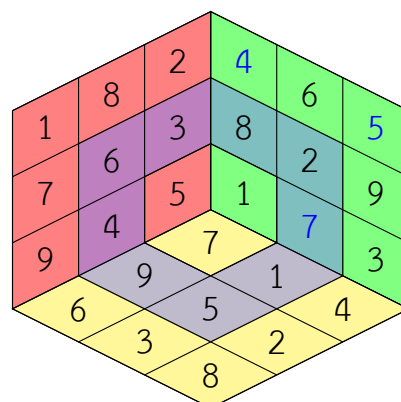
กรณีที่ 10



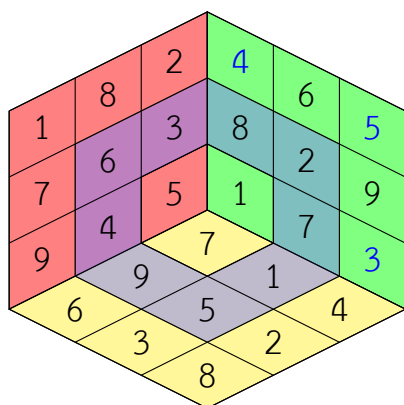
กรณีที่ 11



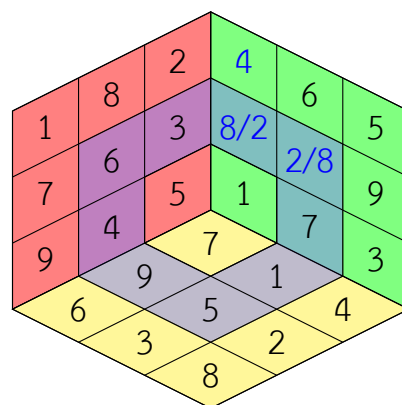
กรณีที่ 12



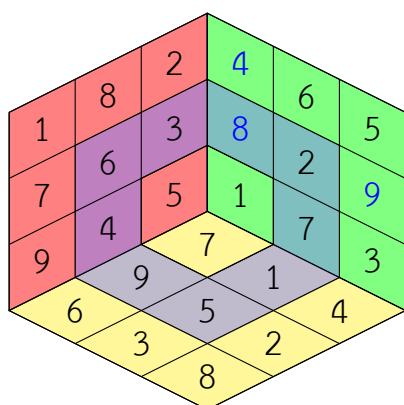
กรณี 13



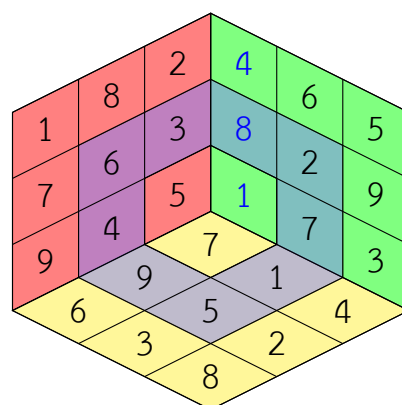
กรณี 14



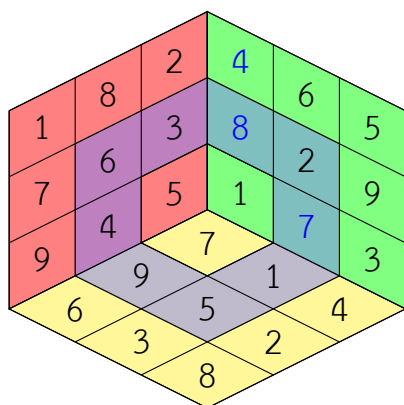
กรณี 15



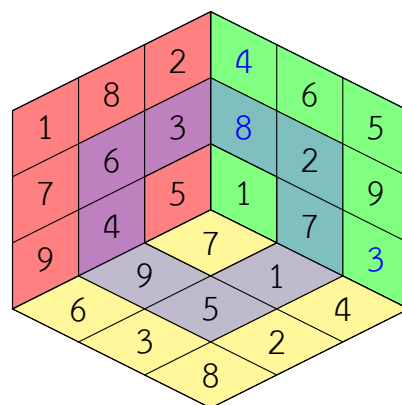
กรณี 16



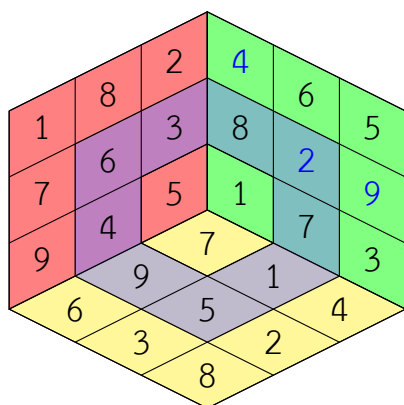
กรณี 17



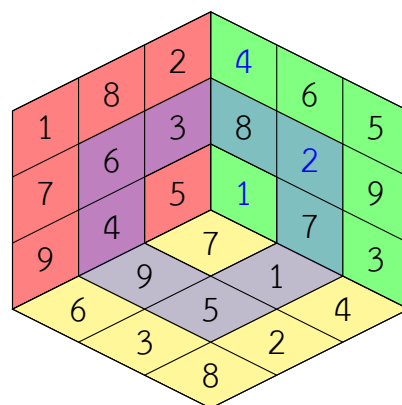
กรณี 18



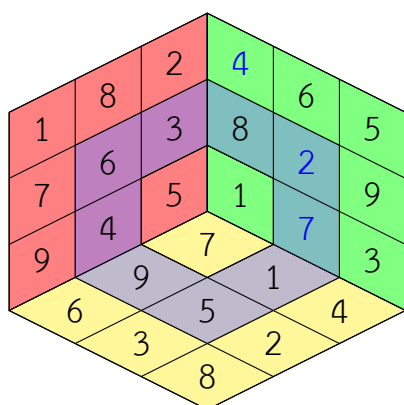
กรณี 19



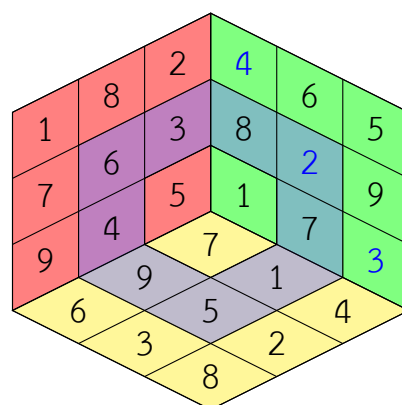
กรณี 20



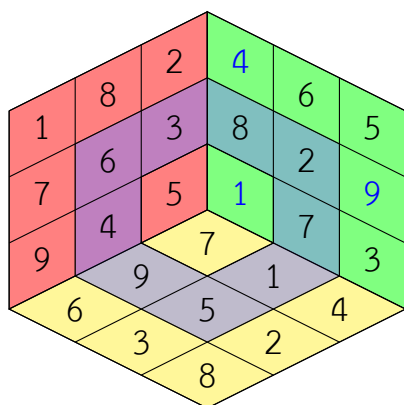
กรณี 21



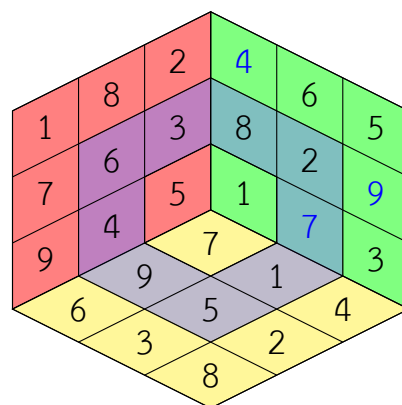
กรณี 22



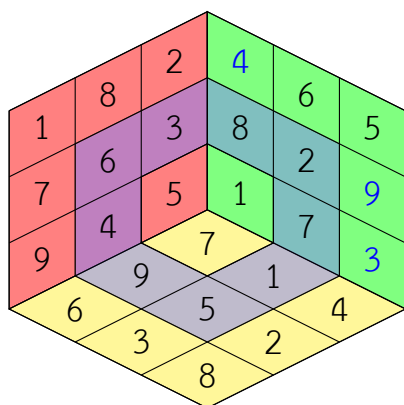
กรณี 23



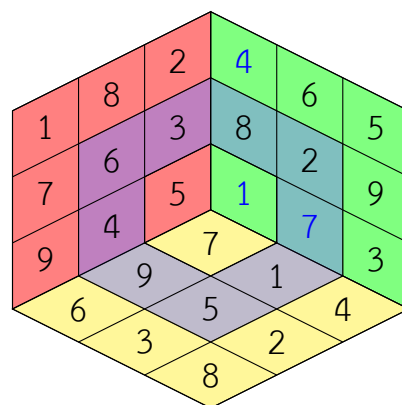
กรณี 24



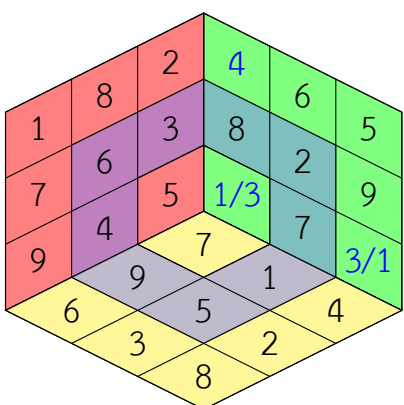
กรณีที่ 25



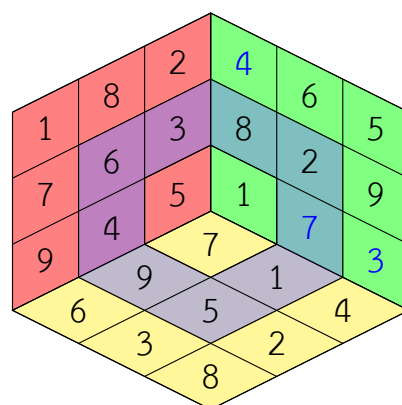
กรณีที่ 26



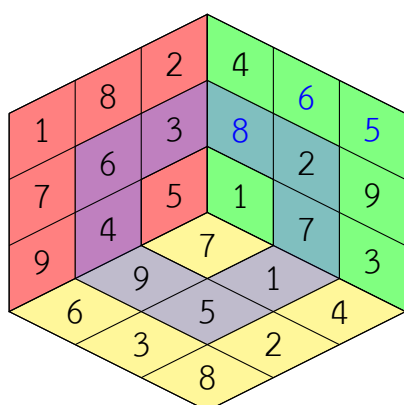
กรณีที่ 27



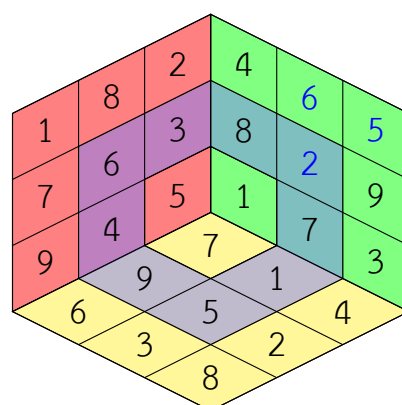
กรณีที่ 28



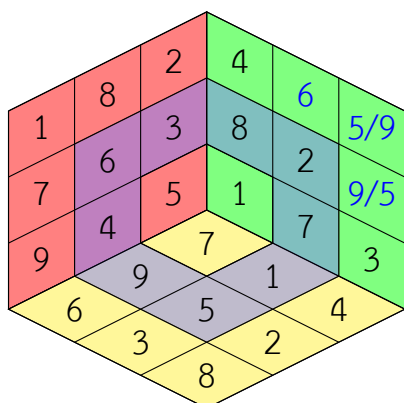
กรณีที่ 29



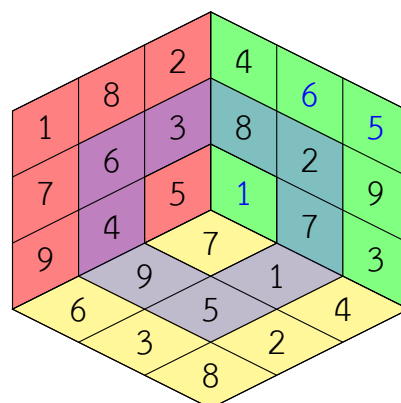
กรณีที่ 30



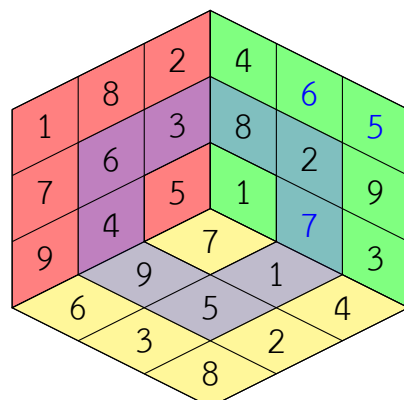
กรณี ที่ 31



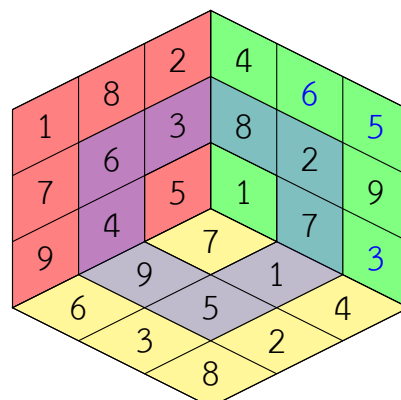
กรณี ที่ 32



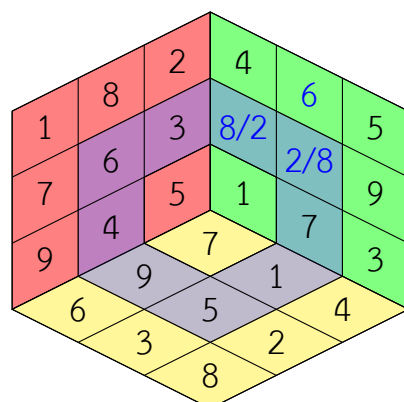
กรณี ที่ 33



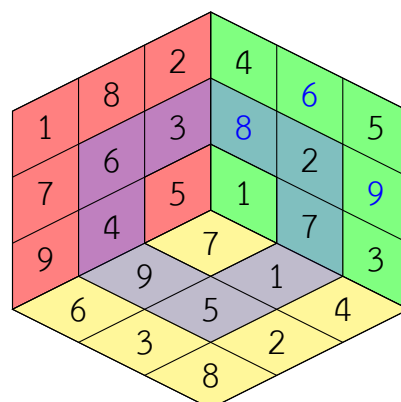
กรณี ที่ 34



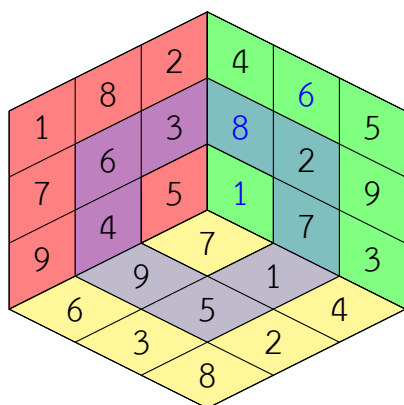
กรณี ที่ 35



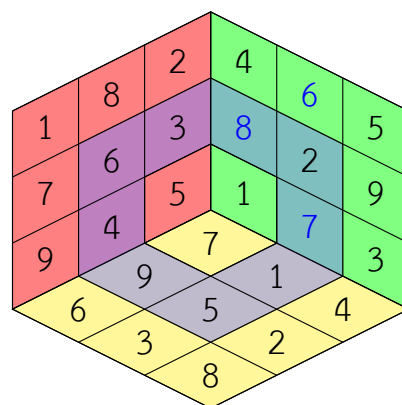
กรณี ที่ 36



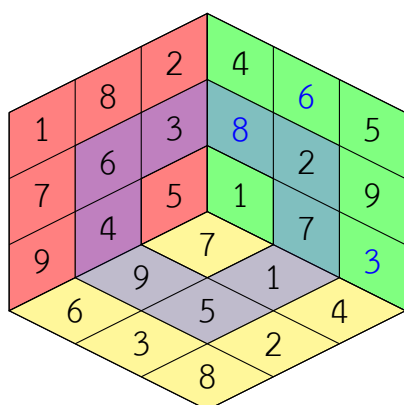
กรณีี่ 37



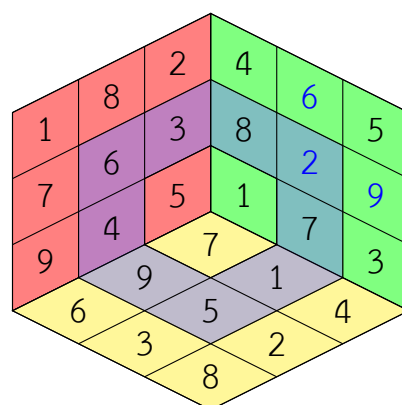
กรณีี่ 38



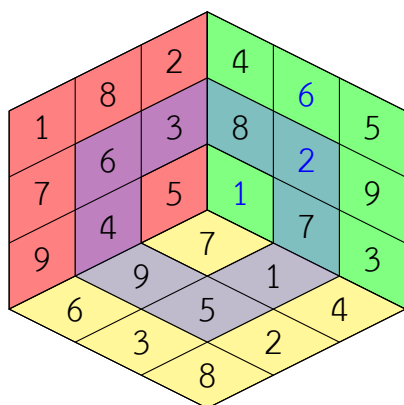
กรณีี่ 39



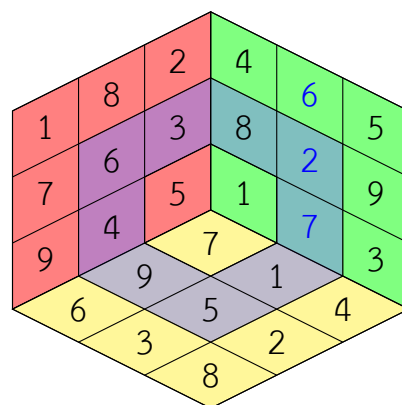
กรณีี่ 40



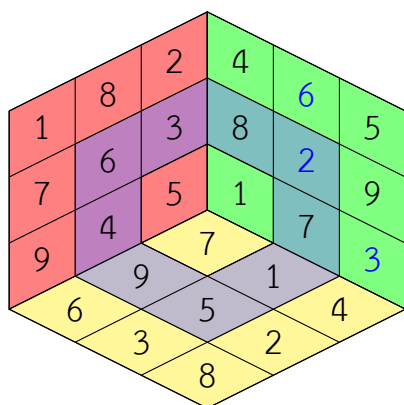
กรณีี่ 41



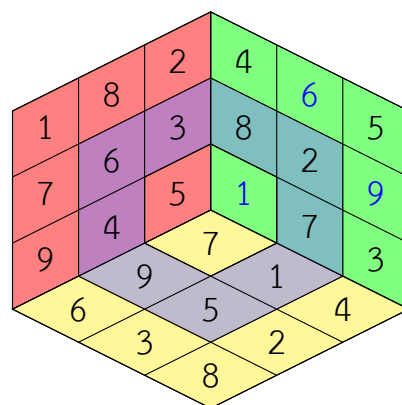
กรณีี่ 42



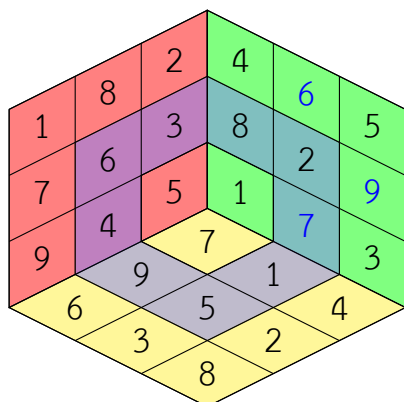
กรณีี่ 43



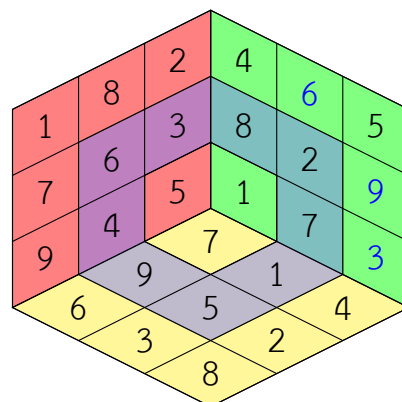
กรณีี่ 44



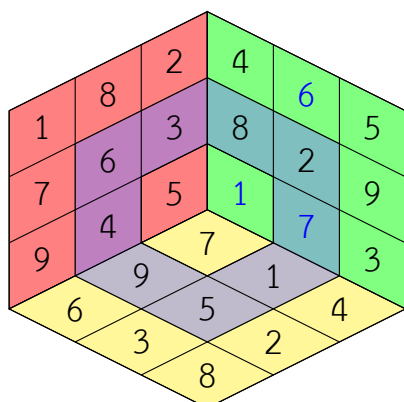
กรณีี่ 45



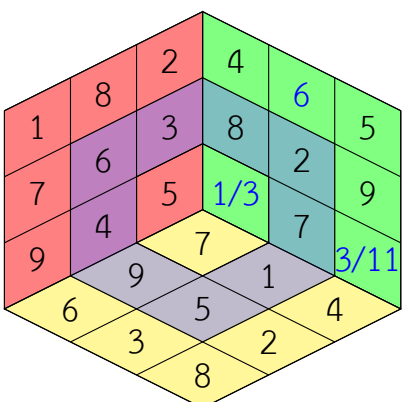
กรณีี่ 46



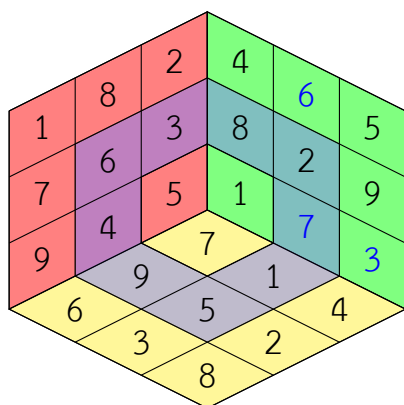
กรณีี่ 47



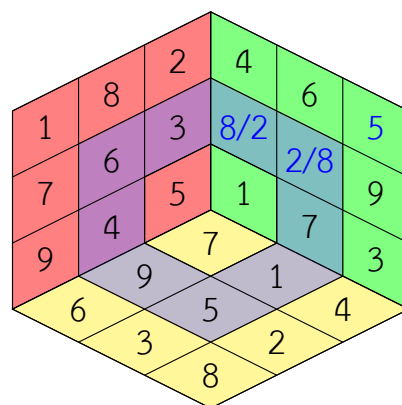
กรณีี่ 48



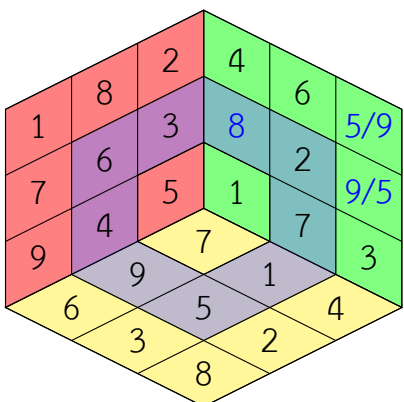
กรณีที่ 49



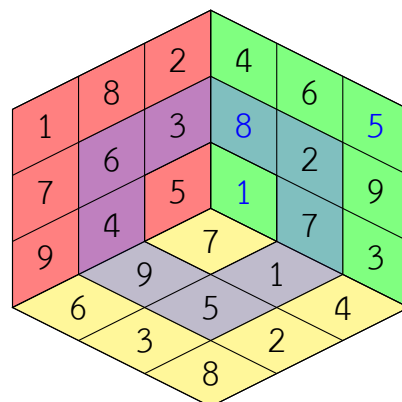
กรณีที่ 50



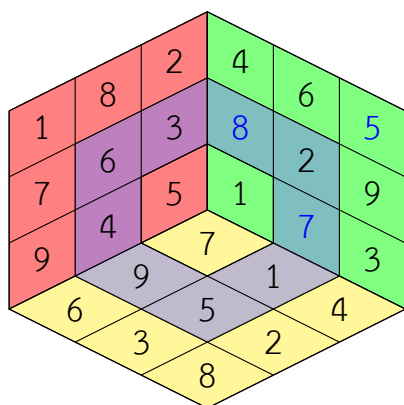
กรณีที่ 51



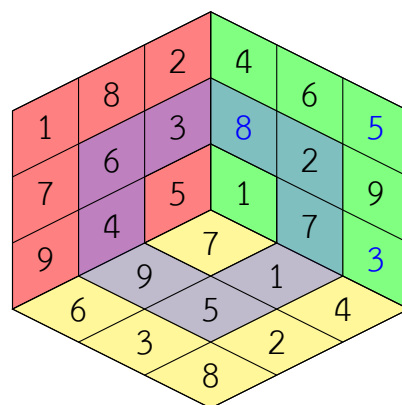
กรณีที่ 52



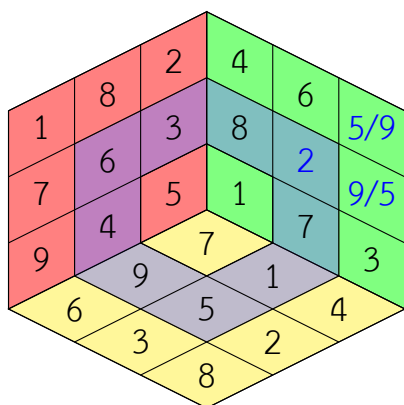
กรณีที่ 53



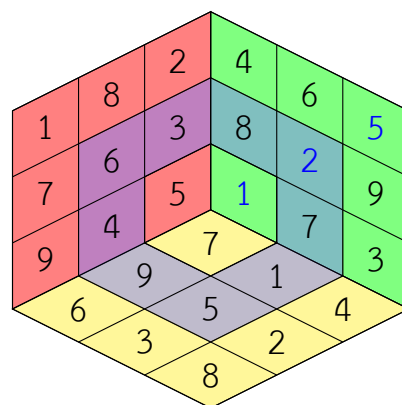
กรณีที่ 54



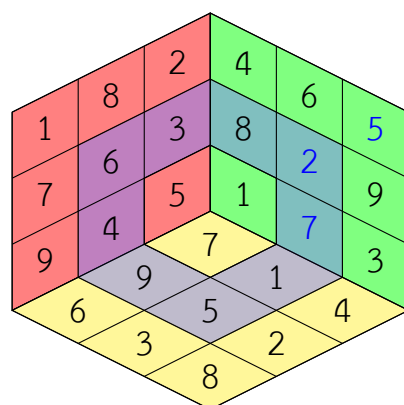
กรณีที่ 55



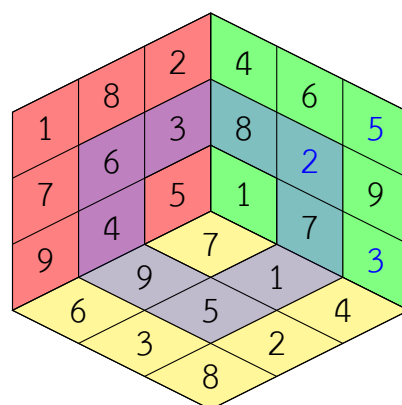
กรณีที่ 56



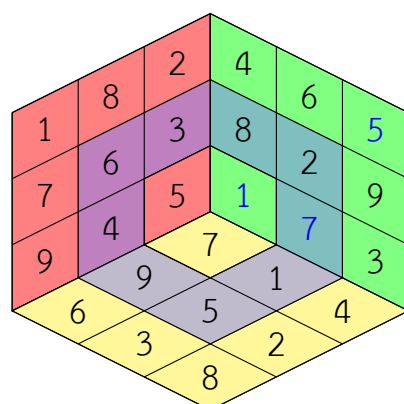
กรณีที่ 57



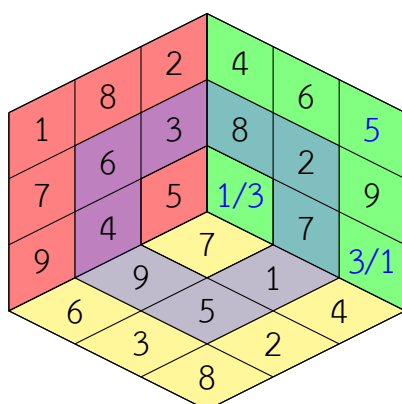
กรณีที่ 58



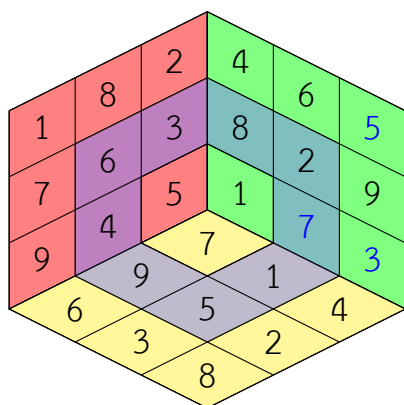
กรณีที่ 59



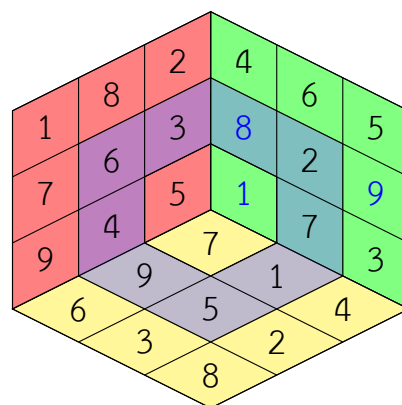
กรณีที่ 60



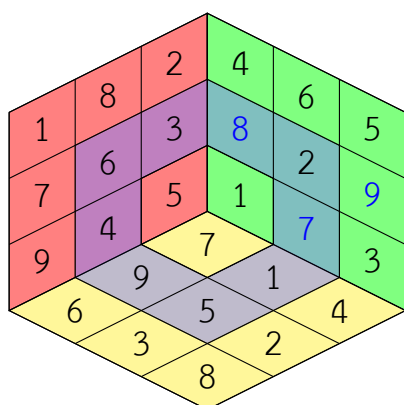
กรณีที่ 61



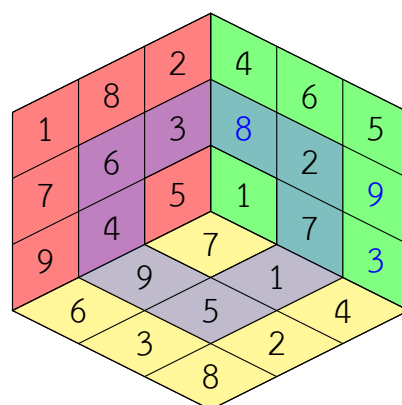
กรณีที่ 62



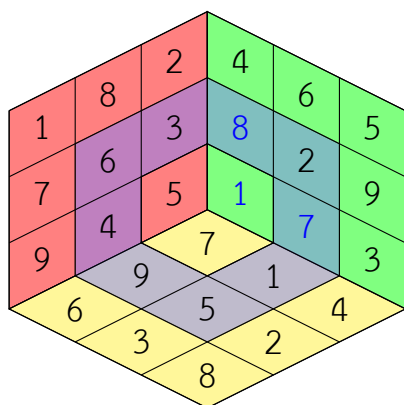
กรณีที่ 63



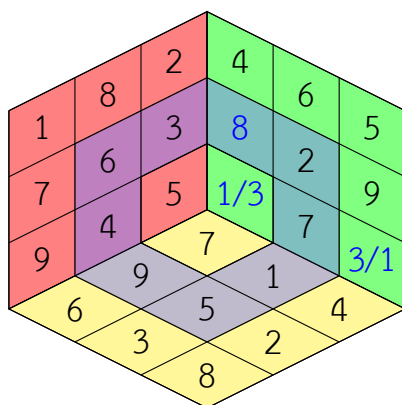
กรณีที่ 64



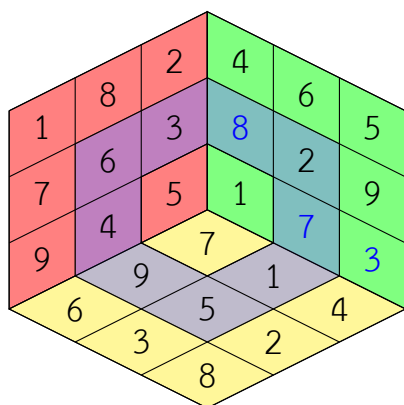
กรณีที่ 65



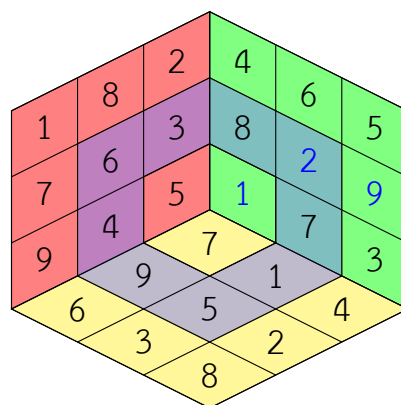
กรณีที่ 66



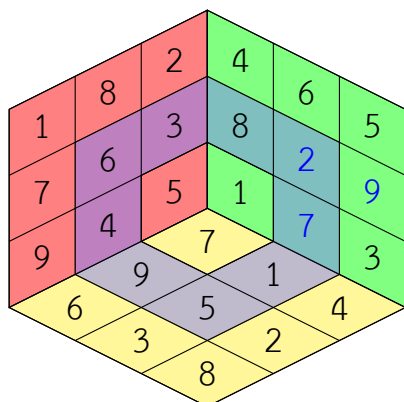
กรณีที่ 67



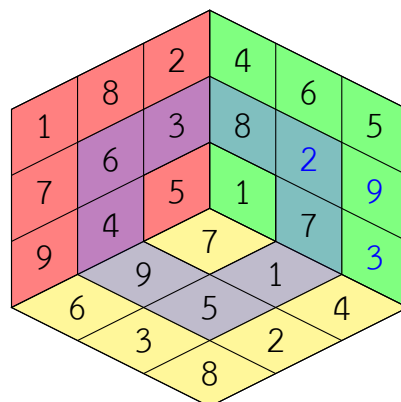
กรณีที่ 68



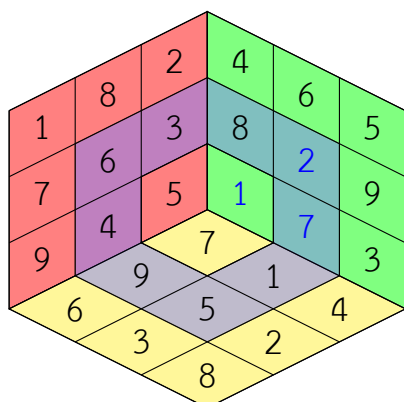
กรณีที่ 69



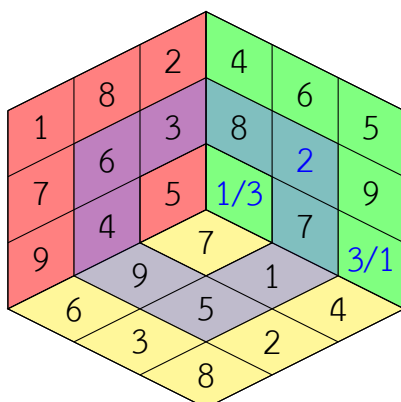
กรณีที่ 70



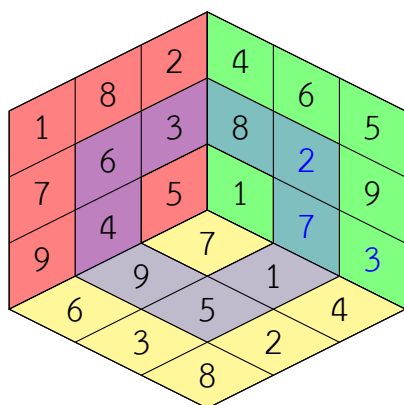
กรณีที่ 71



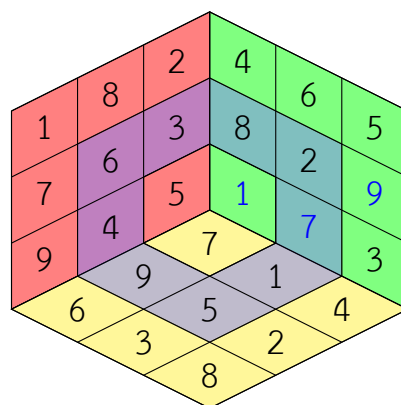
กรณีที่ 72



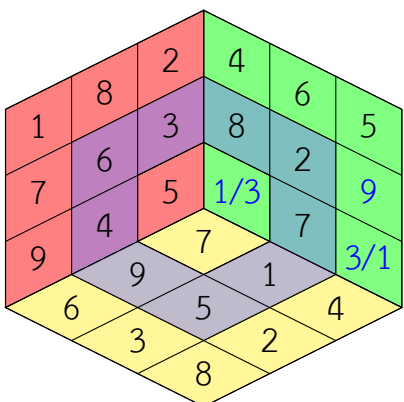
กรณีที่ 73



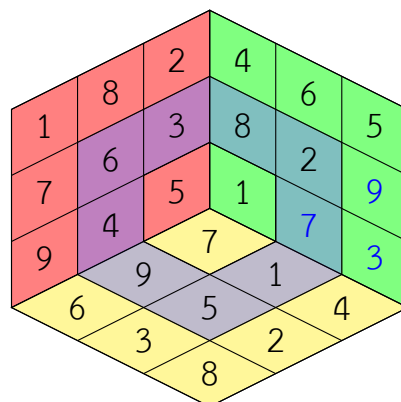
กรณีที่ 74



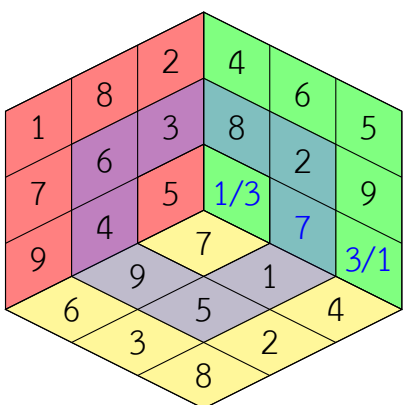
กรณีที่ 75



กรณีที่ 76



กรณีที่ 77



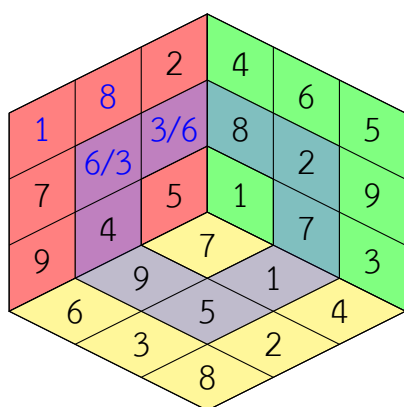
จากตัวอย่าง 42 จะได้ว่า $n(9, 9, 6)$ มีคำตอบเดียว 61 กรณีจาก 84 กรณี
สรุปได้ว่า จาก $n(6, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 49 กรณี, $n(9, 6, 9)$ มีคำตอบเดียว 68 กรณี และ $n(9, 9, 6)$
มีคำตอบเดียว 61 กรณี
ดังนั้นรูปแบบ $(6, 9, 9)$ จะมีคำตอบเดียว 178 กรณีจาก 252 กรณี

4.7 พิจารณารูปแบบ (5, 9, 9)

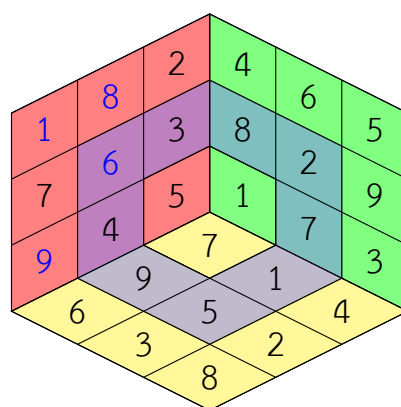
จะทำการลบทีละ 4 ช่อง เพื่อทำการหาคำตอบเดียวที่ได้จากการเติมช่องว่าง หากได้คำตอบมากกว่า 1 คำตอบจะไม่ทำการพิจารณากรณีนั้นต่อ นั่นคือรูปแบบ (5, 9, 9) จะมีทั้งหมด 378 กรณี โดยที่ $n(5, 9, 9)$ มี 126 กรณี, $n(9, 5, 9)$ มี 126 กรณี และ $n(9, 9, 5)$ มี 126 กรณี แต่จากการพิจารณา รูปแบบ (6, 9, 9) กรณีใดที่มีจำนวนคำตอบมากกว่า 1 จะไม่นำมาพิจารณาต่อในรูปแบบ (5, 9, 9)

ตัวอย่าง 43 $n(R, Y, G) = n(5, 9, 9)$ โดยพิจารณาเพียง 69 กรณีจาก 126 กรณีและเมื่อหาจำนวน คำตอบ จะได้ว่า

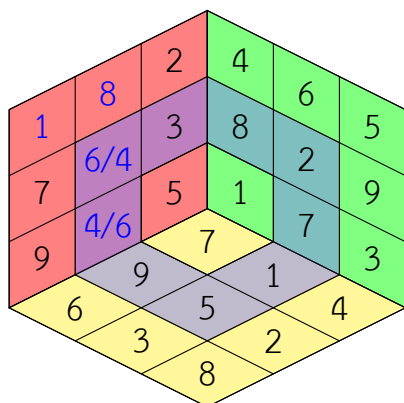
กรณีที่ 1



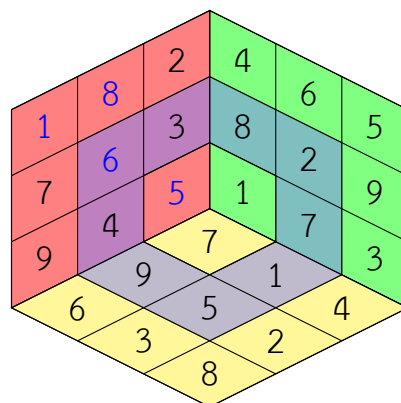
กรณีที่ 2



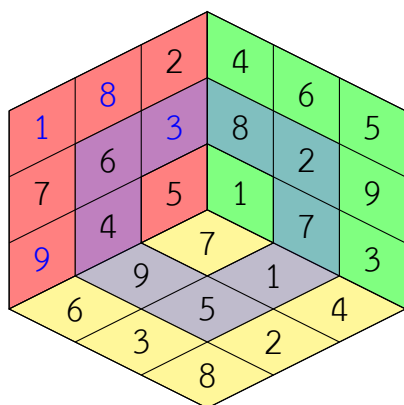
กรณีที่ 3



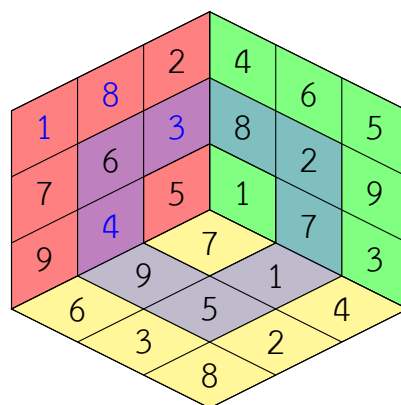
กรณีที่ 4



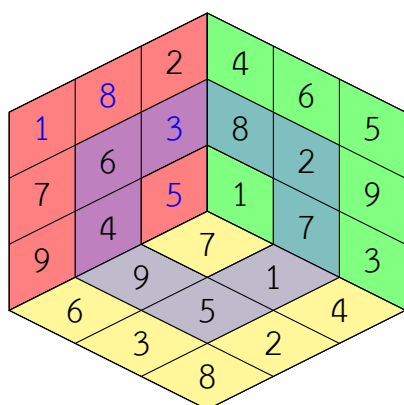
กรณีที่ 5



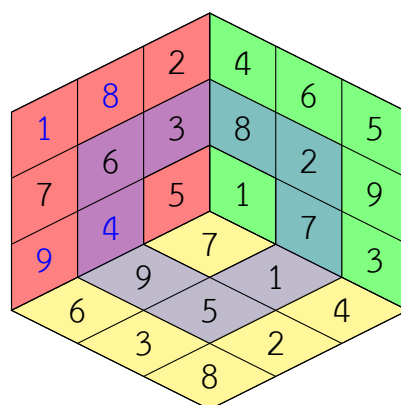
กรณีที่ 6



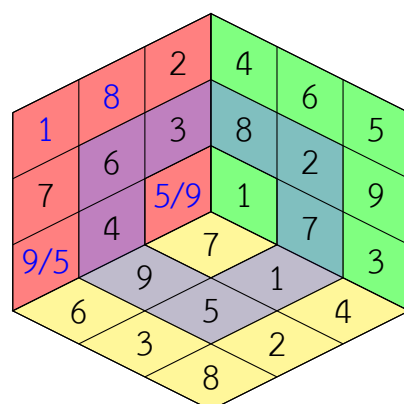
กรณีที่ 7



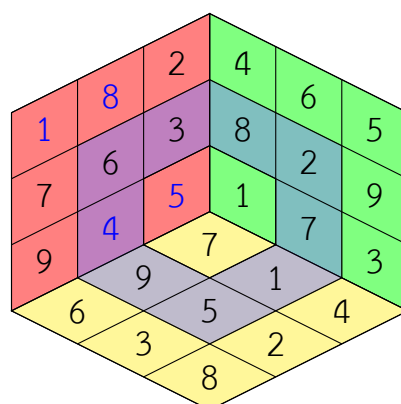
กรณีที่ 8



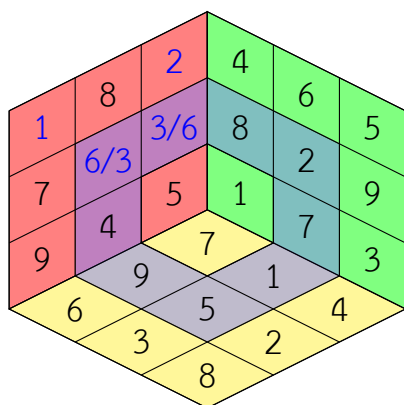
กรณีที่ 9



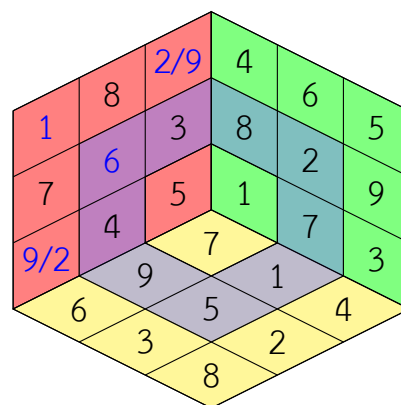
กรณีที่ 10



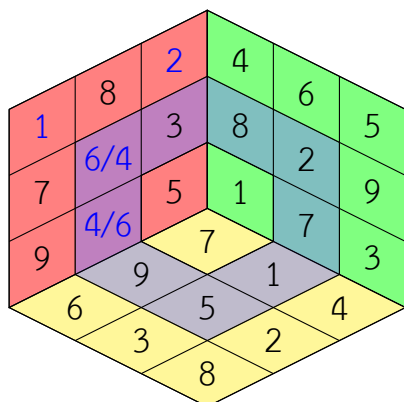
กรณีที่ 11



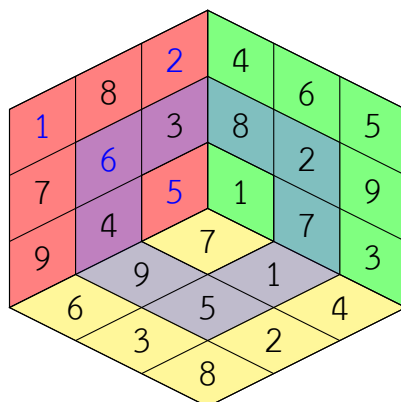
กรณีที่ 12



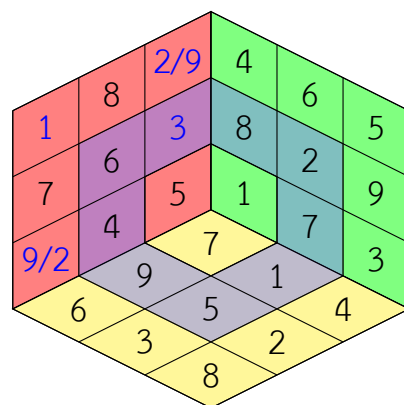
กรณีที่ 13



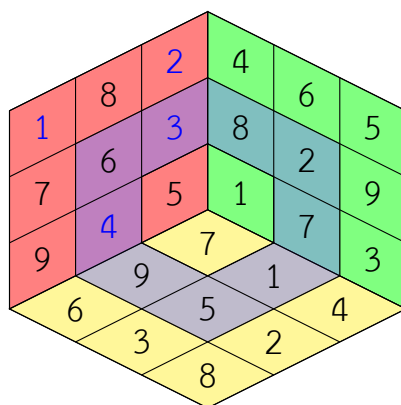
กรณีที่ 14



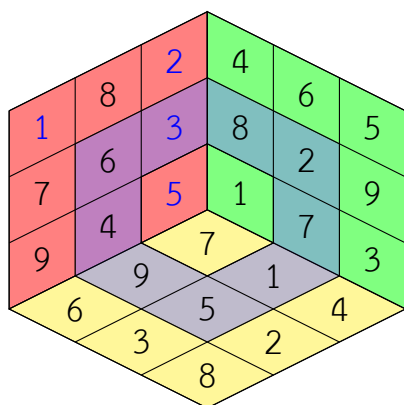
กรณีที่ 15



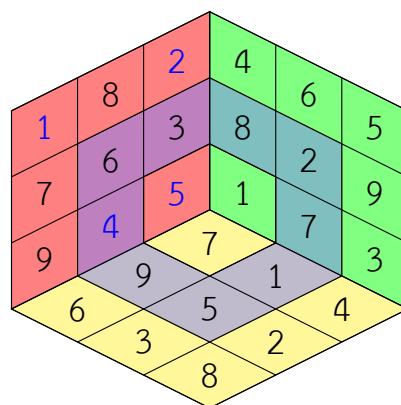
กรณีที่ 16



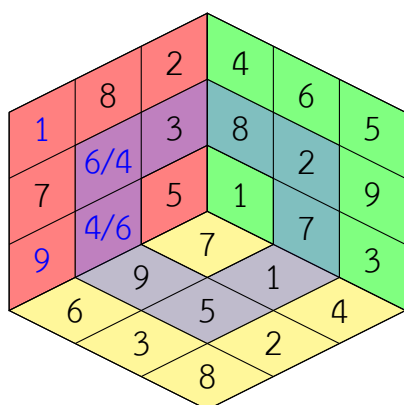
กรณีที่ 17



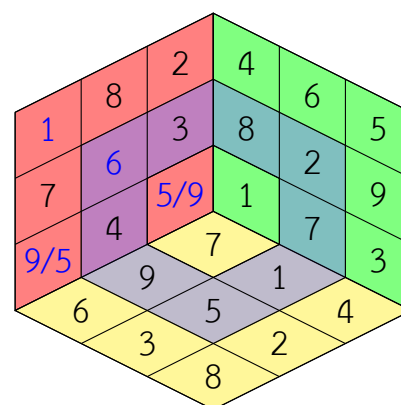
กรณีที่ 18



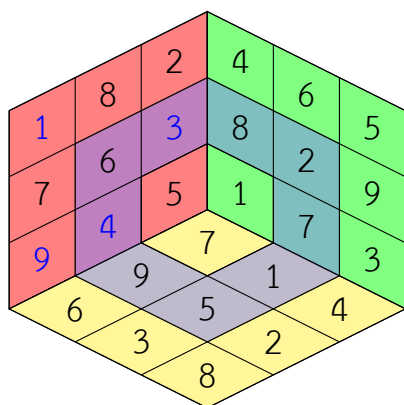
กรณีที่ 19



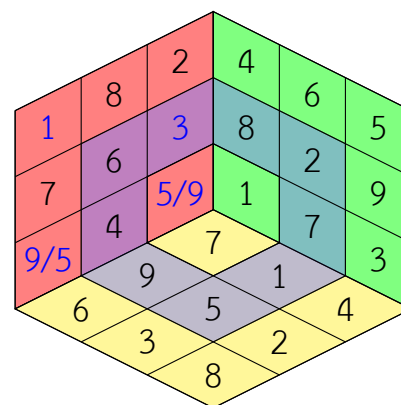
กรณีที่ 20



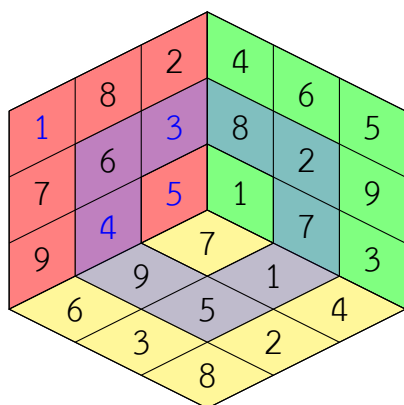
กรณีที่ 21



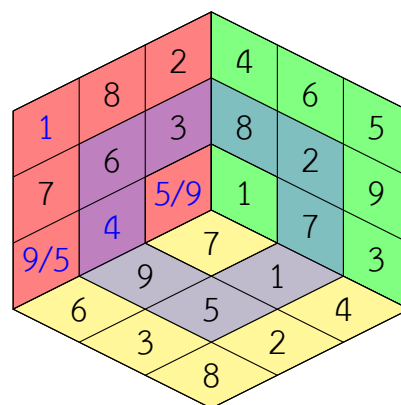
กรณีที่ 22



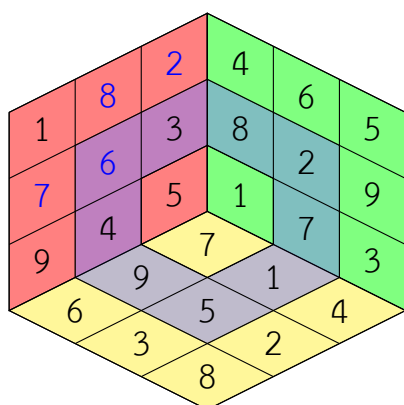
กรณีที่ 23



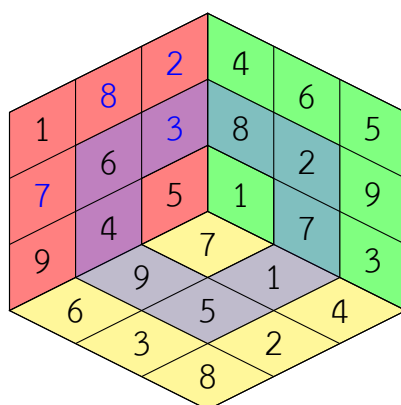
กรณีที่ 24



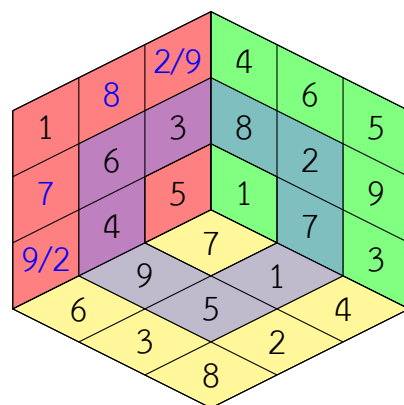
กรณีที่ 25



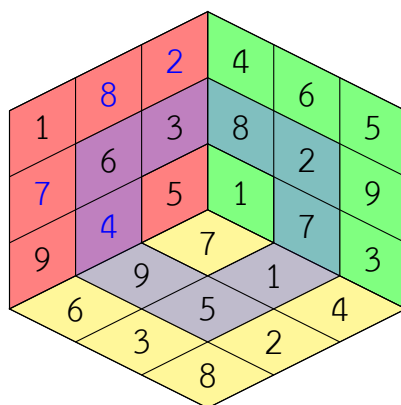
กรณีที่ 26



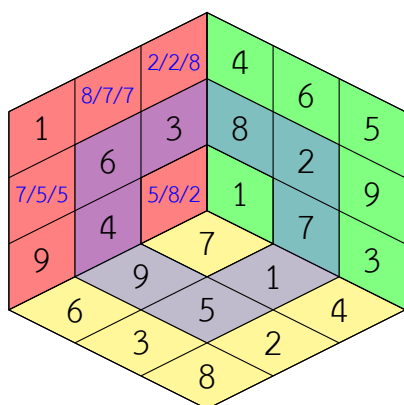
กรณีที่ 27



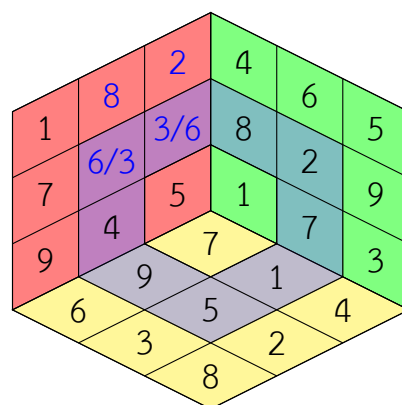
กรณีที่ 28



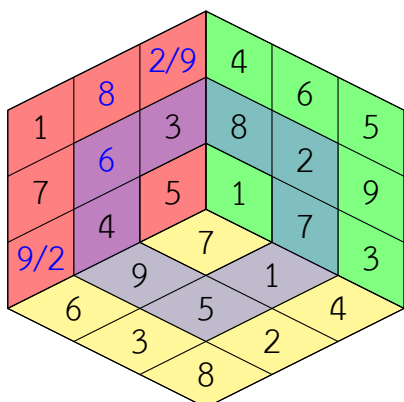
กรณีี่ 29



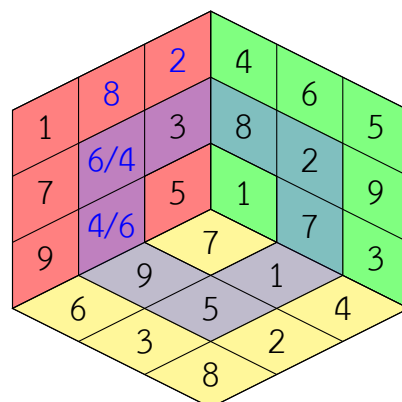
กรณีี่ 30



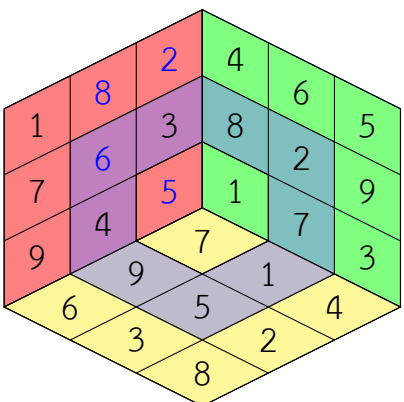
กรณีี่ 31



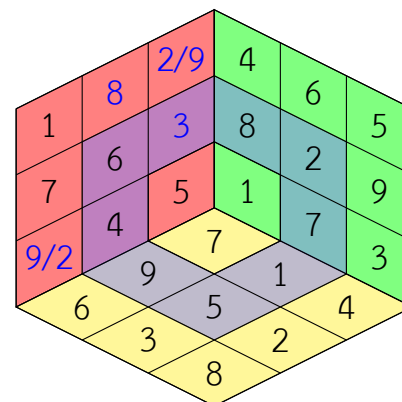
กรณีี่ 32



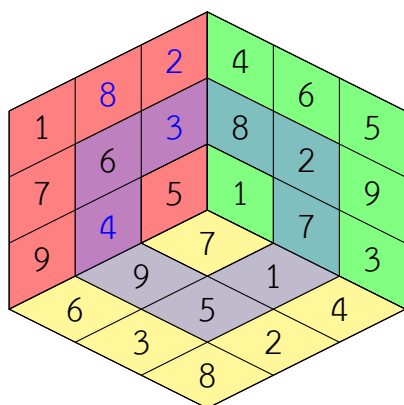
กรณีี่ 33



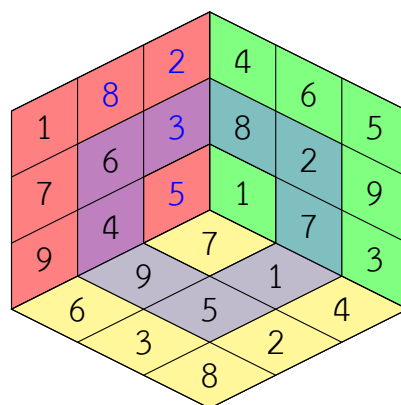
กรณีี่ 34



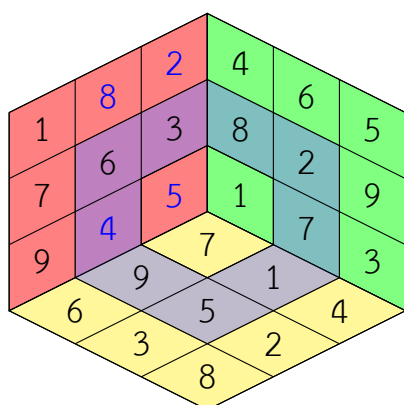
กรณีที่ 35



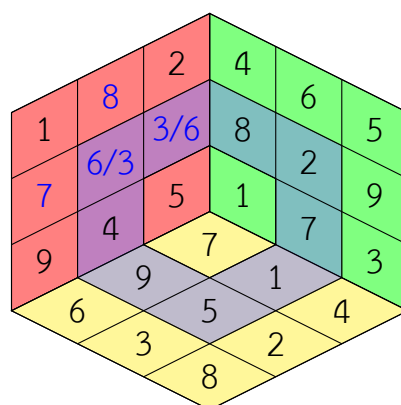
กรณีที่ 36



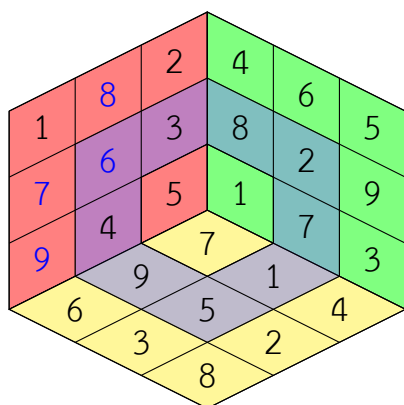
กรณีที่ 37



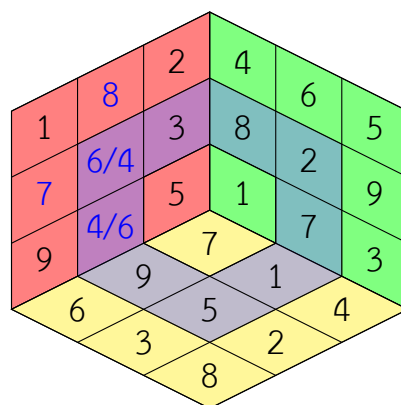
กรณีที่ 38



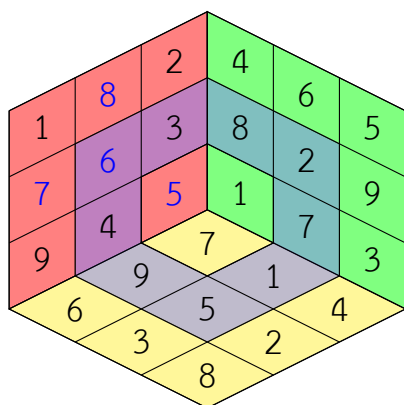
กรณีที่ 39



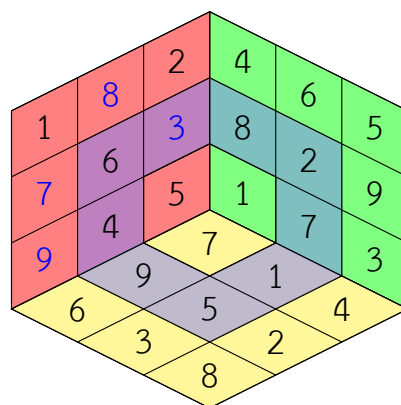
กรณีที่ 40



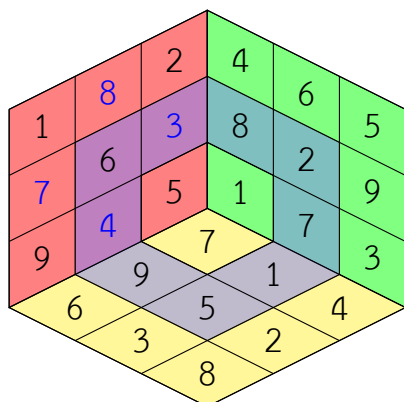
กรณีี่ที่ 41



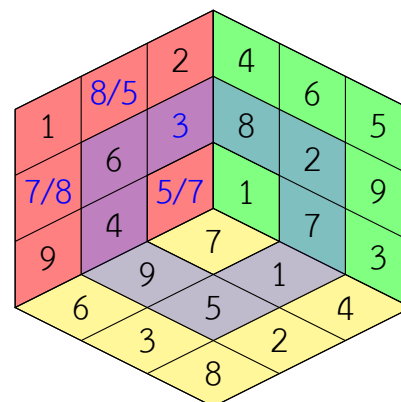
กรณีี่ที่ 42



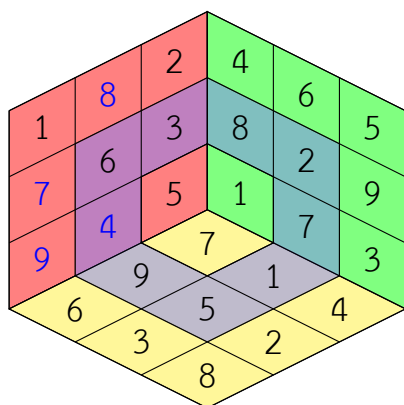
กรณีี่ที่ 43



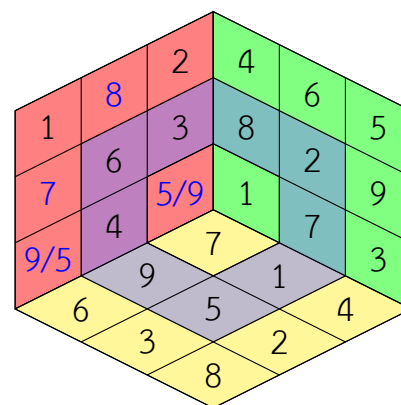
กรณีี่ที่ 44



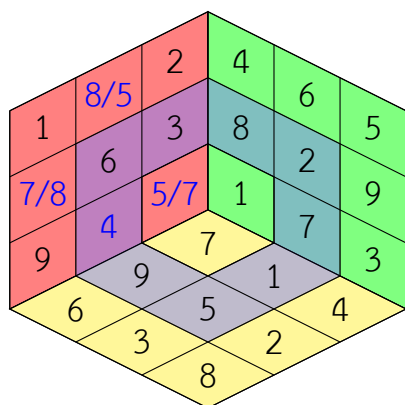
กรณีี่ที่ 45



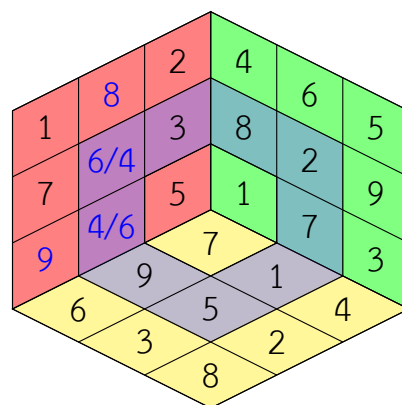
กรณีี่ที่ 46



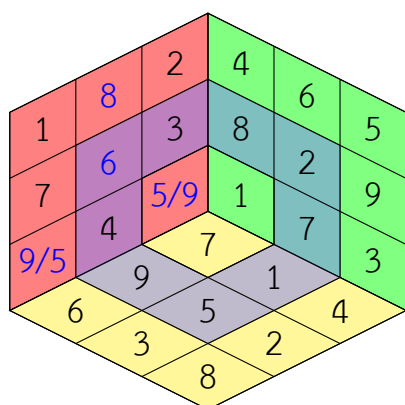
กรณีี่ที่ 47



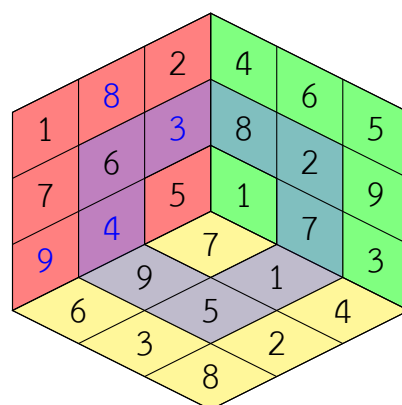
กรณีี่ที่ 48



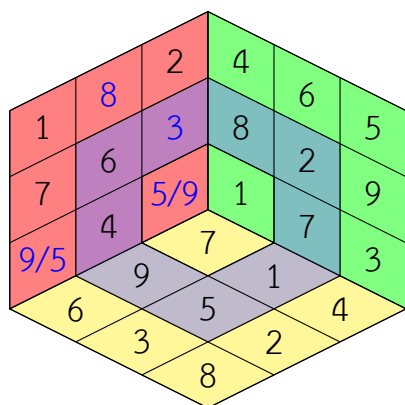
กรณีี่ที่ 49



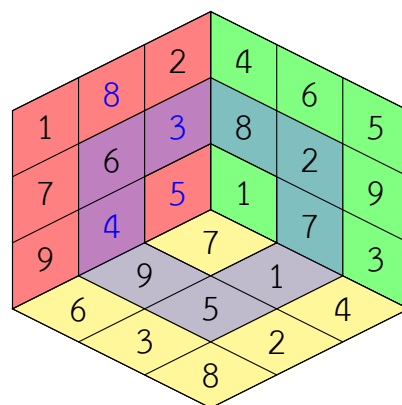
กรณีี่ที่ 50



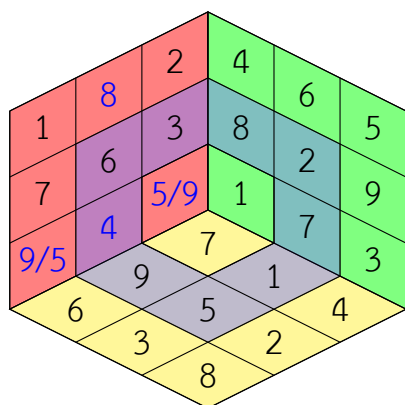
กรณีี่ที่ 51



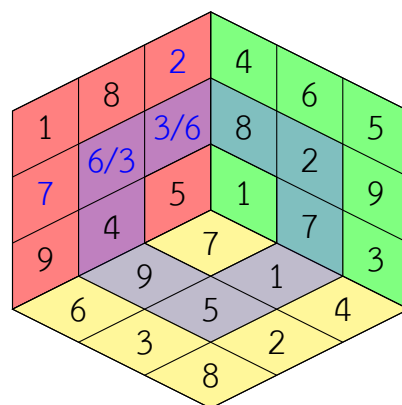
กรณีี่ที่ 52



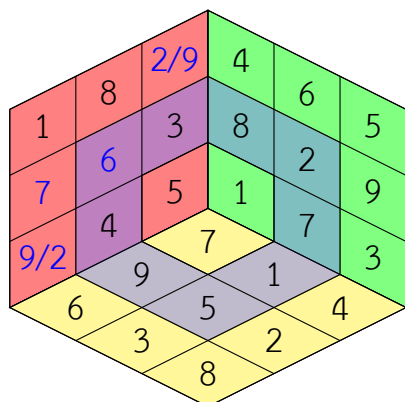
กรณีที่ 53



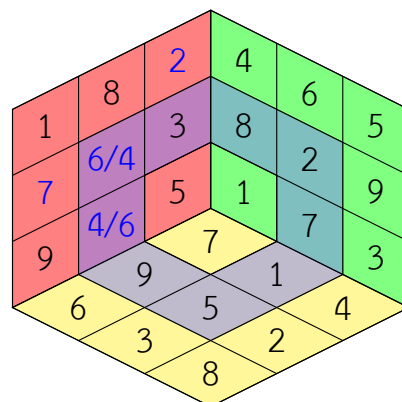
กรณีที่ 54



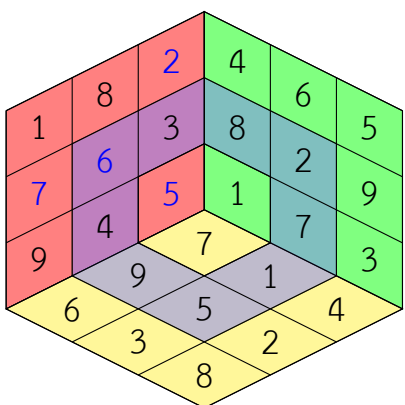
กรณีที่ 55



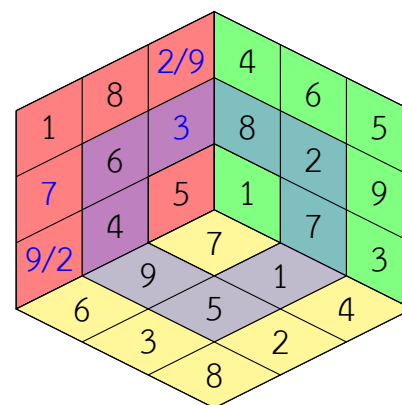
กรณีที่ 56



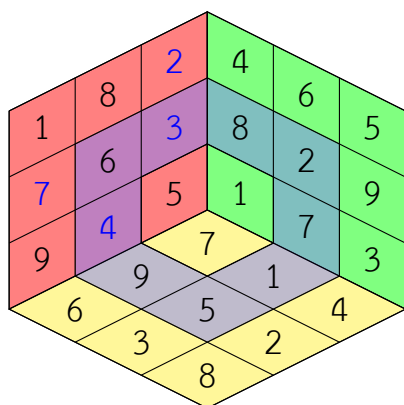
กรณีที่ 57



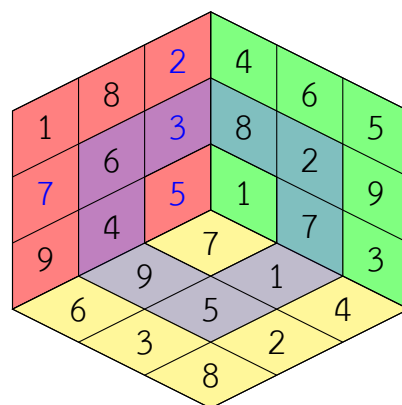
กรณีที่ 58



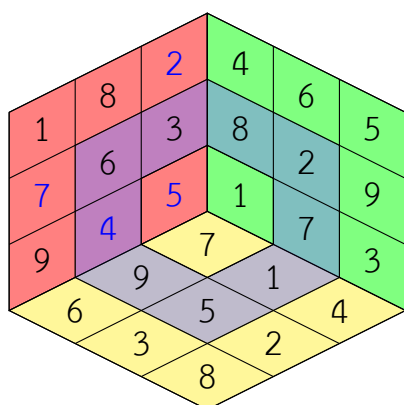
กรณีที่ 59



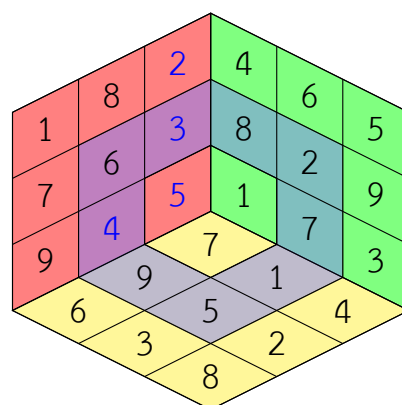
กรณีที่ 60



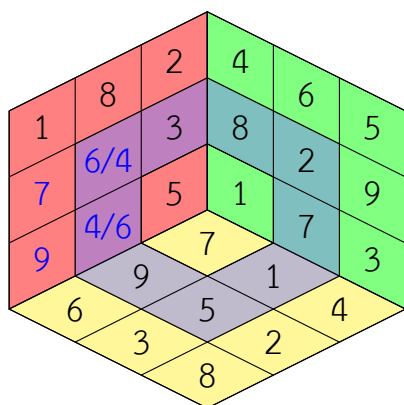
กรณีที่ 61



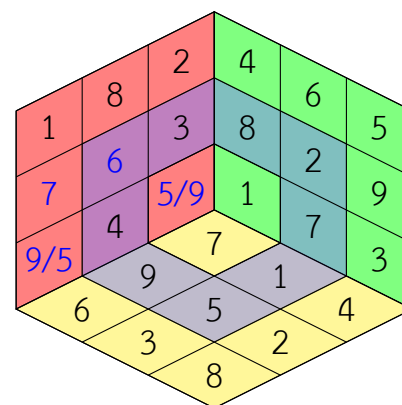
กรณีที่ 62



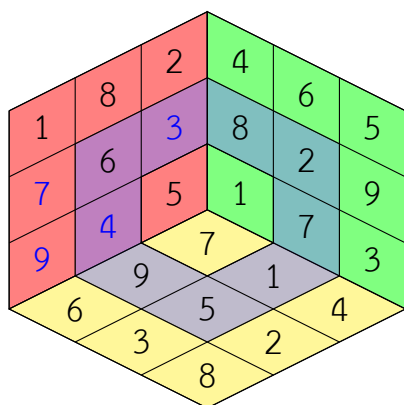
กรณีที่ 63



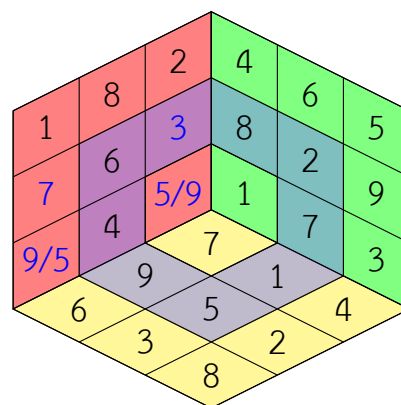
กรณีที่ 64



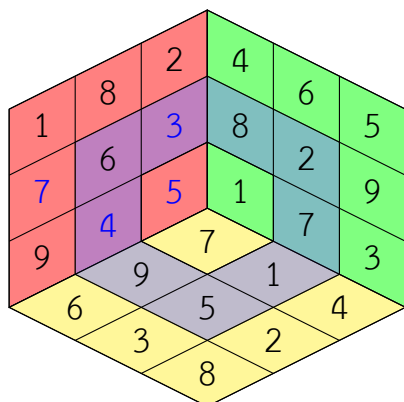
กรณีที่ 65



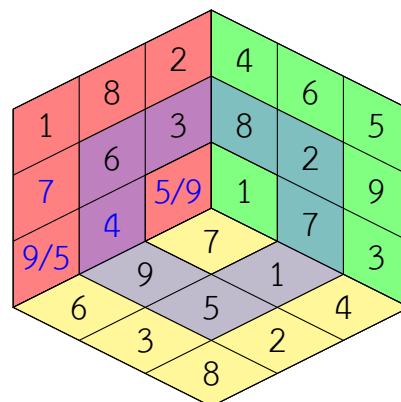
กรณีที่ 66



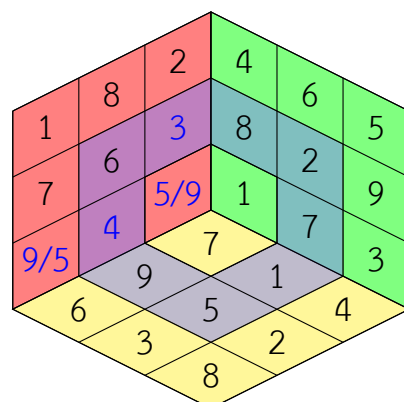
กรณีที่ 67



กรณีที่ 68



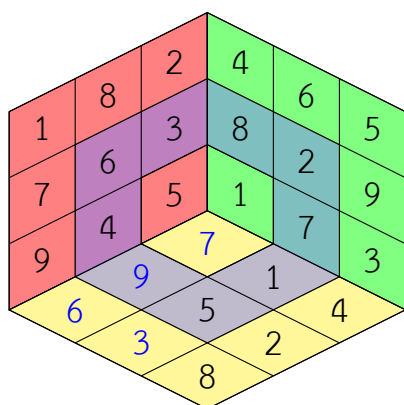
กรณีที่ 69



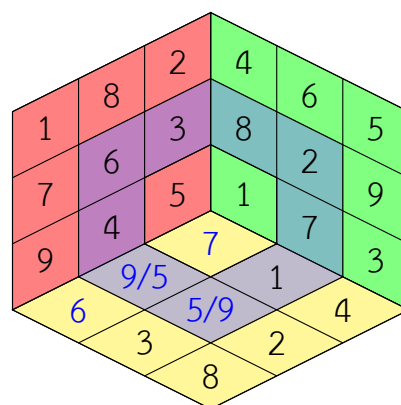
จากตัวอย่าง 43 จะได้ว่า $n(5, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 34 กรณีจาก 126 กรณี

ตัวอย่าง 44 $n(R, Y, G) = n(9, 5, 9)$ โดยพิจารณาเพียง 105 กรณียจาก 126 กรณียและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

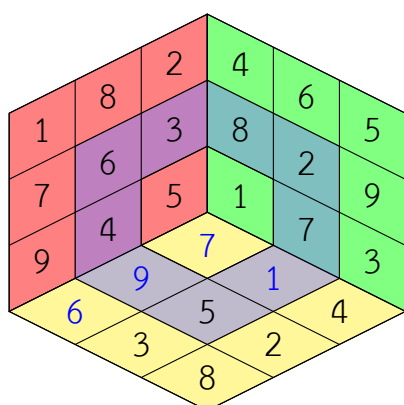
กรณีที่ 1



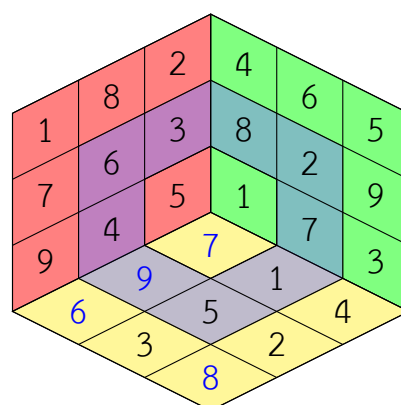
กรณีที่ 2



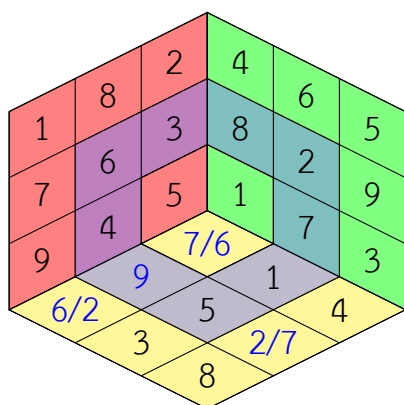
กรณีที่ 3



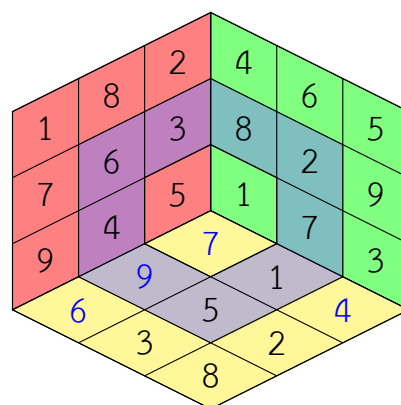
กรณีที่ 4



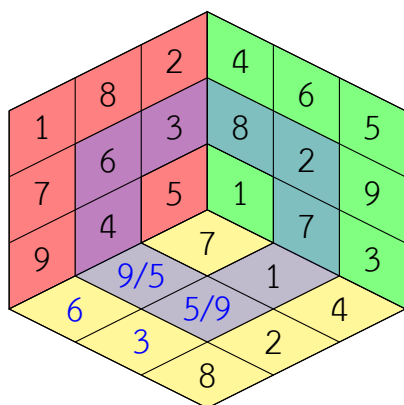
กรณีที่ 5



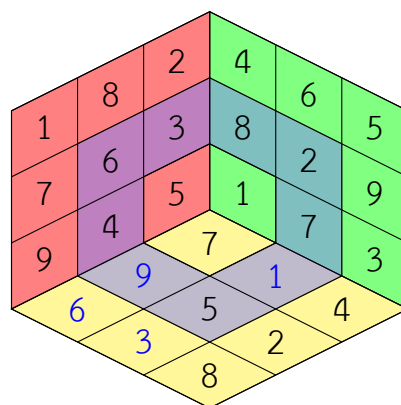
กรณีที่ 6



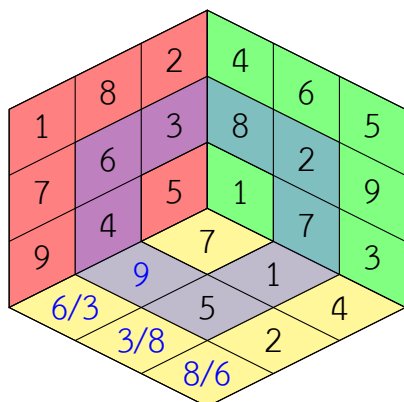
กรณีที่ 7



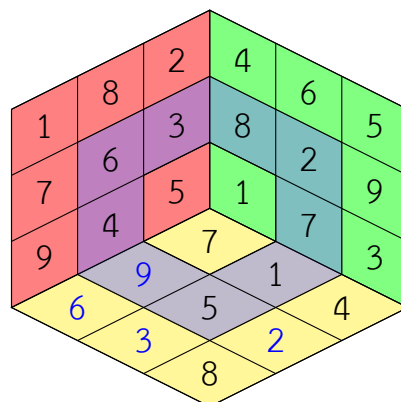
กรณีที่ 8



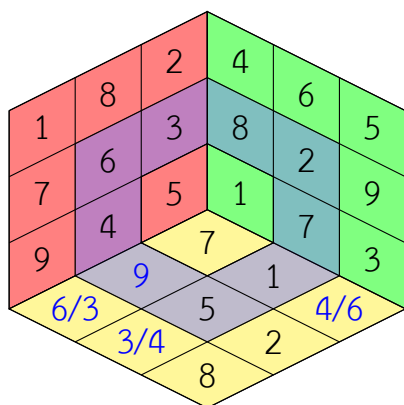
กรณีที่ 9



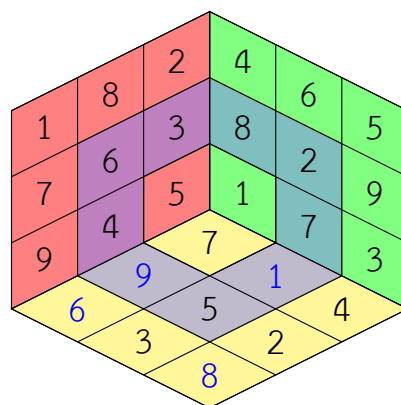
กรณีที่ 10



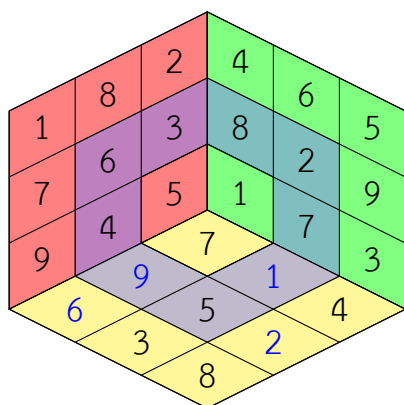
กรณีที่ 11



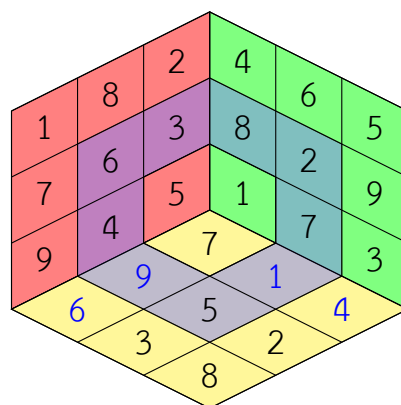
กรณีที่ 12



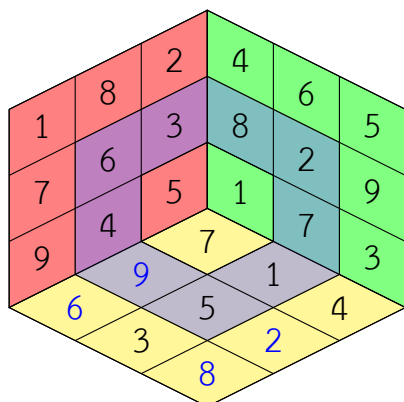
กรณีที่ 13



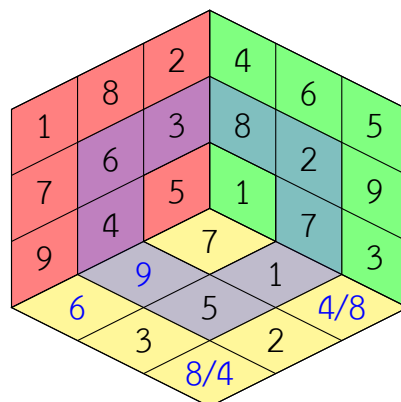
กรณีที่ 14



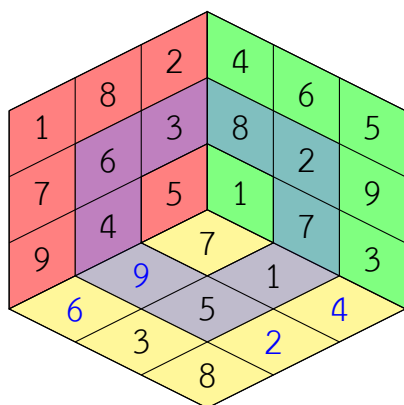
กรณีที่ 15



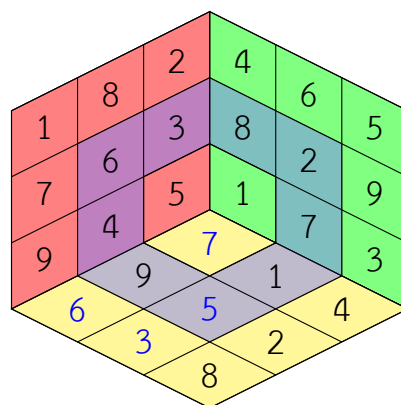
กรณีที่ 16



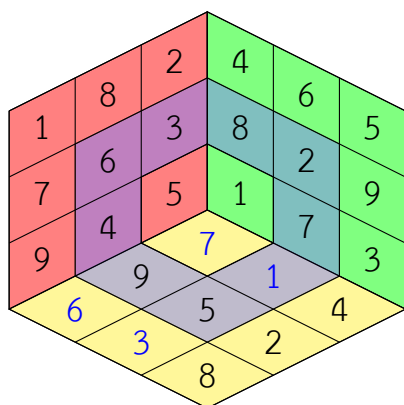
กรณีที่ 17



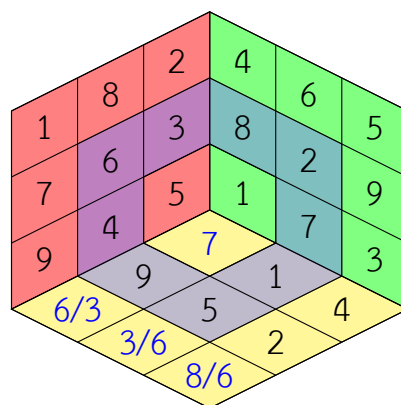
กรณีที่ 18



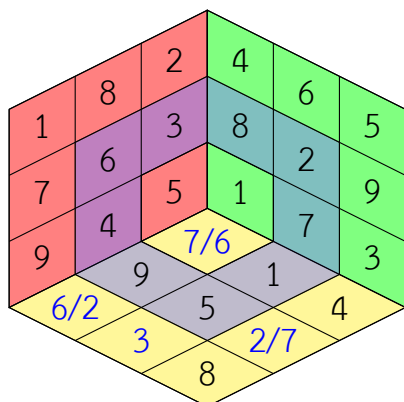
กรณีี่ 19



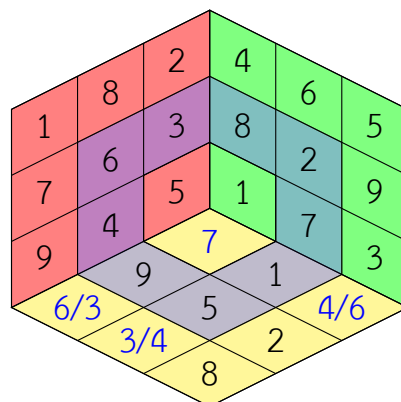
กรณีี่ 20



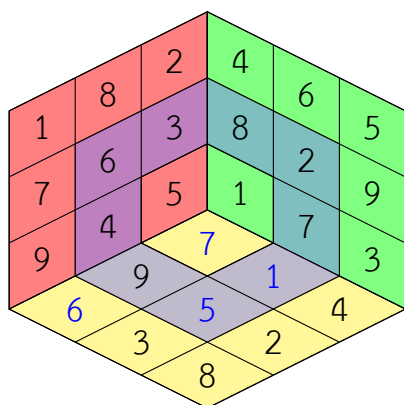
กรณีี่ 21



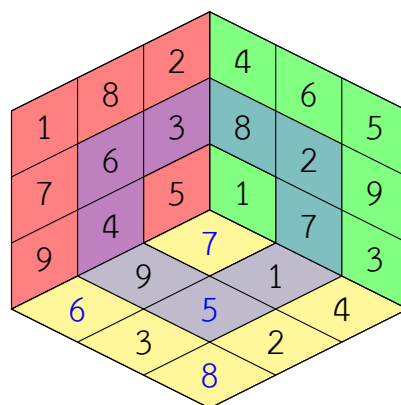
กรณีี่ 22



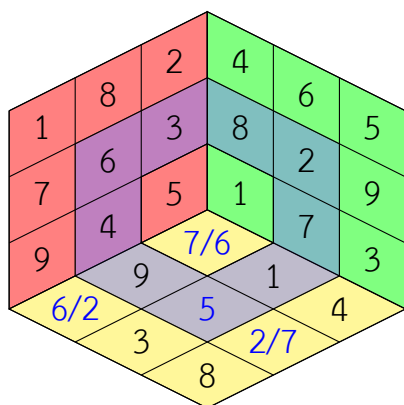
กรณีี่ 23



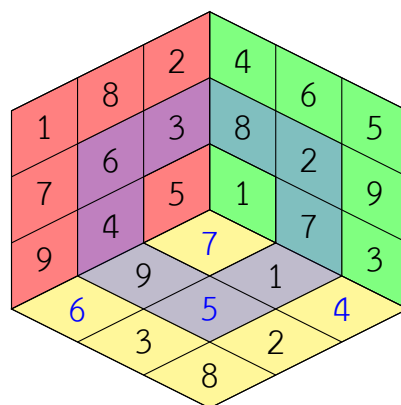
กรณีี่ 24



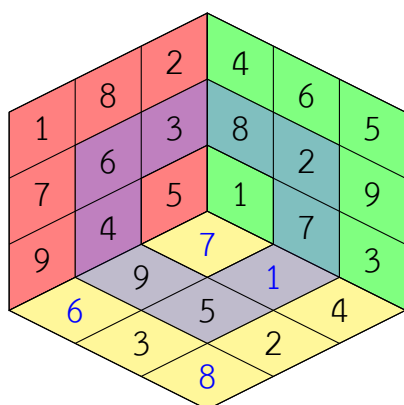
กรณีที่ 25



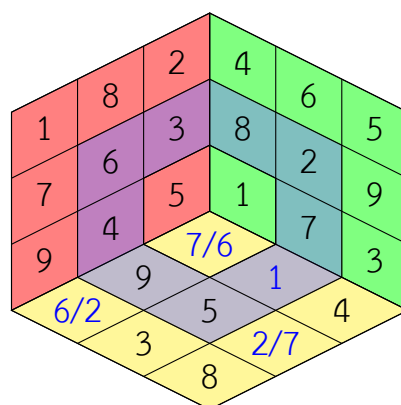
กรณีที่ 26



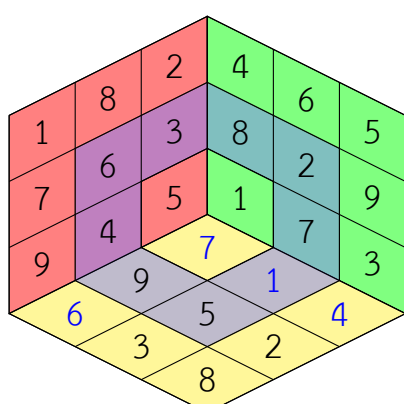
กรณีที่ 27



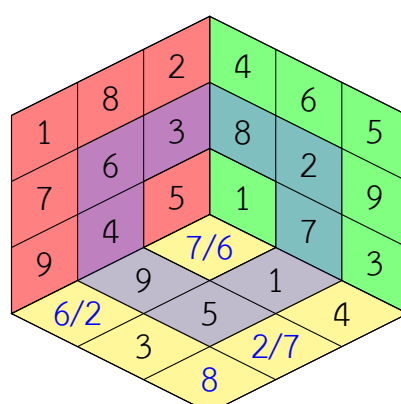
กรณีที่ 28



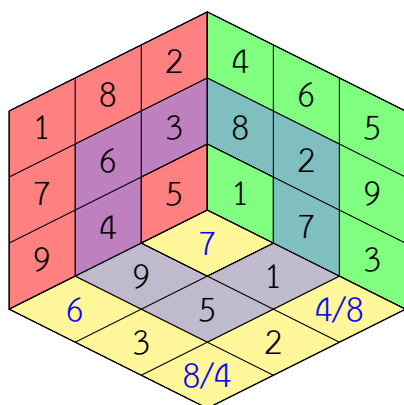
กรณีที่ 29



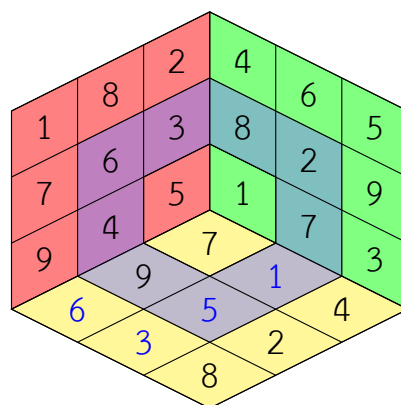
กรณีที่ 30



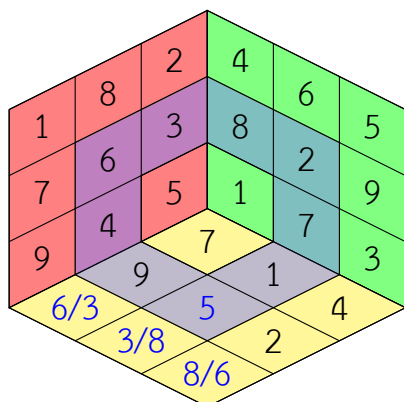
กรณีที่ 31



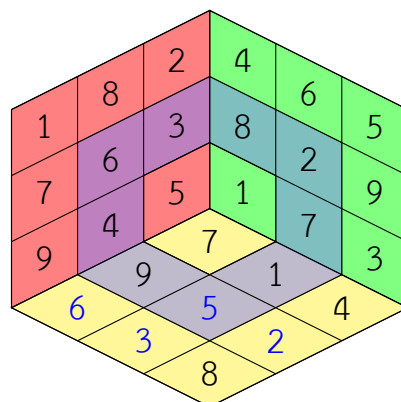
กรณีที่ 32



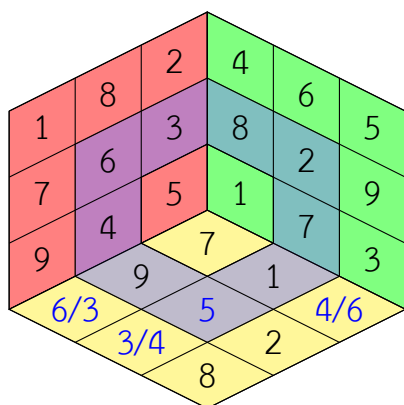
กรณีที่ 33



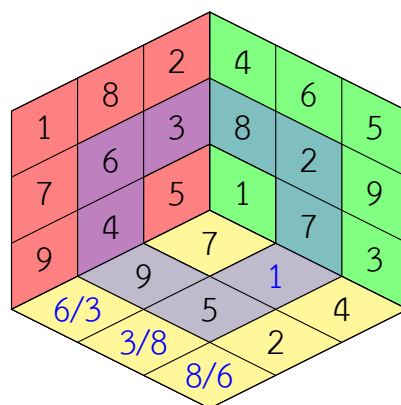
กรณีที่ 34



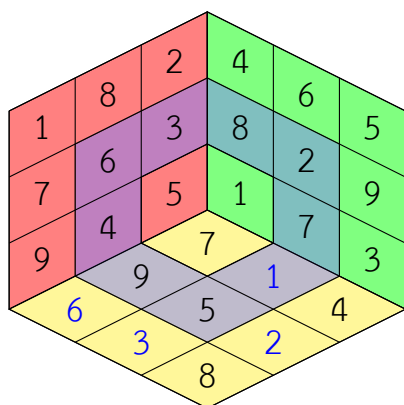
กรณีที่ 35



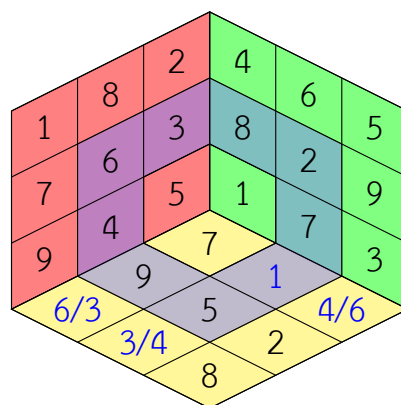
กรณีที่ 36



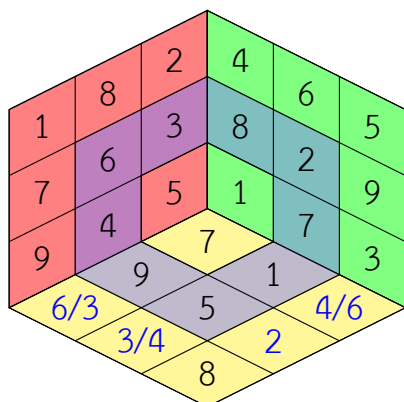
กรณีที่ 37



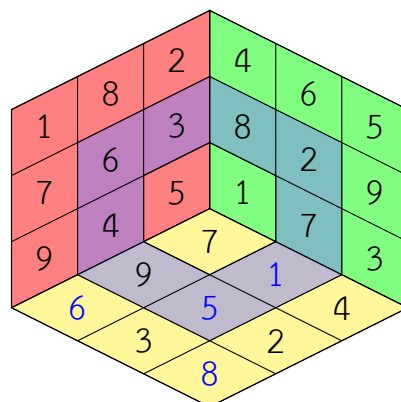
กรณีที่ 38



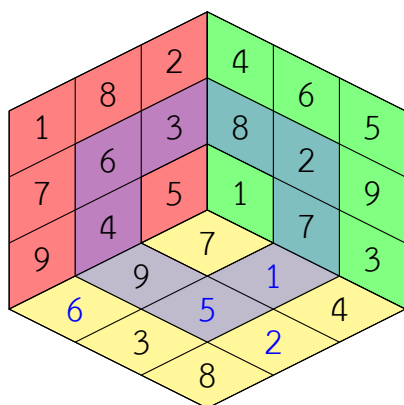
กรณีที่ 39



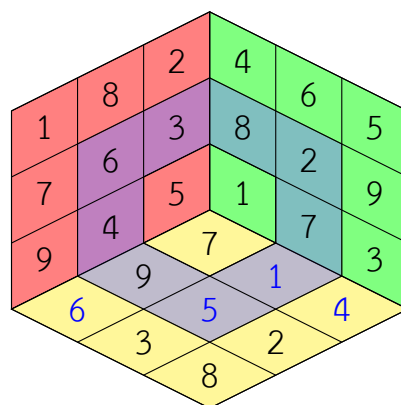
กรณีที่ 40



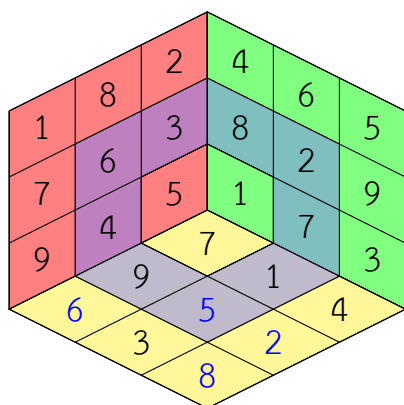
กรณีที่ 41



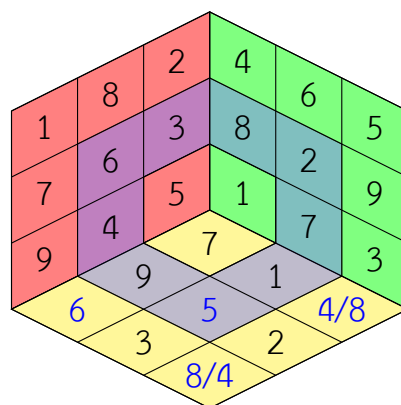
กรณีที่ 42



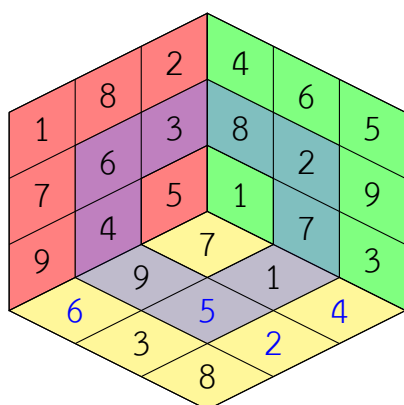
กรณีี่ 43



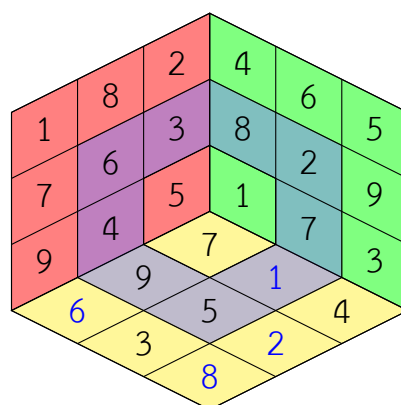
กรณีี่ 44



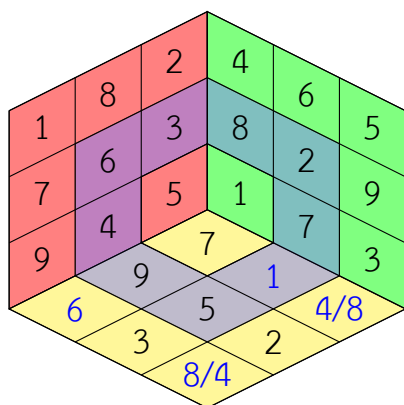
กรณีี่ 45



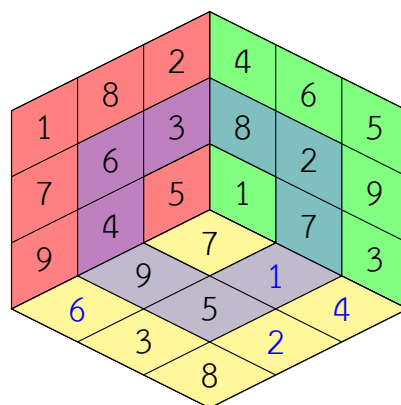
กรณีี่ 46



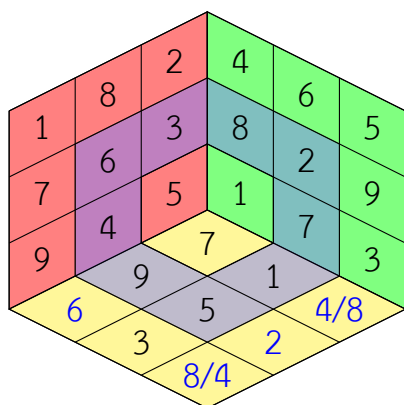
กรณีี่ 47



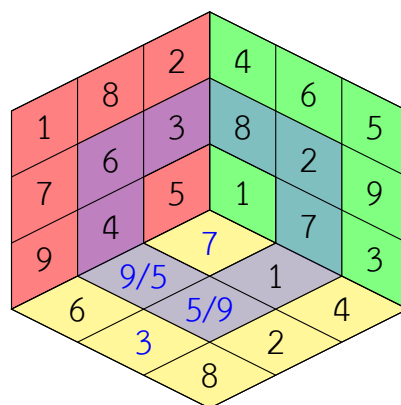
กรณีี่ 48



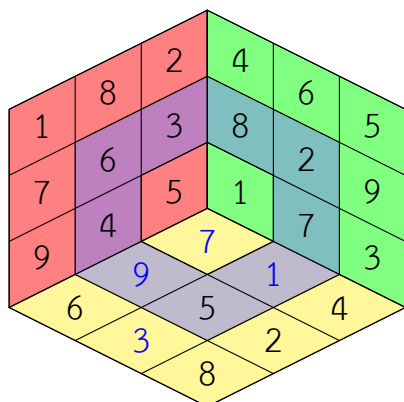
กรณีี่ 49



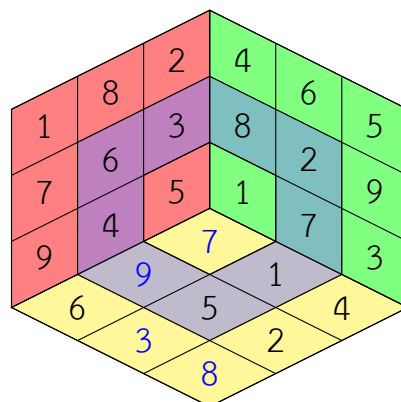
กรณีี่ 50



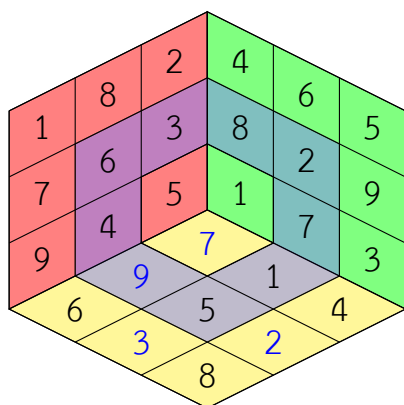
กรณีี่ 51



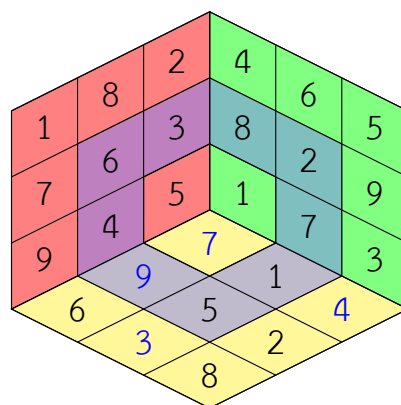
กรณีี่ 52



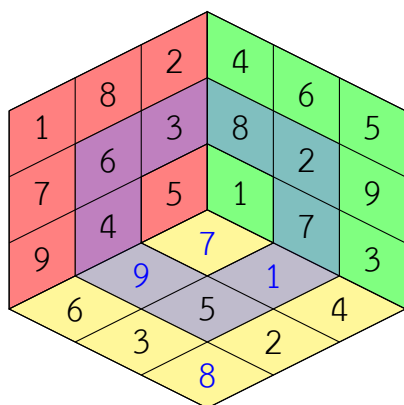
กรณีี่ 53



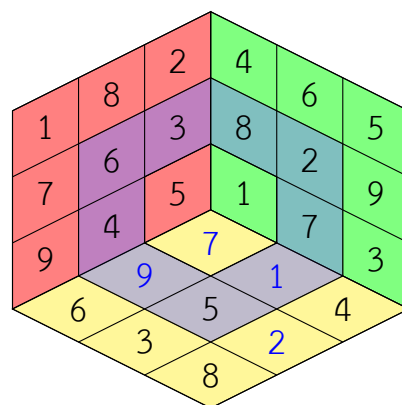
กรณีี่ 54



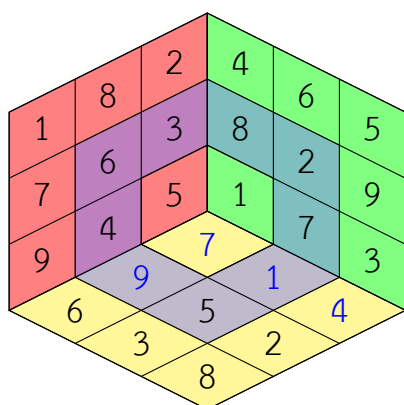
กรณีที่ 55



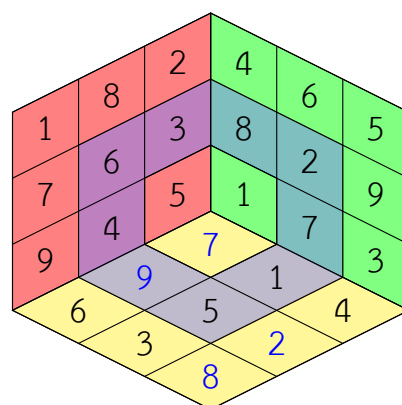
กรณีที่ 56



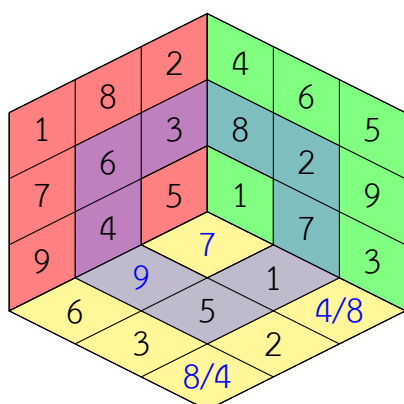
กรณีที่ 57



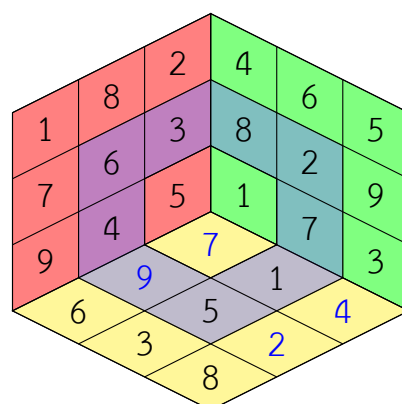
กรณีที่ 58



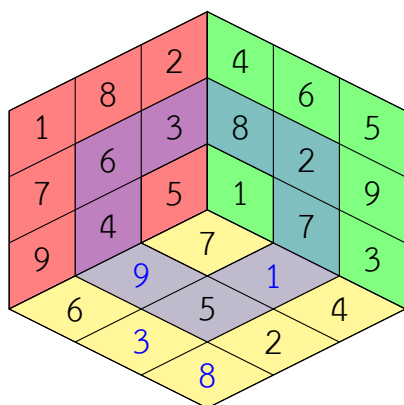
กรณีที่ 59



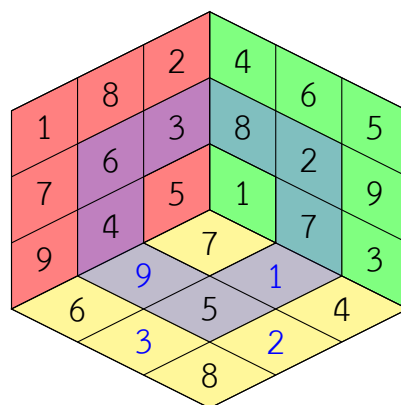
กรณีที่ 60



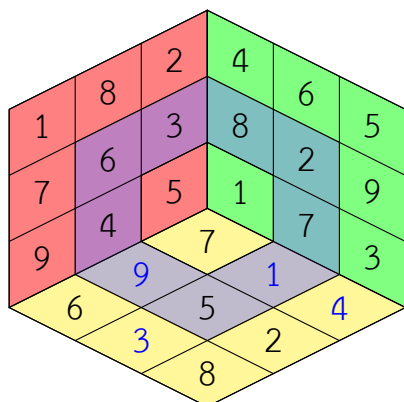
กรณีที่ 61



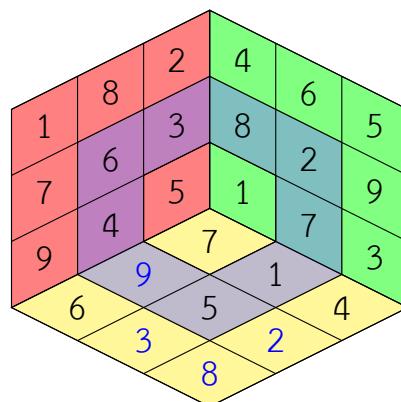
กรณีที่ 62



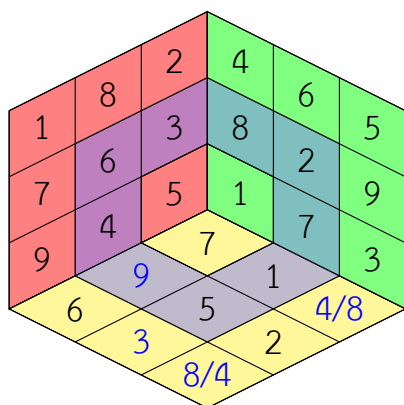
กรณีที่ 63



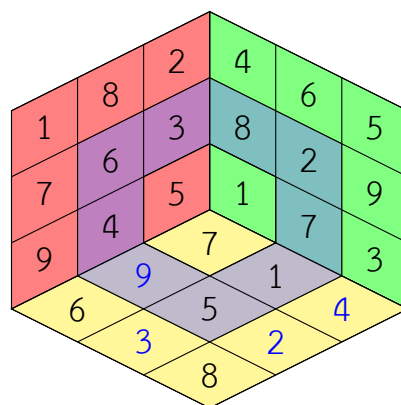
กรณีที่ 64



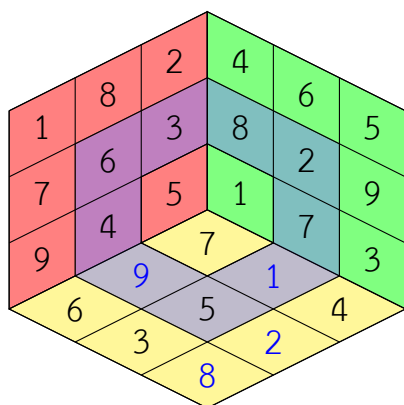
กรณีที่ 65



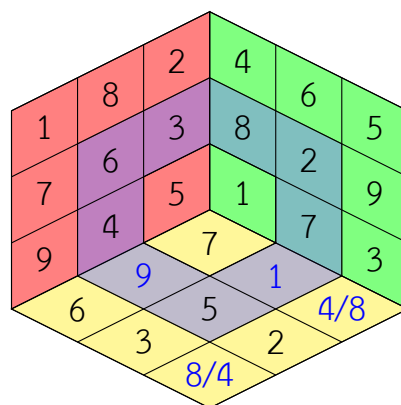
กรณีที่ 66



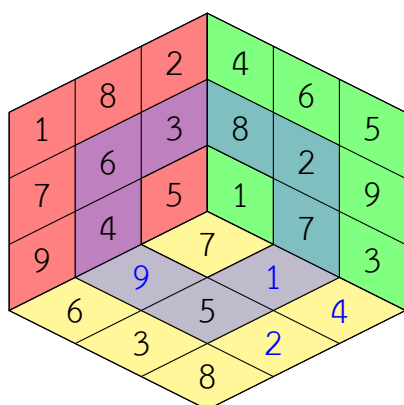
กรณีที่ 67



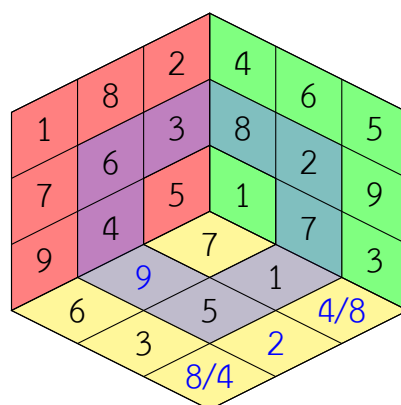
กรณีที่ 68



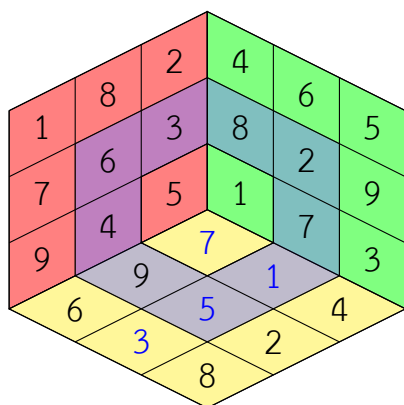
กรณีที่ 69



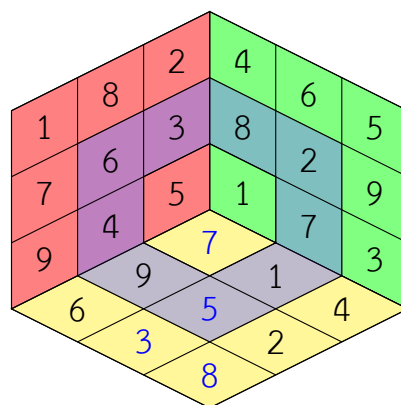
กรณีที่ 70



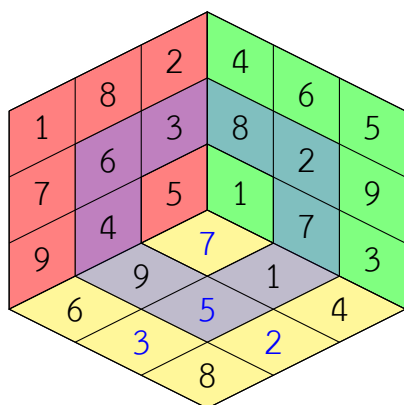
กรณีที่ 71



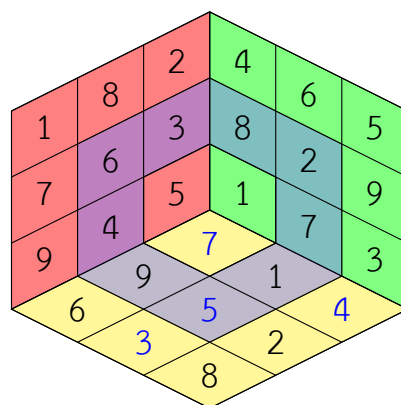
กรณีที่ 72



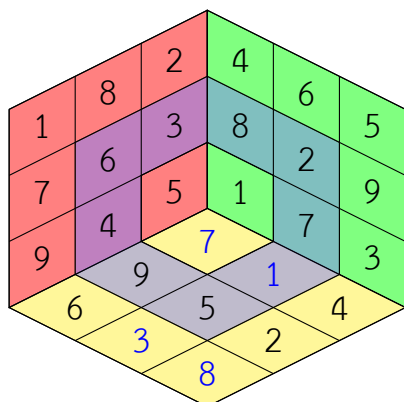
กรณีที่ 73



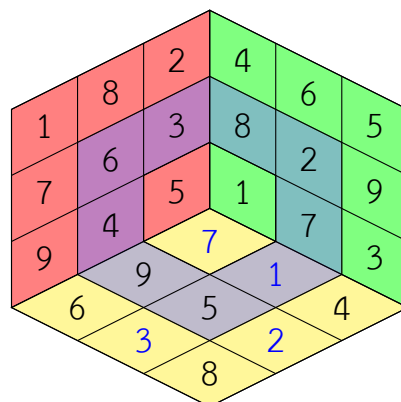
กรณีที่ 74



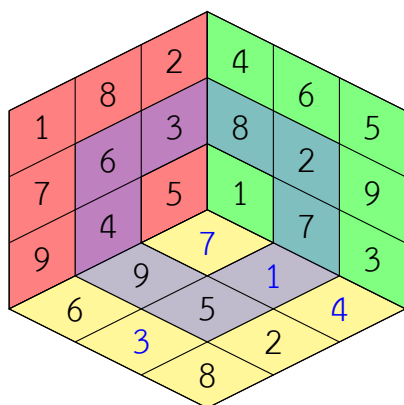
กรณีที่ 75



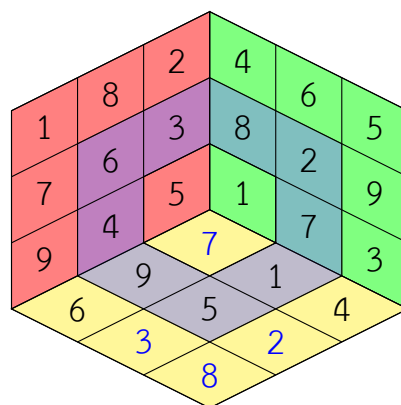
กรณีที่ 76



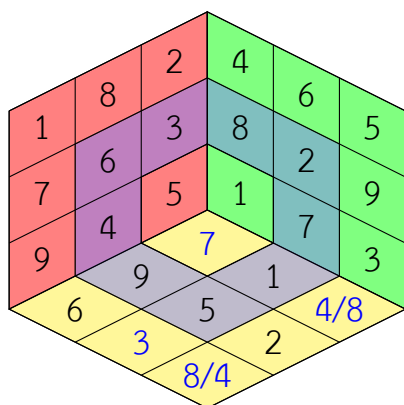
กรณีที่ 77



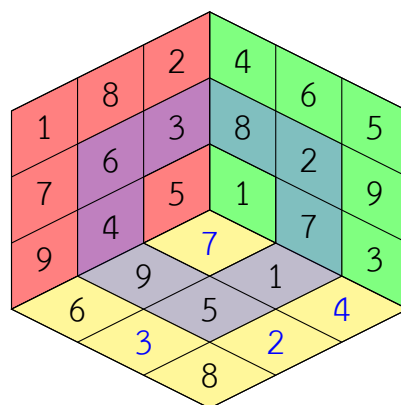
กรณีที่ 78



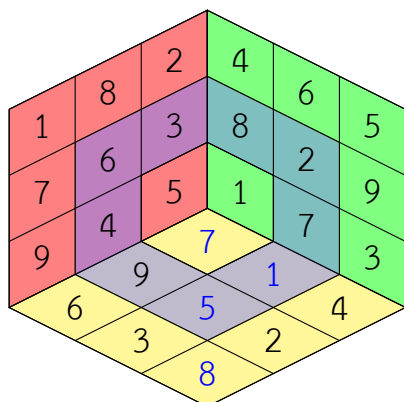
กรณีที่ 79



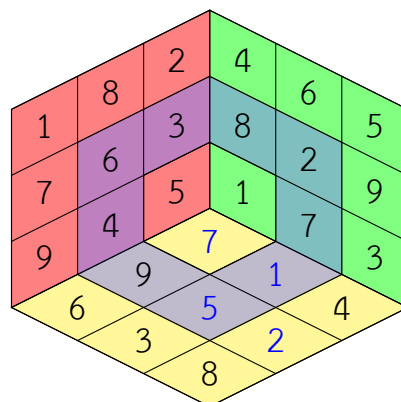
กรณีที่ 80



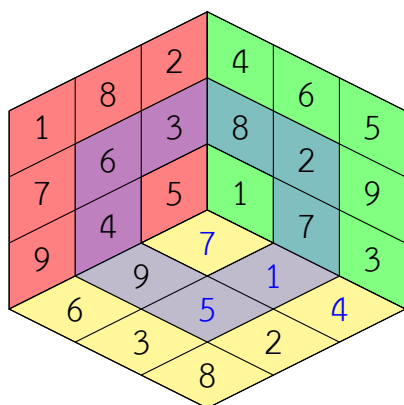
กรณีที่ 81



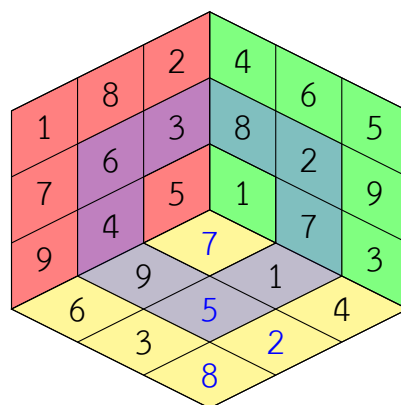
กรณีที่ 82



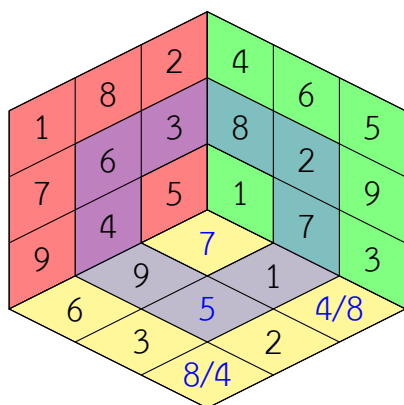
กรณีที่ 83



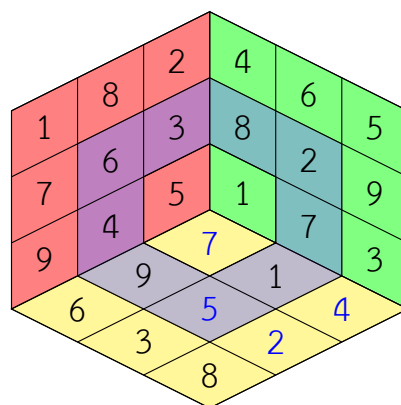
กรณีที่ 84



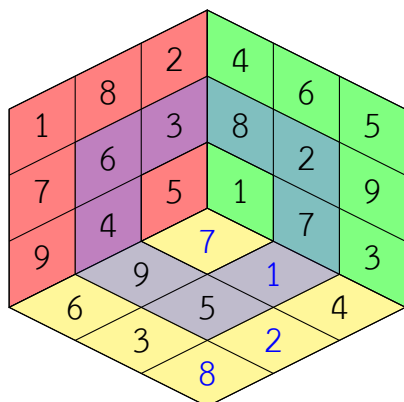
กรณีที่ 85



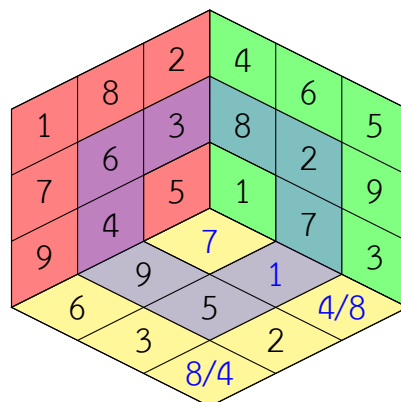
กรณีที่ 86



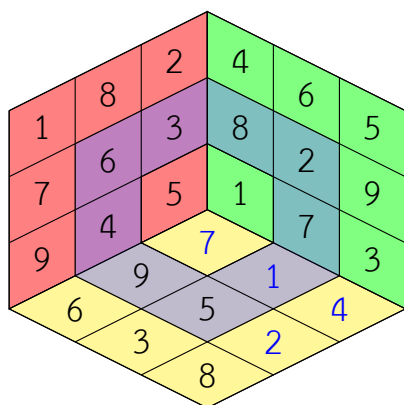
กรณีที่ 87



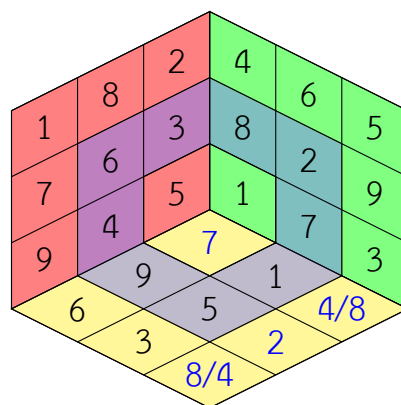
กรณีที่ 88



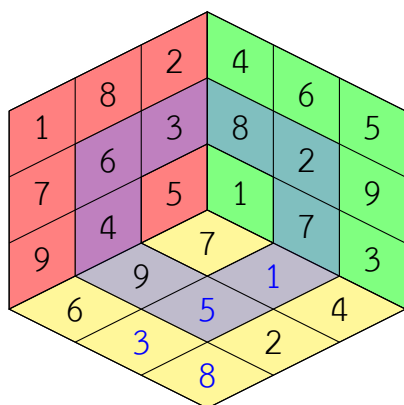
กรณีที่ 89



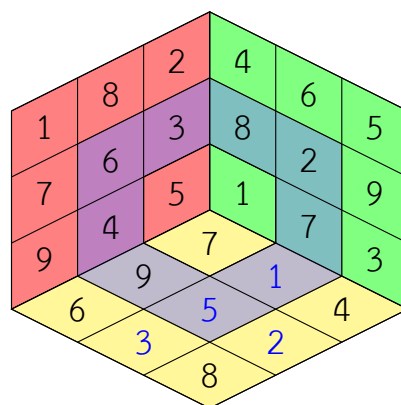
กรณีที่ 90



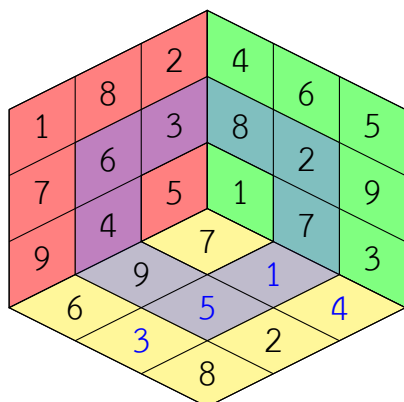
กรณีที่ 91



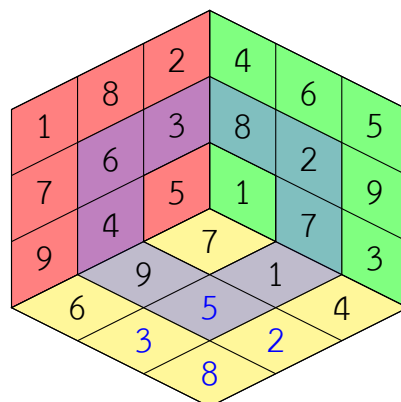
กรณีที่ 92



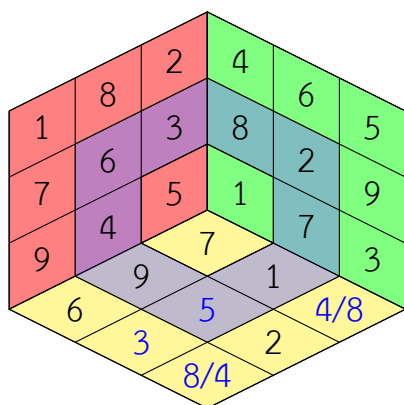
กรณีที่ 93



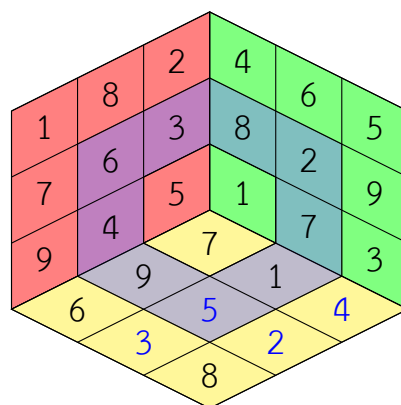
กรณีที่ 94



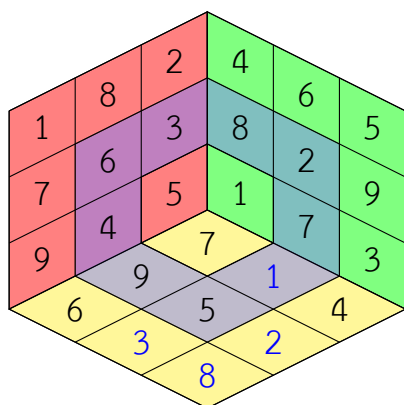
กรณีที่ 95



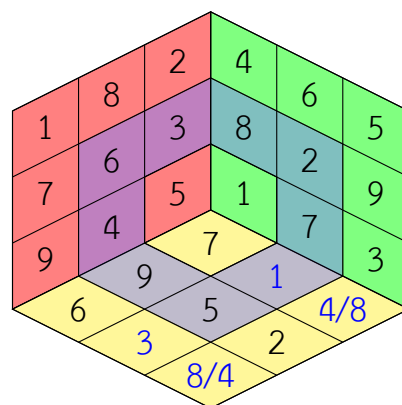
กรณีที่ 96



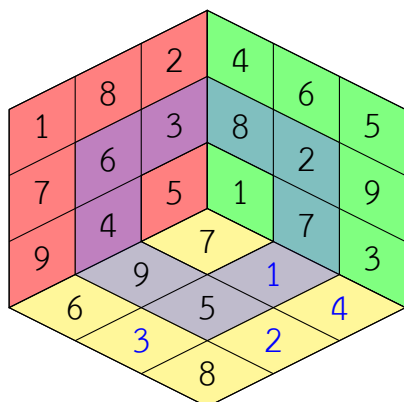
กรณีที่ 97



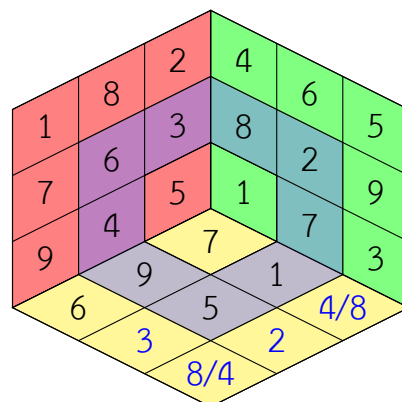
กรณีที่ 98



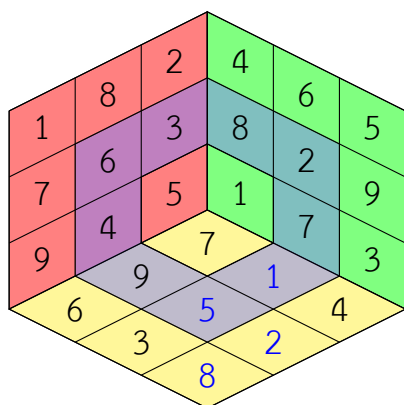
กรณีที่ 99



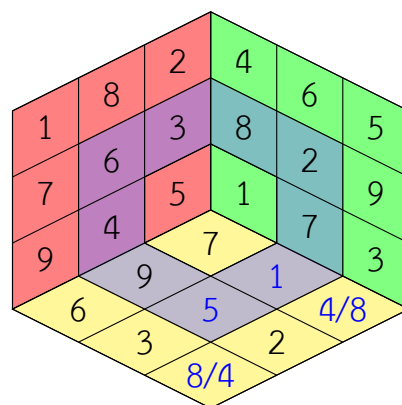
กรณีที่ 100



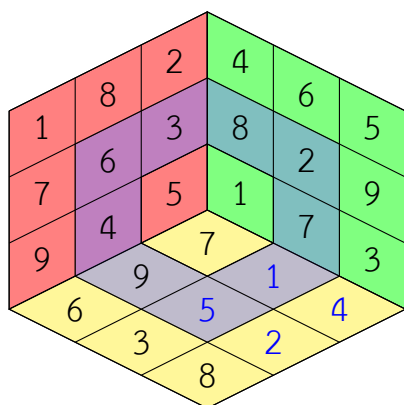
กรณีที่ 101



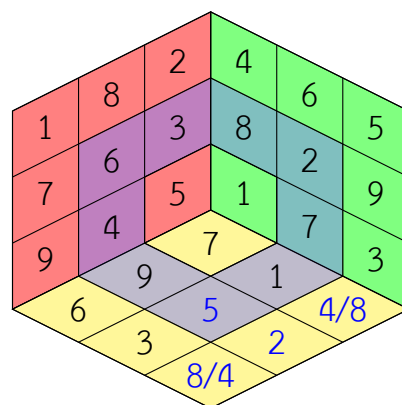
กรณีที่ 102



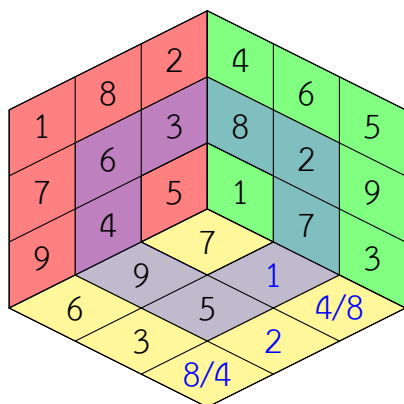
กรณีี่ 103



กรณีี่ 104



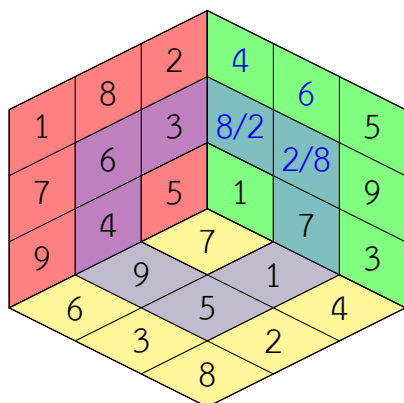
กรณีี่ 105



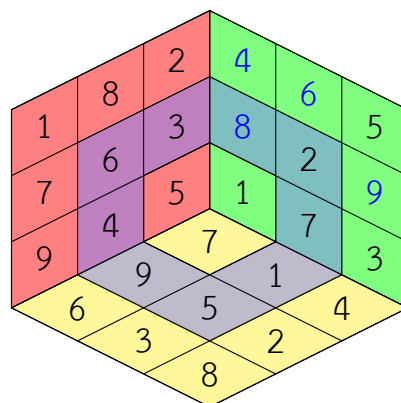
จากตัวอย่าง 44 จะได้ว่า $n(9, 5, 9)$ มีคำตอบเดียว 69 กรณีจาก 126 กรณี

ตัวอย่าง 45 $n(R, Y, G) = n(9, 9, 5)$ โดยพิจารณาเพียง 87 กรณีจาก 126 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

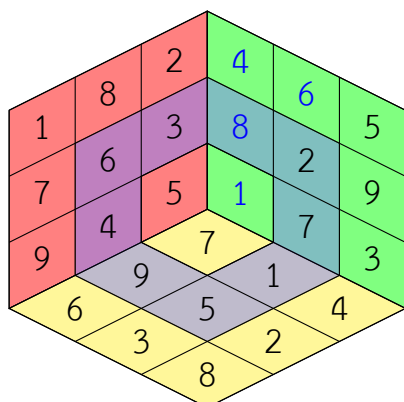
กรณีที่ 1



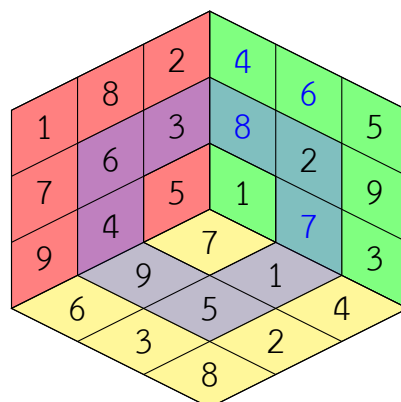
กรณีที่ 2



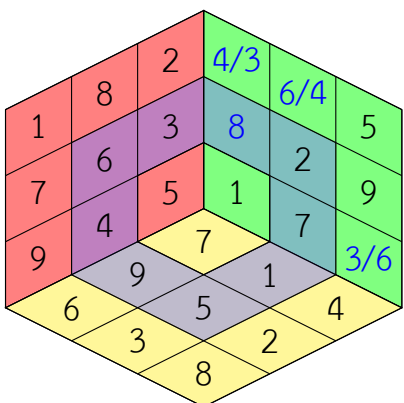
กรณีที่ 3



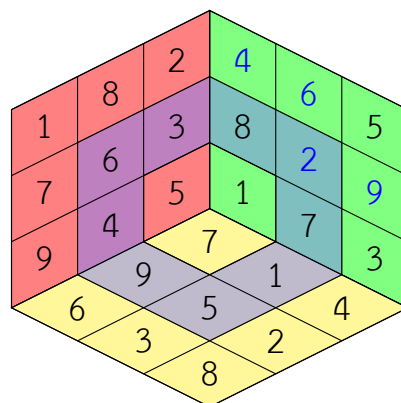
กรณีที่ 4



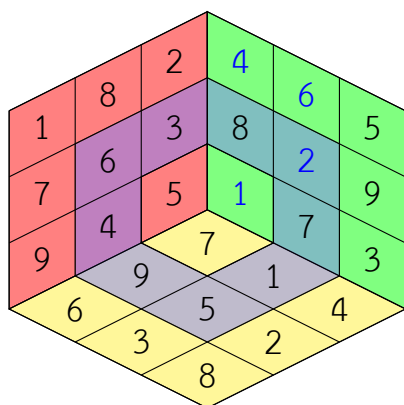
กรณีที่ 5



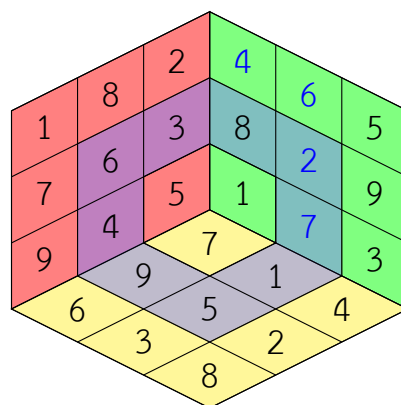
กรณีที่ 6



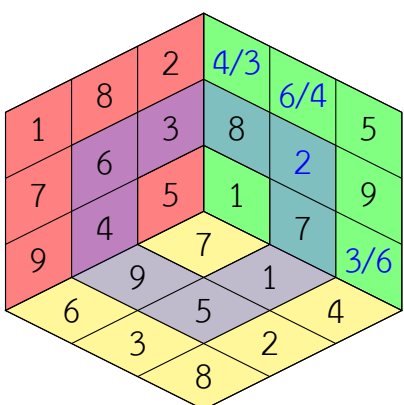
กรณีที่ 7



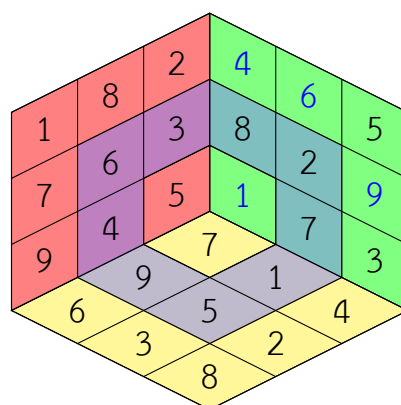
กรณีที่ 8



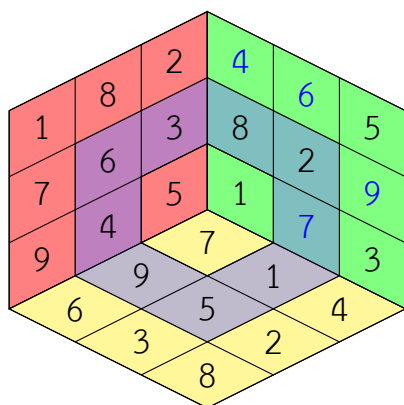
กรณีที่ 9



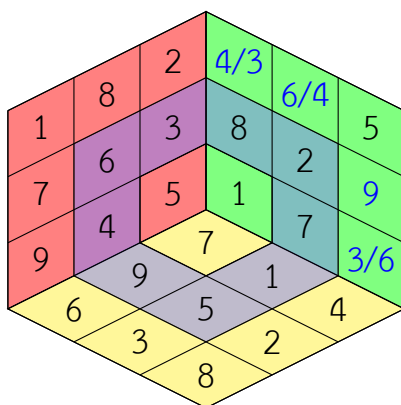
กรณีที่ 10



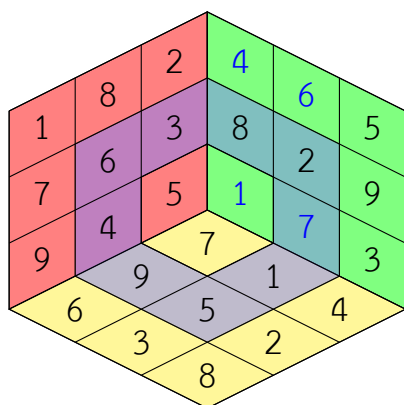
กรณีที่ 11



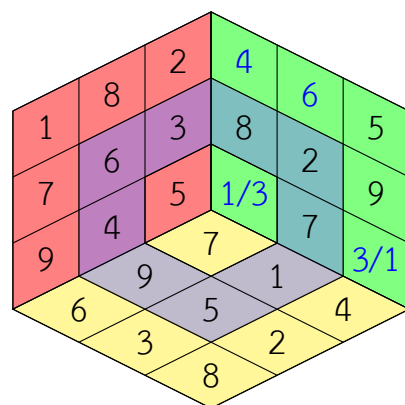
กรณีที่ 12



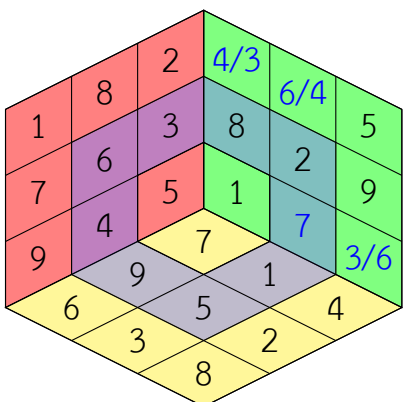
กรณีที่ 13



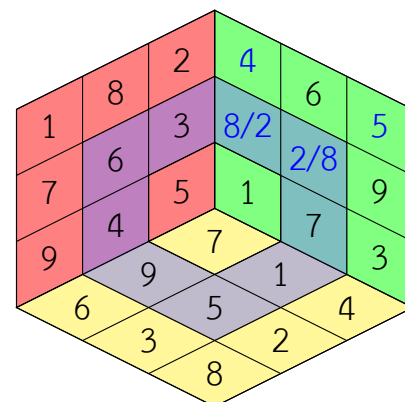
กรณีที่ 14



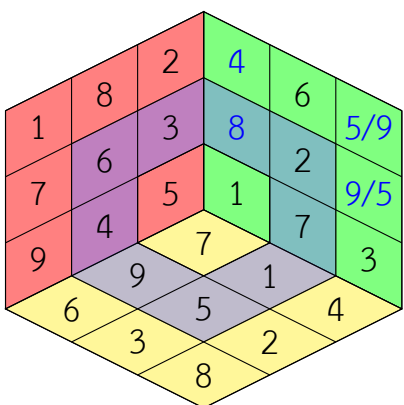
กรณีที่ 15



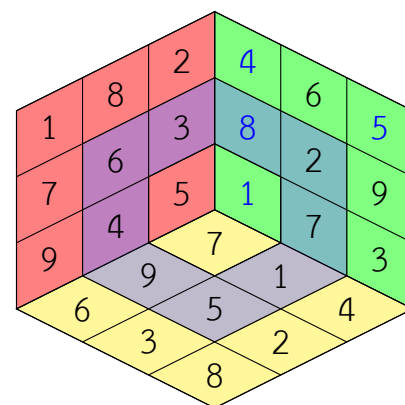
กรณีที่ 16



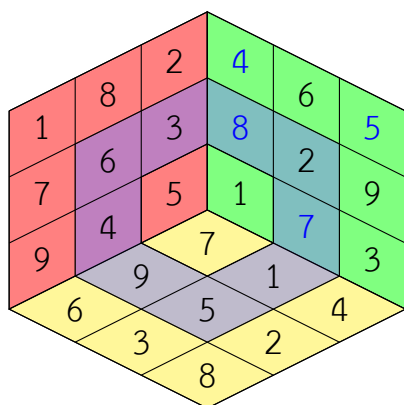
กรณีที่ 17



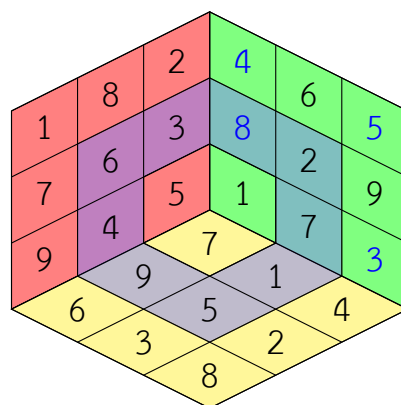
กรณีที่ 18



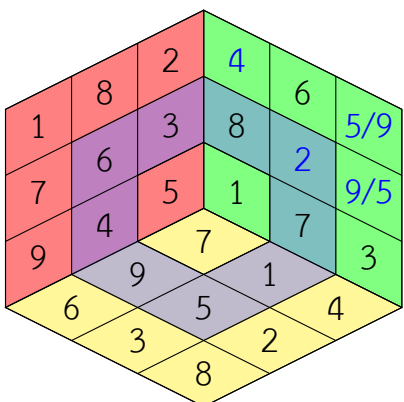
กรณีที่ 19



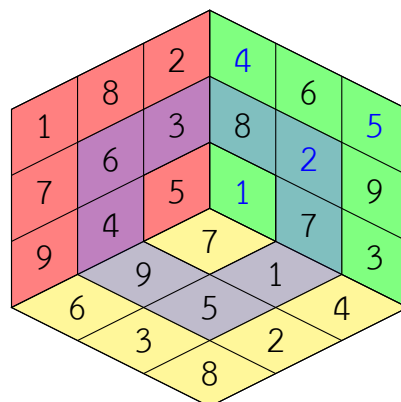
กรณีที่ 20



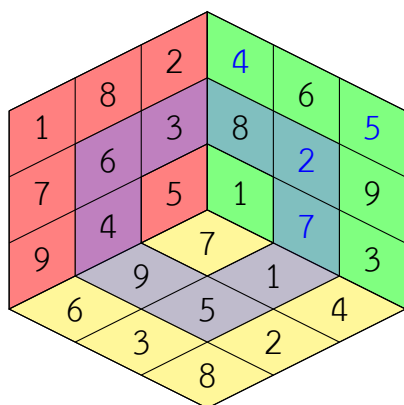
กรณีที่ 21



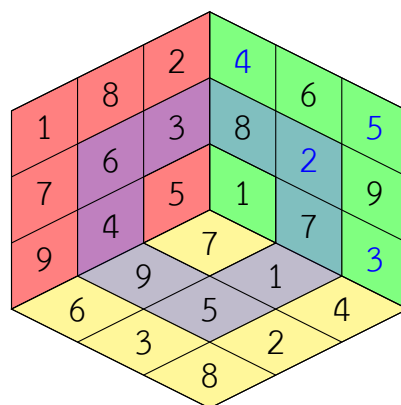
กรณีที่ 22



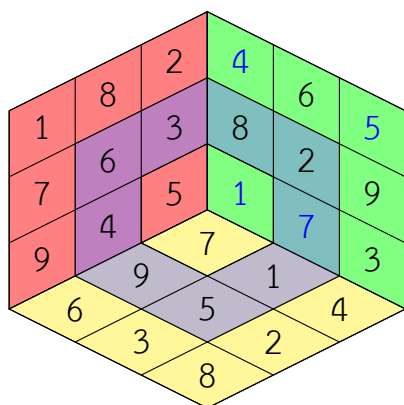
กรณีที่ 23



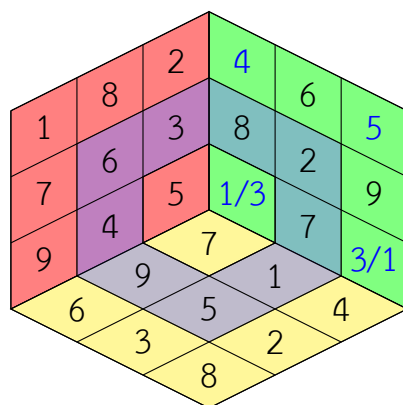
กรณีที่ 24



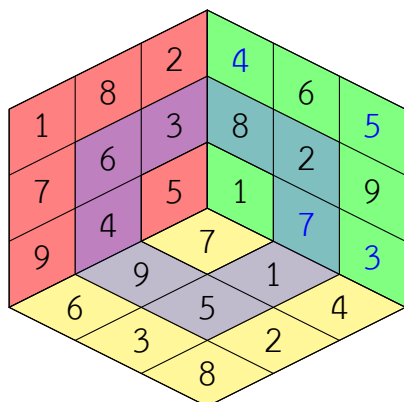
กรณีที่ 25



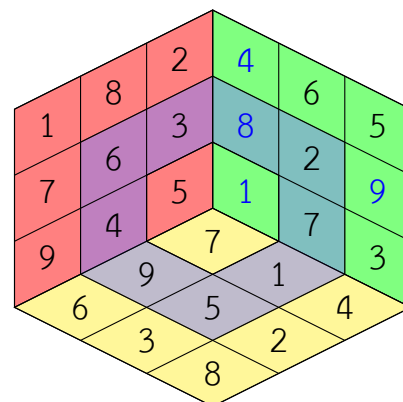
กรณีที่ 26



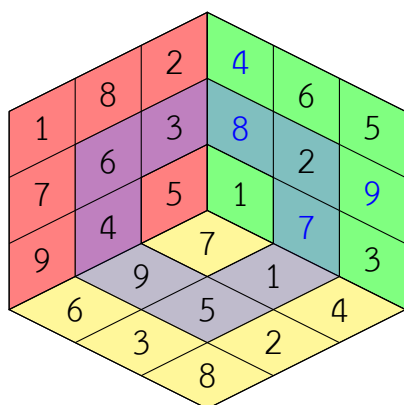
กรณีที่ 27



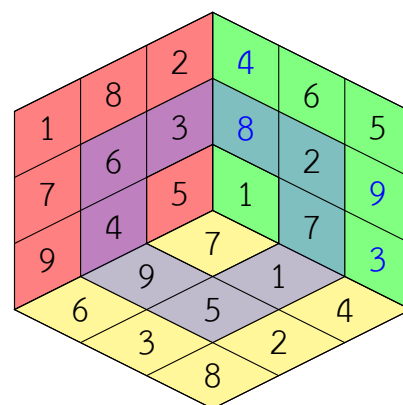
กรณีที่ 28



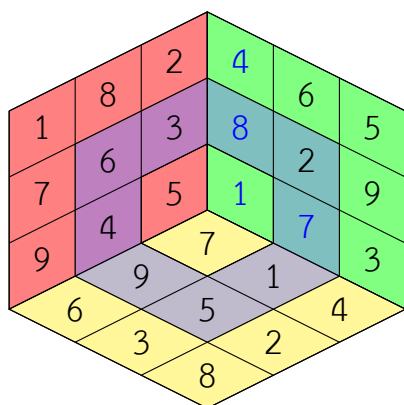
กรณีที่ 29



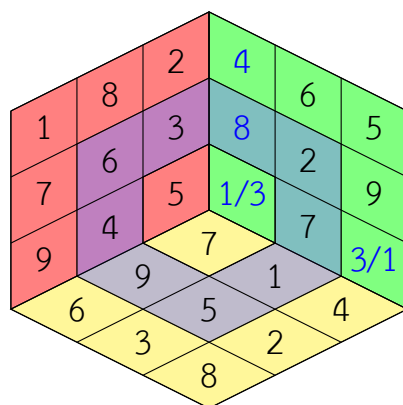
กรณีที่ 30



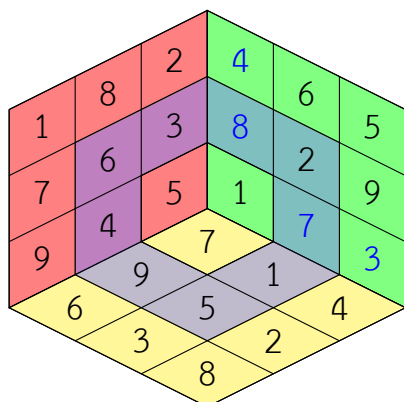
กรณีที่ 31



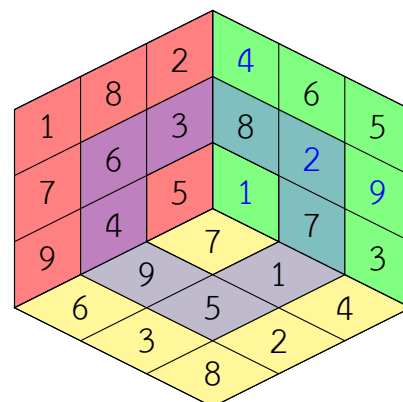
กรณีที่ 32



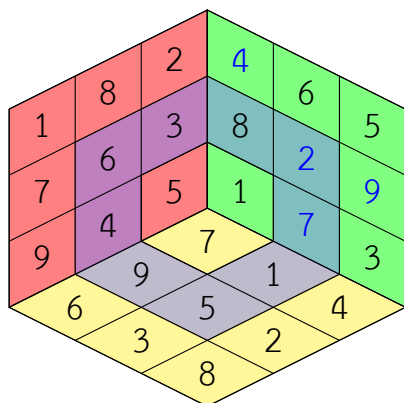
กรณีที่ 33



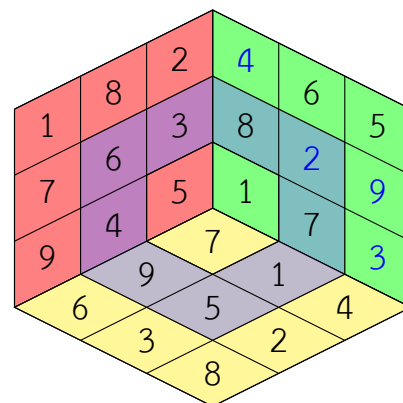
กรณีที่ 34



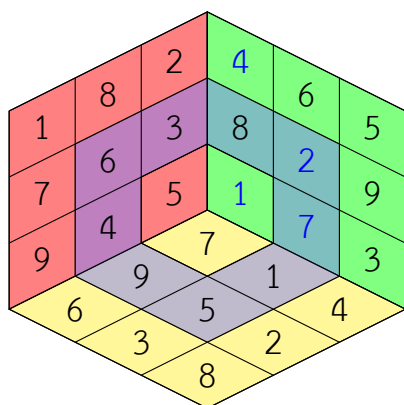
กรณีที่ 35



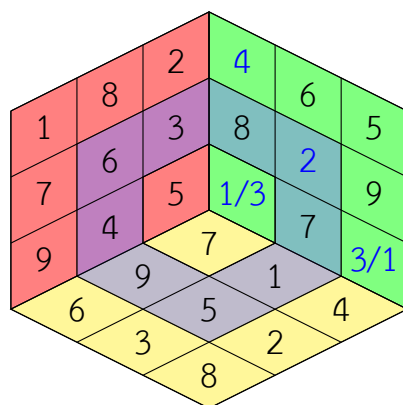
กรณีที่ 36



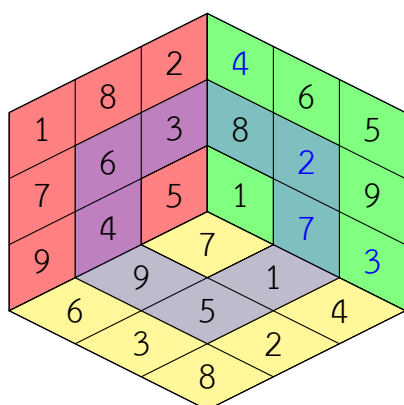
กรณีที่ 37



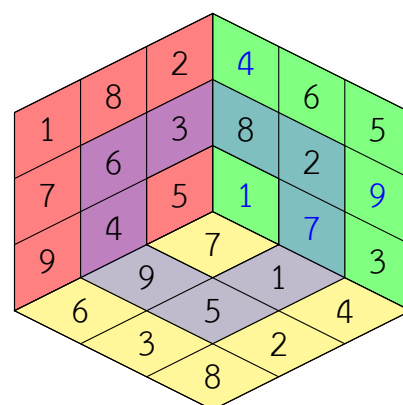
กรณีที่ 38



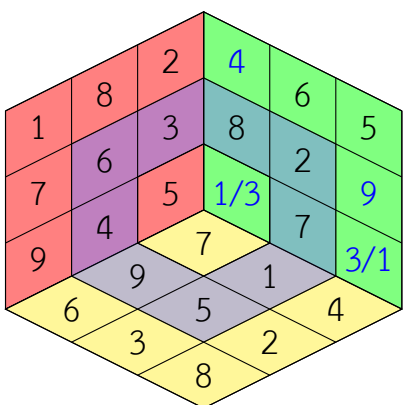
กรณีที่ 39



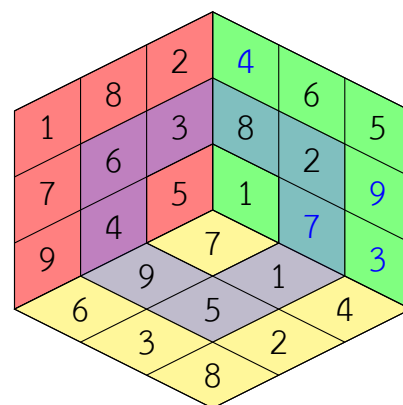
กรณีที่ 40



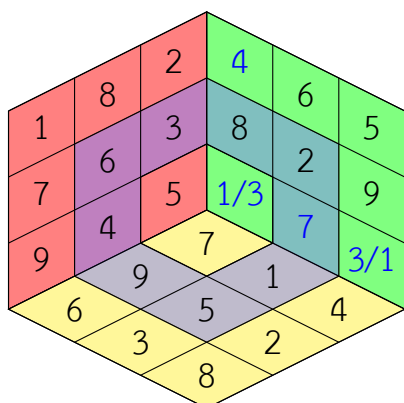
กรณีที่ 41



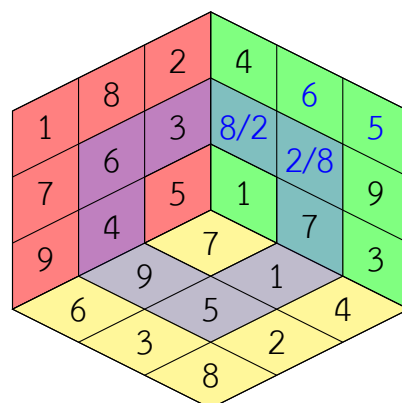
กรณีที่ 42



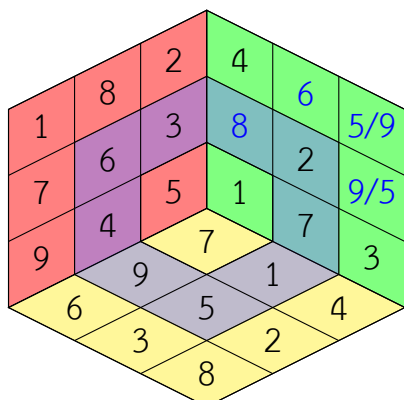
กรณีี่ที่ 43



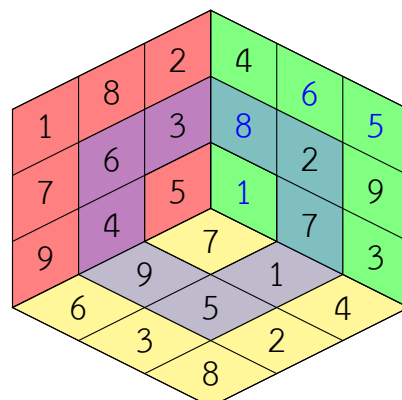
กรณีี่ที่ 44



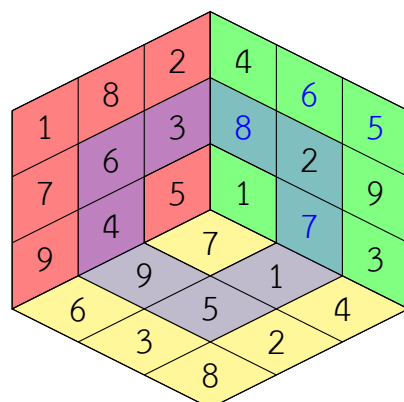
กรณีี่ที่ 45



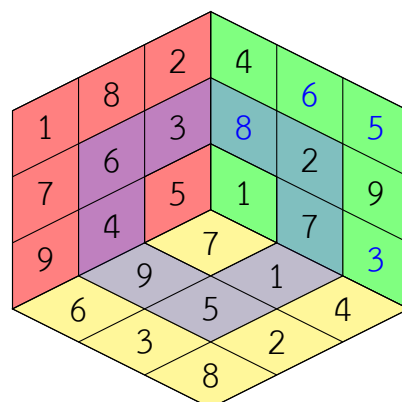
กรณีี่ที่ 46



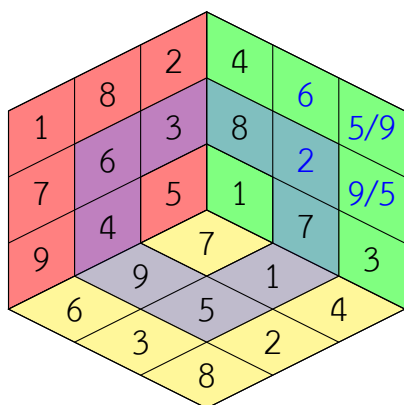
กรณีี่ที่ 47



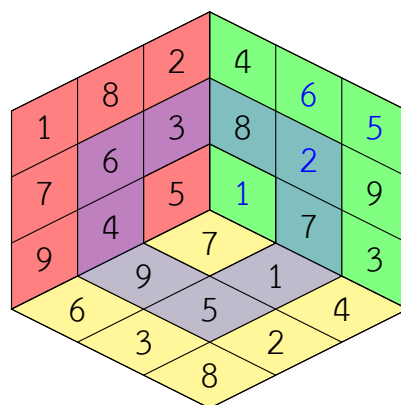
กรณีี่ที่ 48



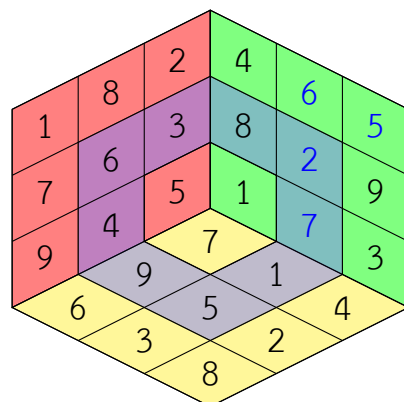
กรณีี่ที่ 49



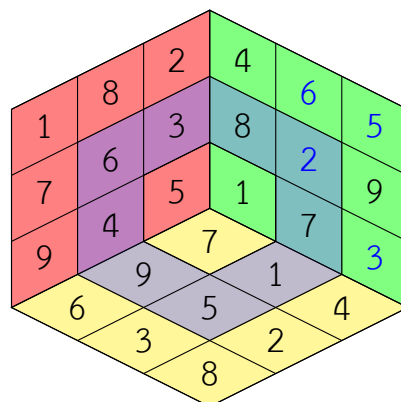
กรณีี่ที่ 50



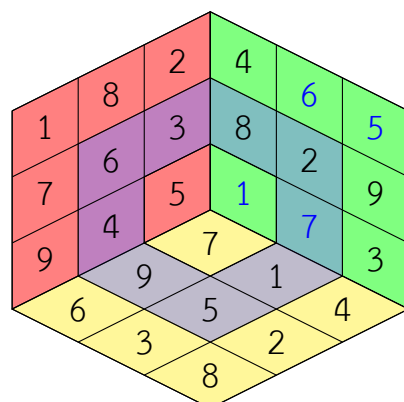
กรณีี่ที่ 51



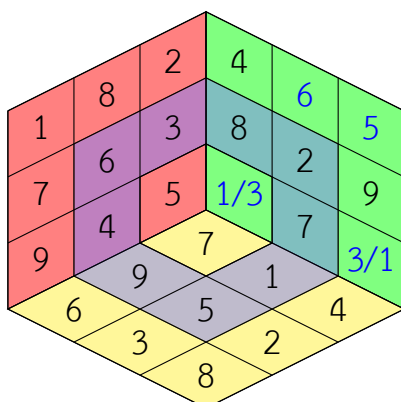
กรณีี่ที่ 52



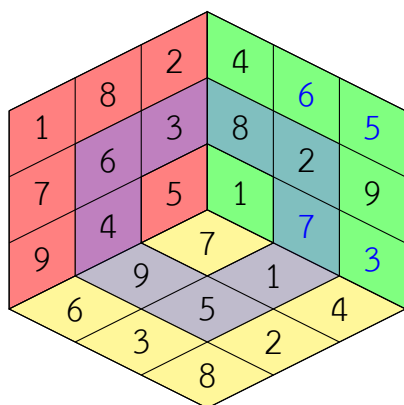
กรณีี่ที่ 53



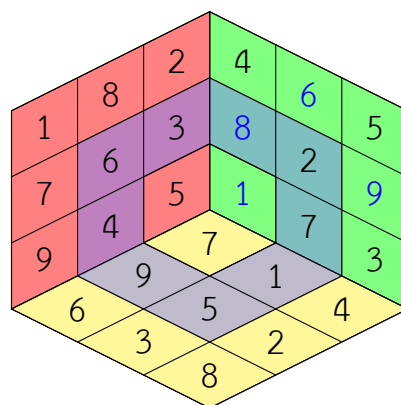
กรณีี่ที่ 54



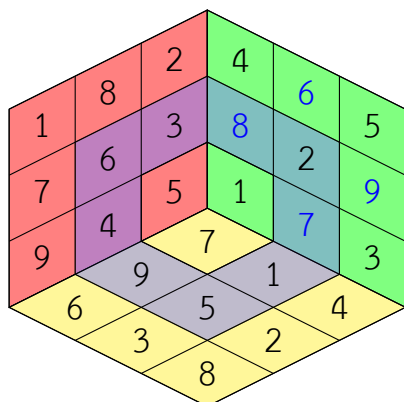
กรณีที่ 55



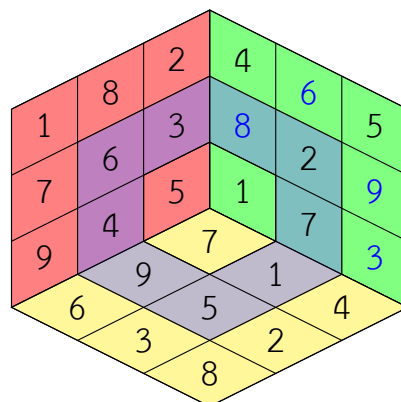
กรณีที่ 56



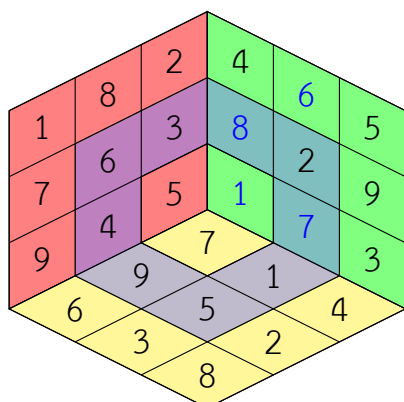
กรณีที่ 57



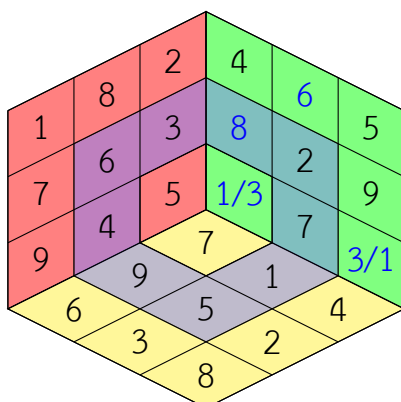
กรณีที่ 58



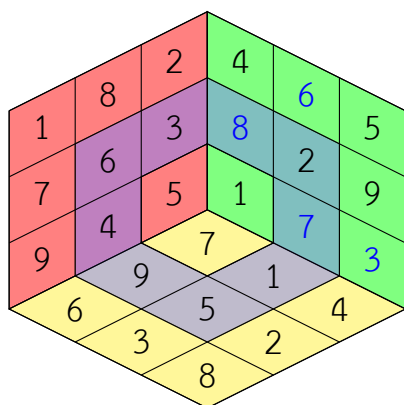
กรณีที่ 59



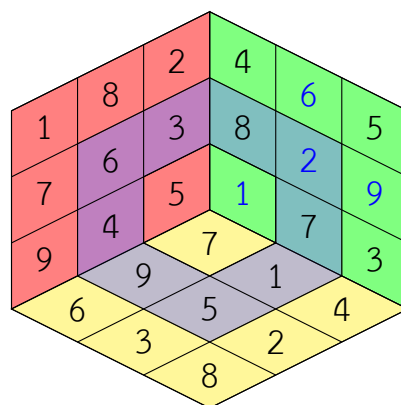
กรณีที่ 60



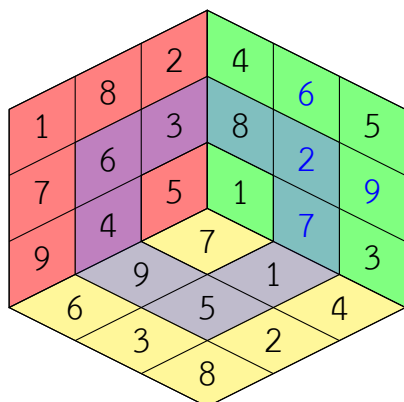
กรณีที่ 61



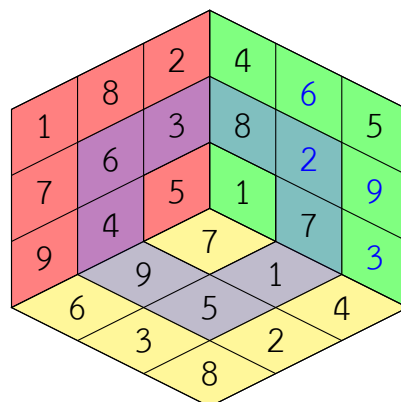
กรณีที่ 62



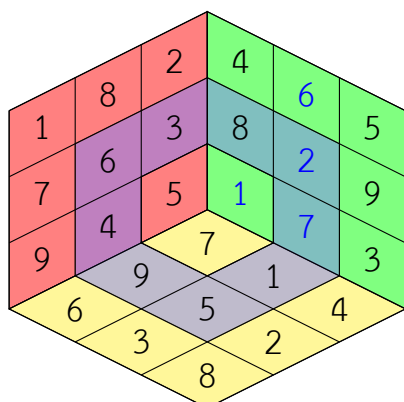
กรณีที่ 63



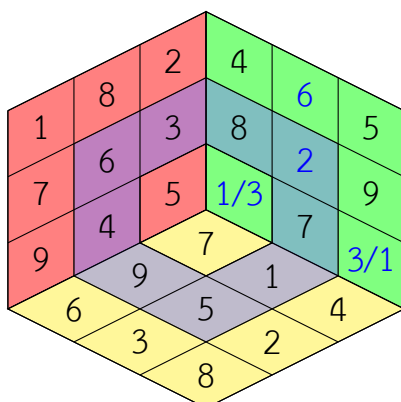
กรณีที่ 64



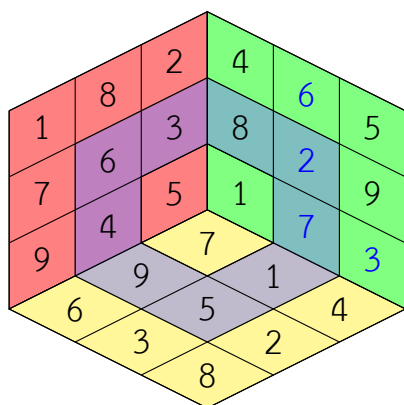
กรณีที่ 65



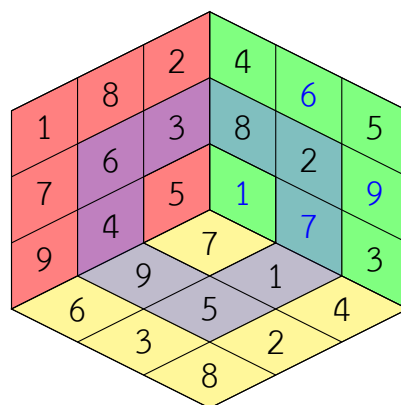
กรณีที่ 66



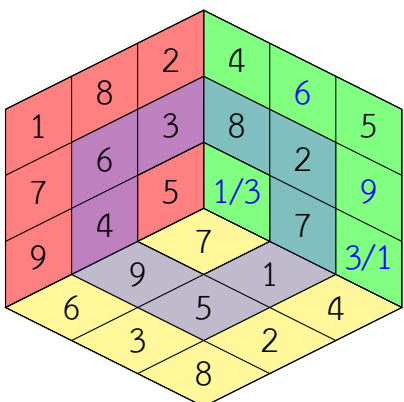
กรณีที่ 67



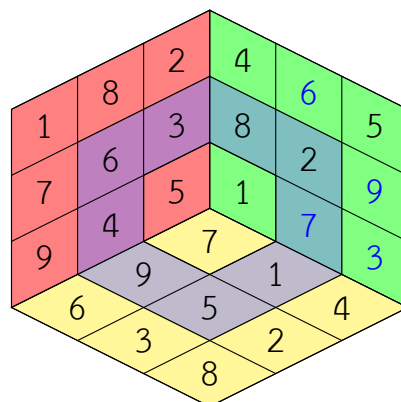
กรณีที่ 68



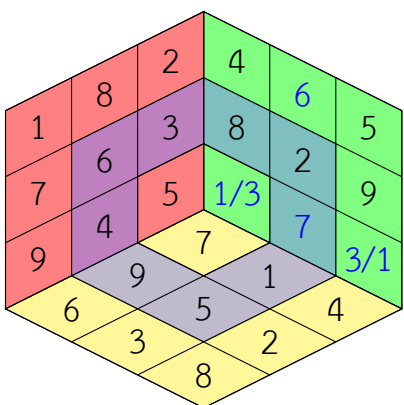
กรณีที่ 69



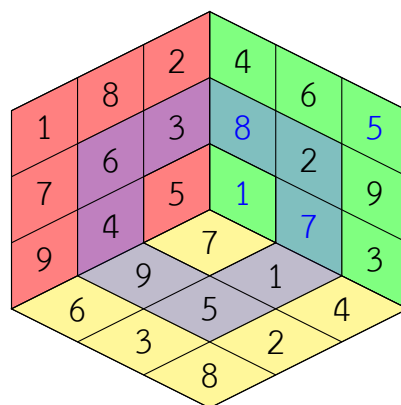
กรณีที่ 70



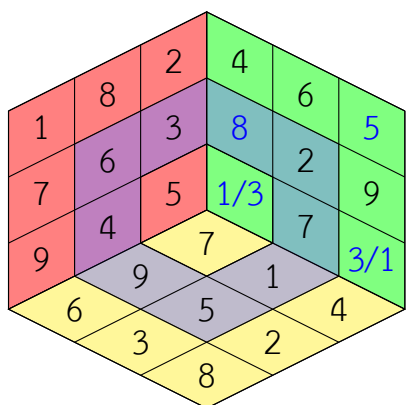
กรณีที่ 71



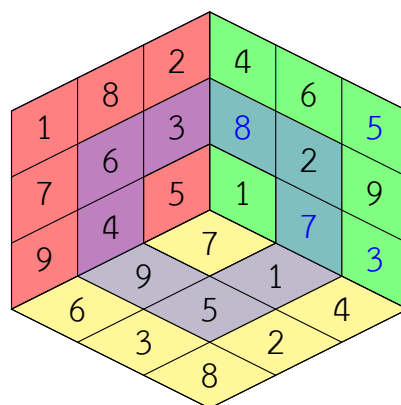
กรณีที่ 72



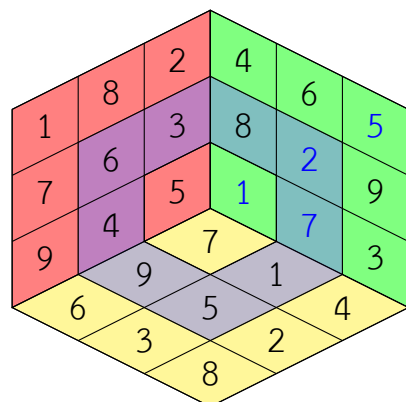
กรณีที่ 73



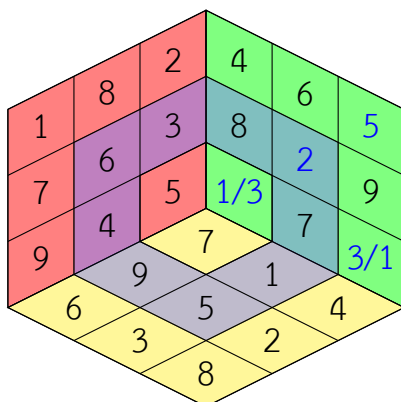
กรณีที่ 74



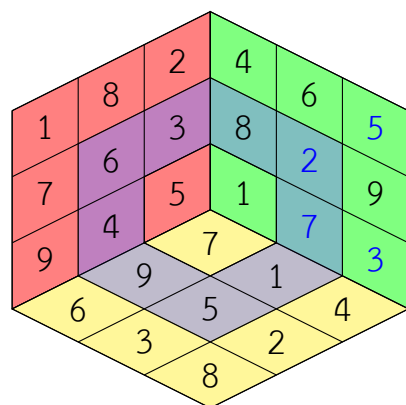
กรณีที่ 75



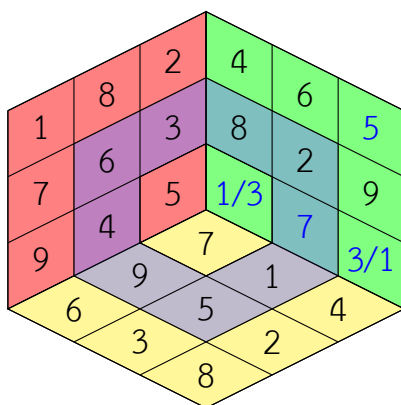
กรณีที่ 76



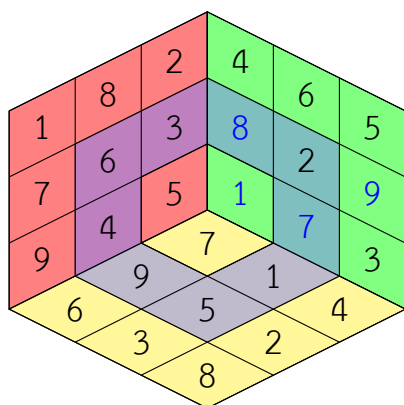
กรณีที่ 77



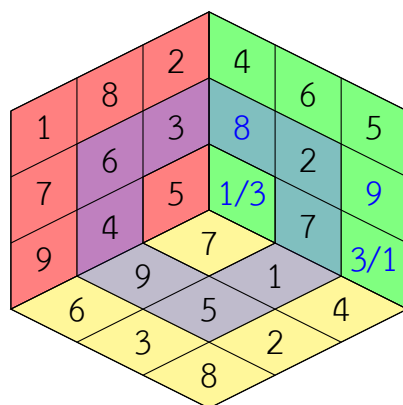
กรณีที่ 78



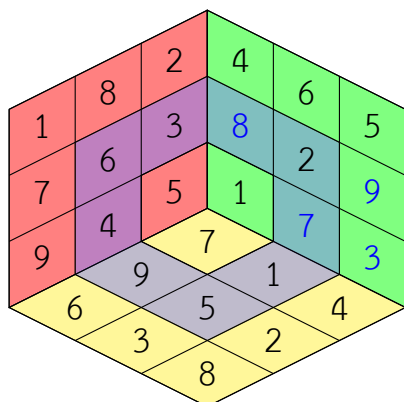
กรณีี่ 79



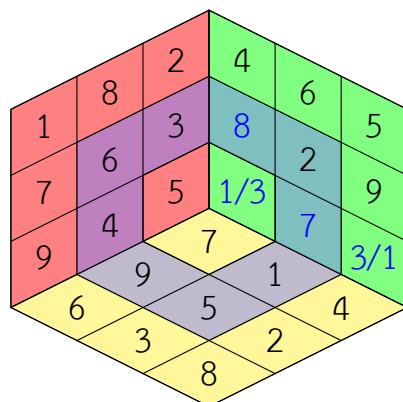
กรณีี่ 80



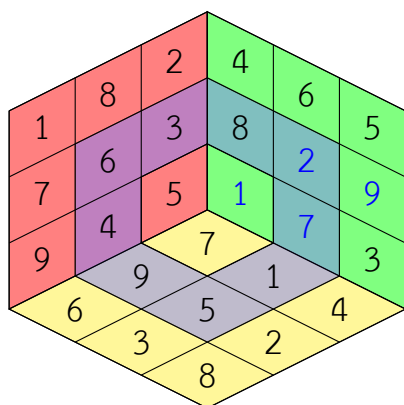
กรณีี่ 81



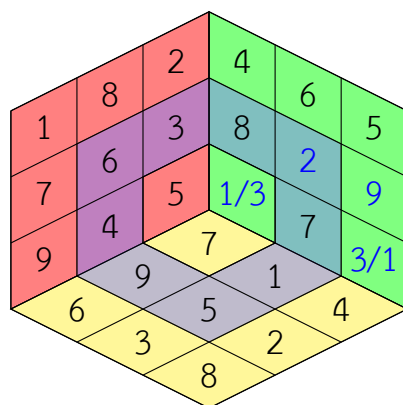
กรณีี่ 82



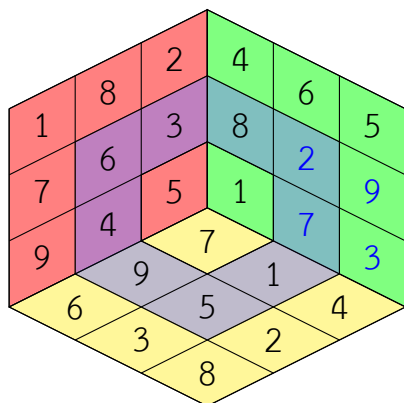
กรณีี่ 83



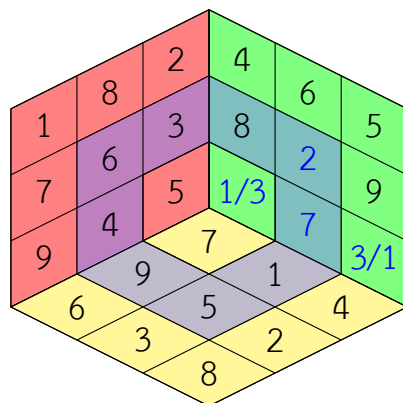
กรณีี่ 84



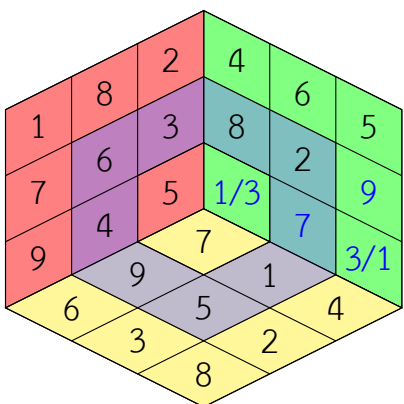
กรณี 85



กรณี 86



กรณี 87



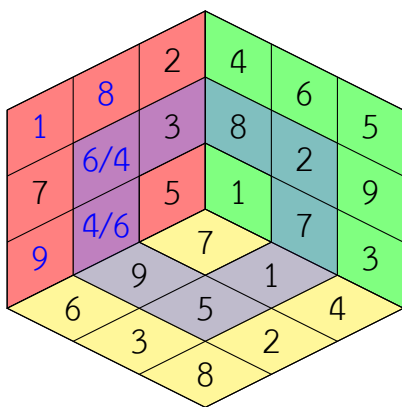
จากตัวอย่าง 45 จะได้ว่า $n(9, 9, 5)$ มีคำตอบเดียว 55 กรณีจาก 126 กรณี
สรุปได้ว่า จาก $n(5, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 34 กรณี, $n(9, 5, 9)$ มีคำตอบเดียว 69 กรณี และ $n(9, 9, 5)$
มีคำตอบเดียว 55 กรณี
ดังนั้นรูปแบบ $(5, 9, 9)$ จะมีคำตอบเดียว 160 กรณีจาก 378 กรณี

4.8 พิจารณารูปแบบ (4, 9, 9)

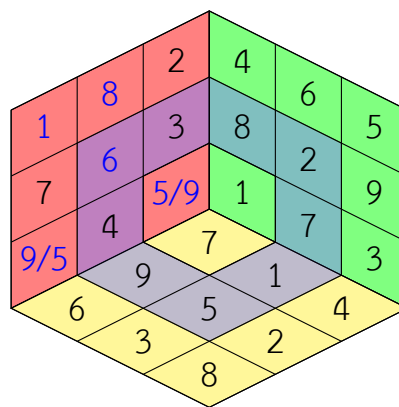
จะทำการลบทีละ 5 ช่อง เพื่อทำการหาคำตอบเดียวที่ได้จากการเติมช่องว่าง หากได้คำตอบมากกว่า 1 คำตอบจะไม่ทำการพิจารณากรณีนั้นต่อ นั่นคือรูปแบบ (4, 9, 9) จะมีทั้งหมด 378 กรณี โดยที่ $n(4, 9, 9)$ มี 126 กรณี, $n(9, 4, 9)$ มี 126 กรณี และ $n(9, 9, 4)$ มี 126 กรณี แต่จากการพิจารณา รูปแบบ (5, 9, 9) กรณีใดที่มีจำนวนคำตอบมากกว่า 1 จะไม่นำมาพิจารณาต่อในรูปแบบ (4, 9, 9)

ตัวอย่าง 46 $n(R, Y, G) = n(4, 9, 9)$ โดยพิจารณาเพียง 26 กรณีจาก 126 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

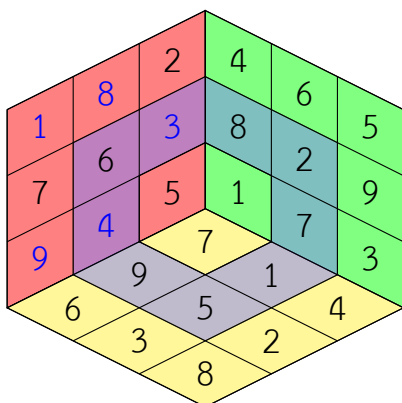
กรณี 1



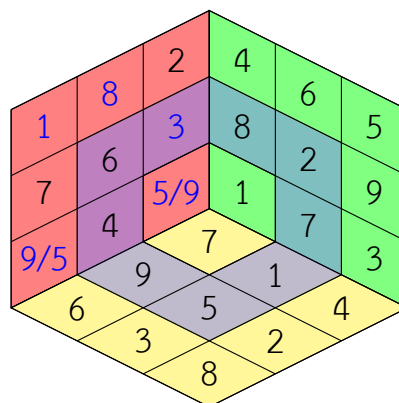
กรณีศึกษาที่ 2



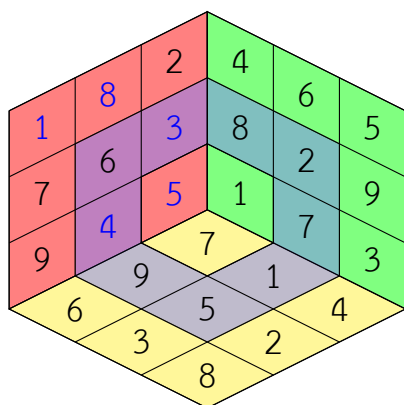
กรณี 3



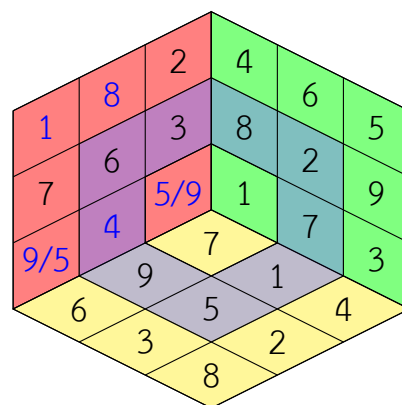
กรณี 4



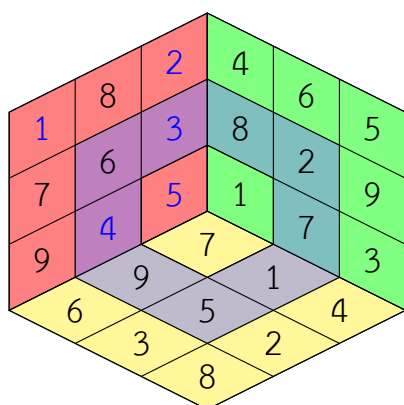
กรณีที่ 5



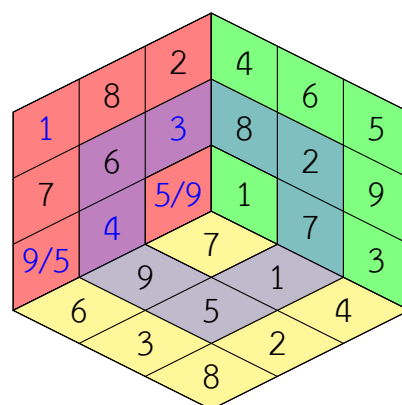
กรณีที่ 6



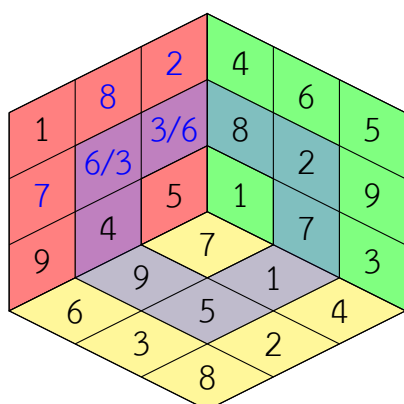
กรณีที่ 7



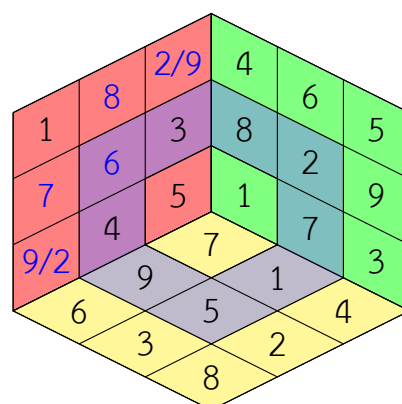
กรณีที่ 8



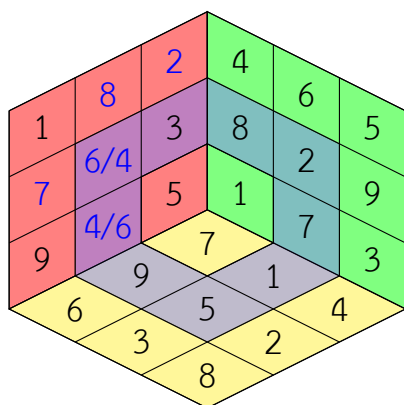
กรณีที่ 9



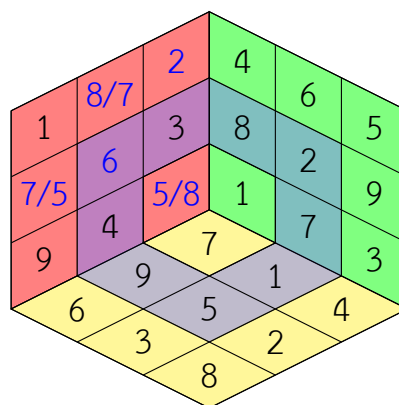
กรณีที่ 10



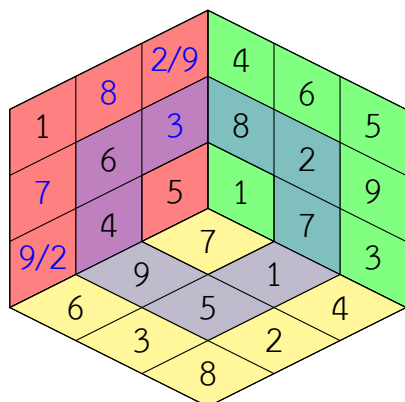
กรณีที่ 11



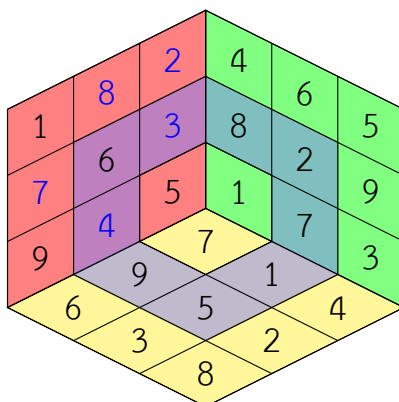
กรณีที่ 12



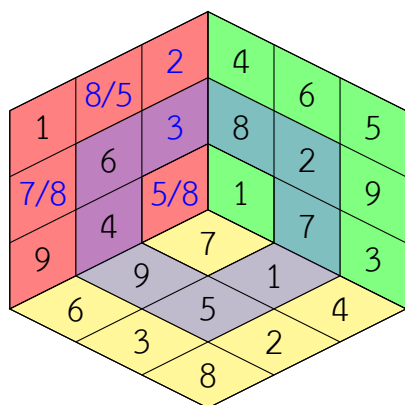
กรณีที่ 13



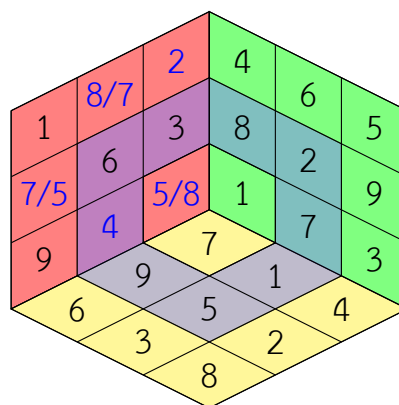
กรณีที่ 14



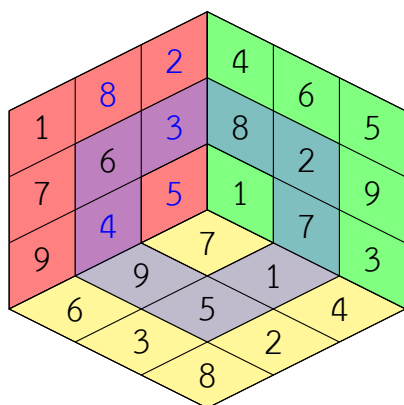
กรณีที่ 15



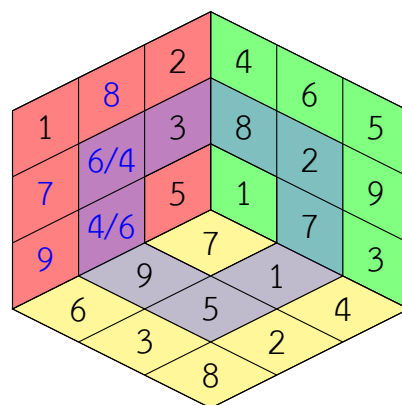
กรณีที่ 16



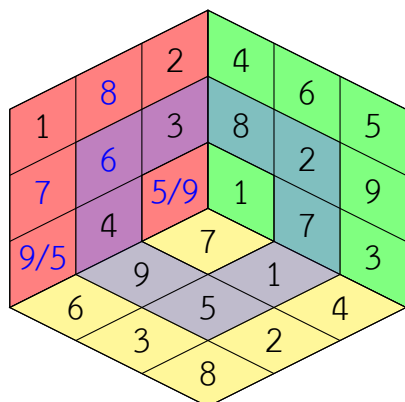
กรณี ที่ 17



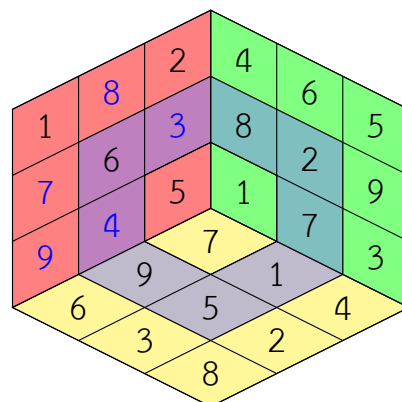
กรณี ที่ 18



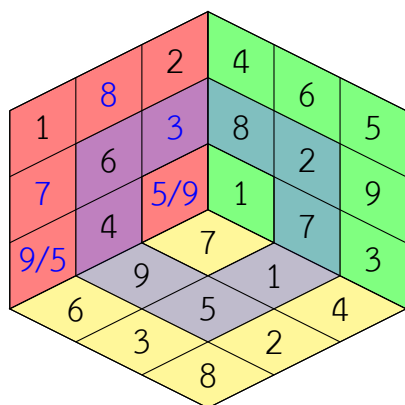
กรณี ที่ 19



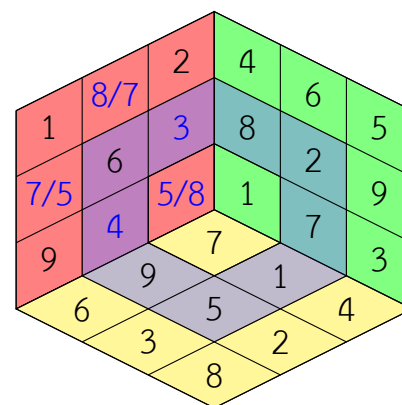
กรณี ที่ 20



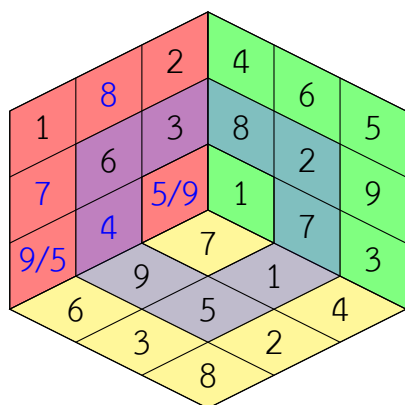
กรณี ที่ 21



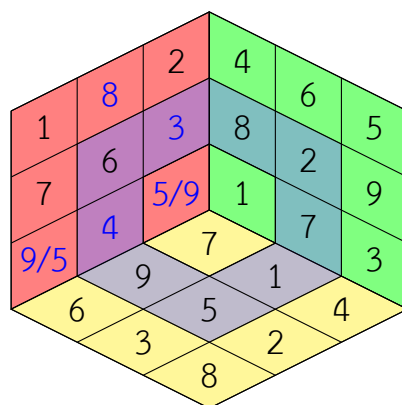
กรณี ที่ 22



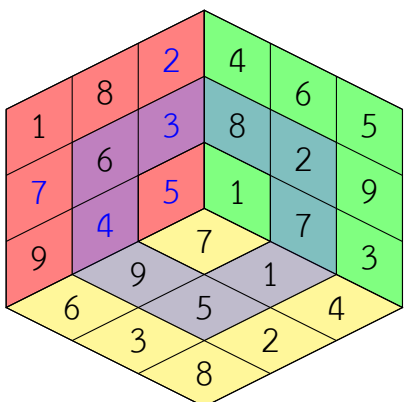
กรณีี่ 23



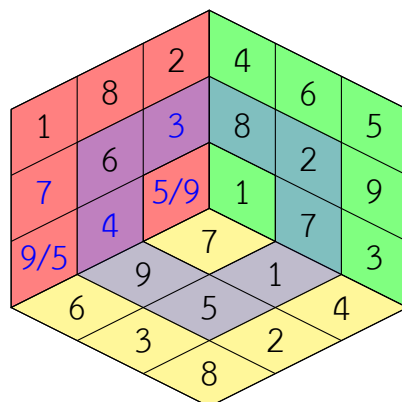
กรณีี่ 24



กรณีี่ 25



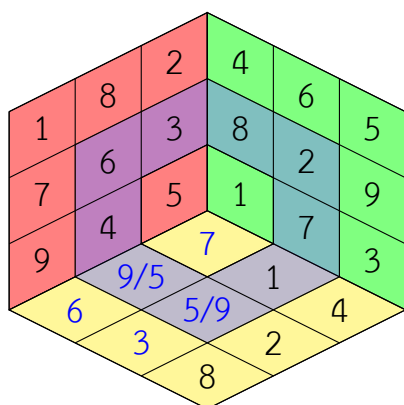
กรณีี่ 26



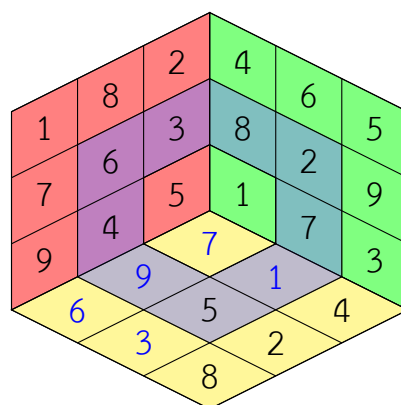
จากตัวอย่าง 46 จะได้ว่า $n(4, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 7 กรณีจาก 126 กรณี

ตัวอย่าง 47 $n(R, Y, G) = n(9, 4, 9)$ โดยพิจารณาเพียง 78 กรณีจาก 126 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

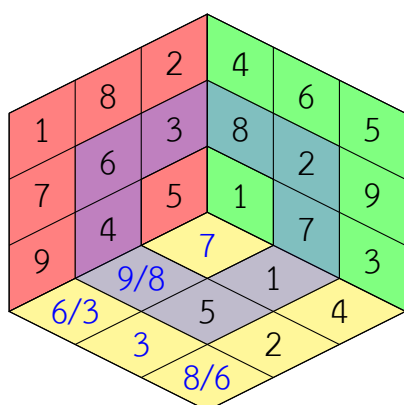
กรณีที่ 1



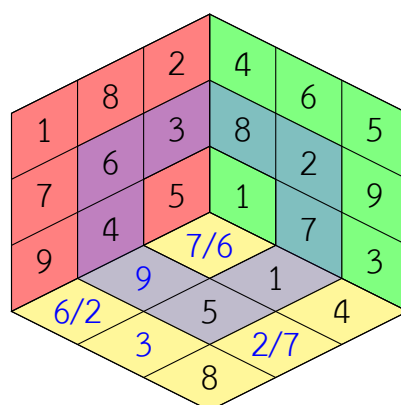
กรณีที่ 2



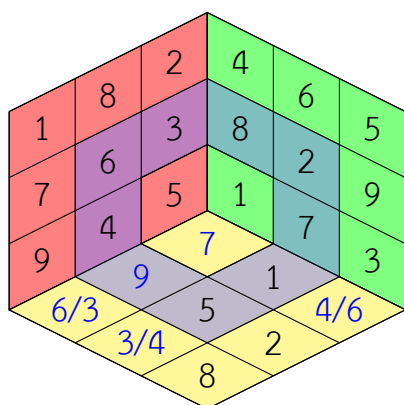
กรณีที่ 3



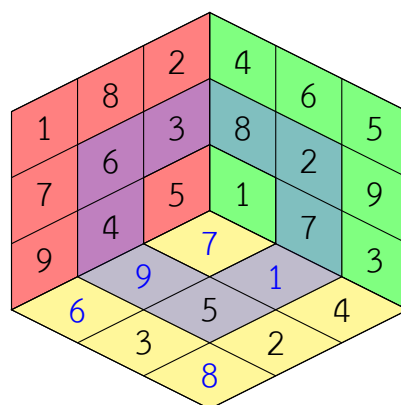
กรณีที่ 4



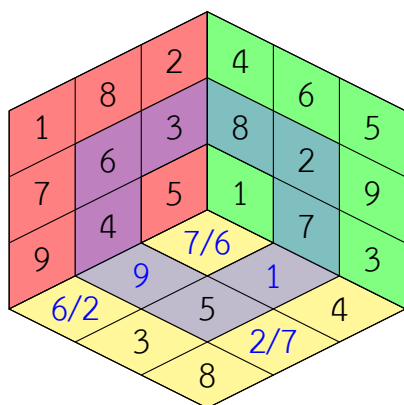
กรณีที่ 5



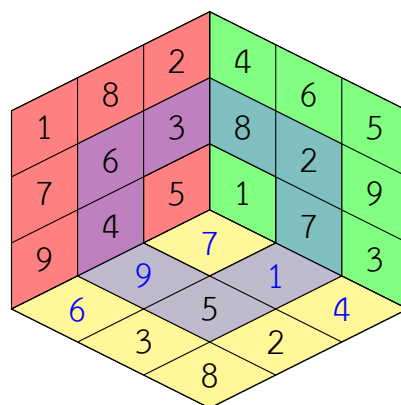
กรณีที่ 6



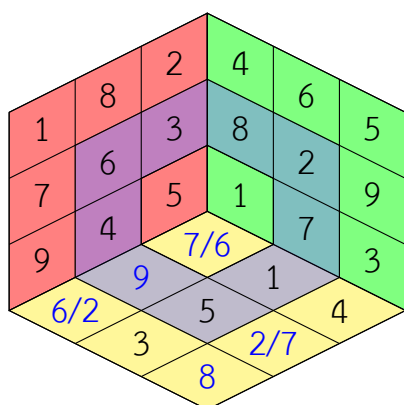
กรณีี่ 7



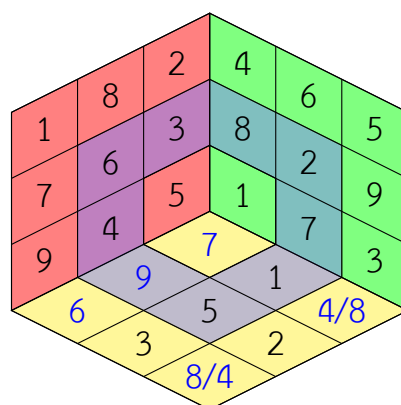
กรณีี่ 8



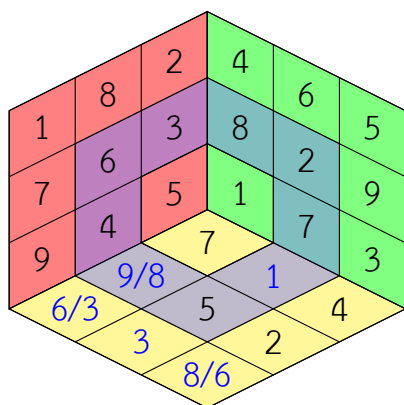
กรณีี่ 9



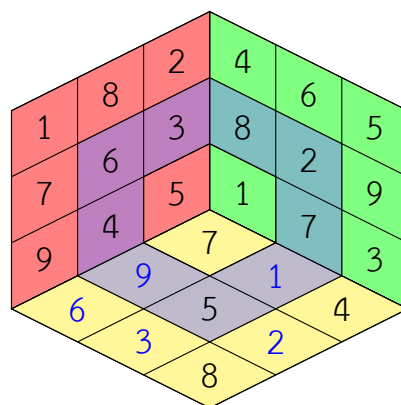
กรณีี่ 10



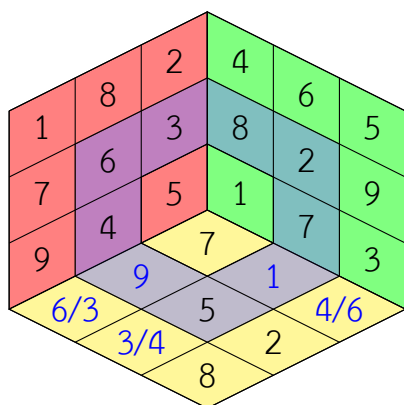
กรณีี่ 11



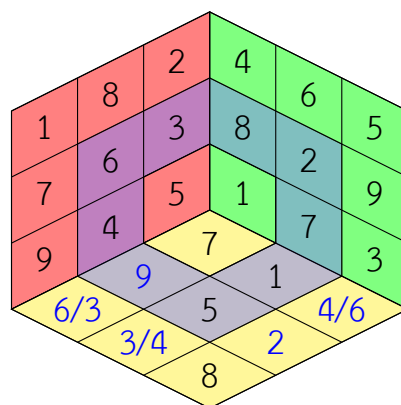
กรณีี่ 12



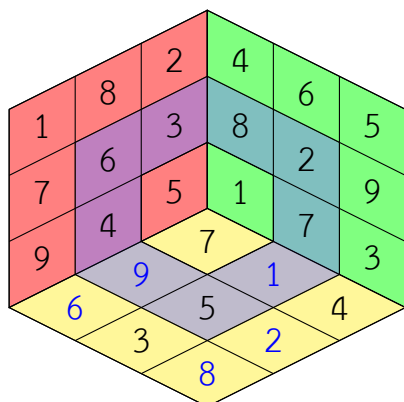
กรณีที่ 13



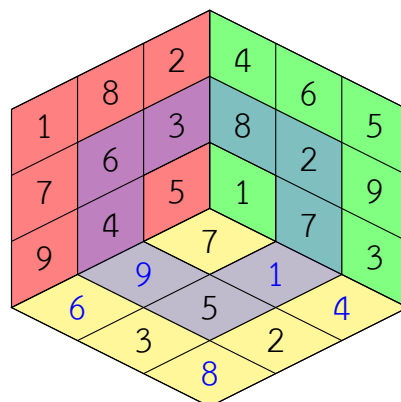
กรณีที่ 14



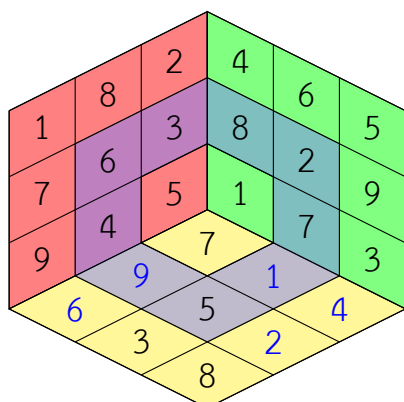
กรณีที่ 15



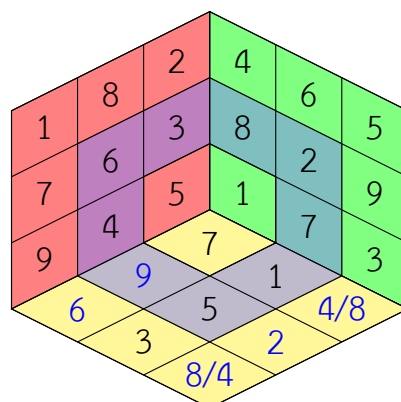
กรณีที่ 16



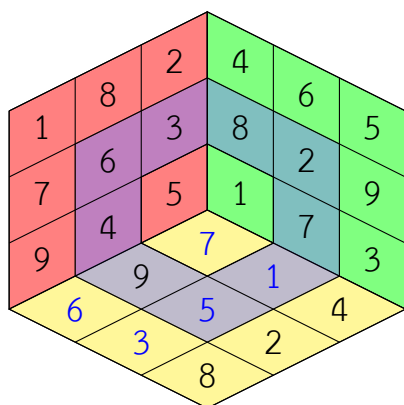
กรณีที่ 17



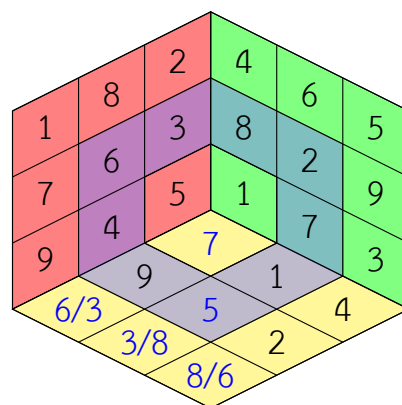
กรณีที่ 18



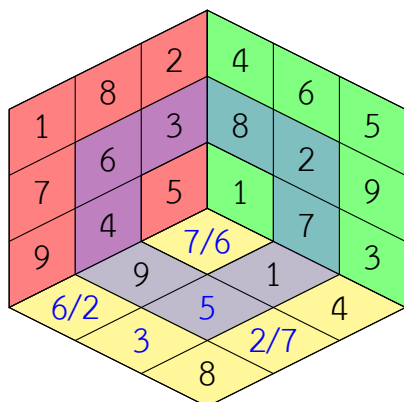
กรณีที่ 19



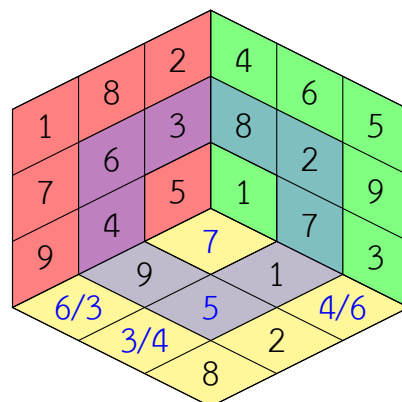
กรณีที่ 20



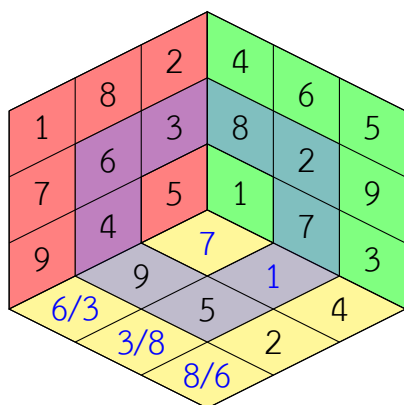
กรณีที่ 21



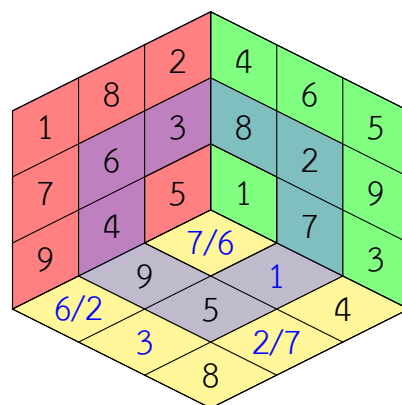
กรณีที่ 22



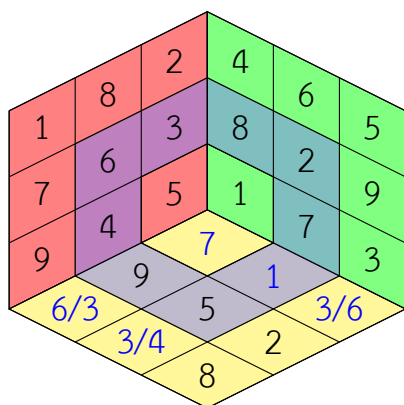
กรณีที่ 23



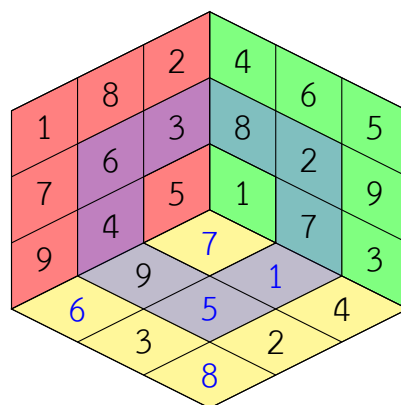
กรณีที่ 24



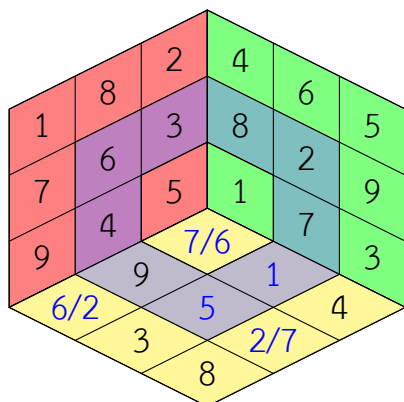
กรณีที่ 25



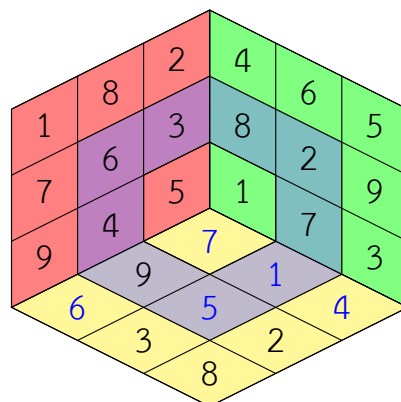
กรณีที่ 26



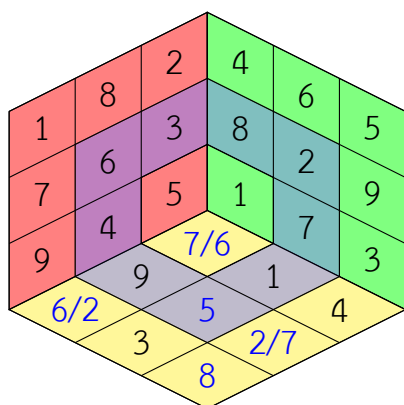
กรณีที่ 27



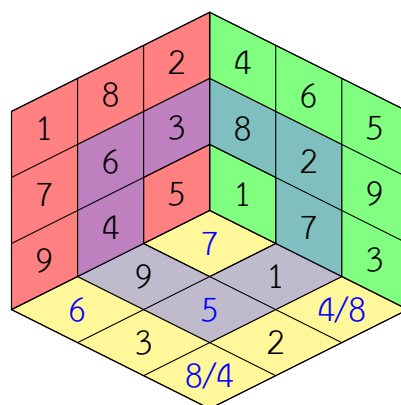
กรณีที่ 28



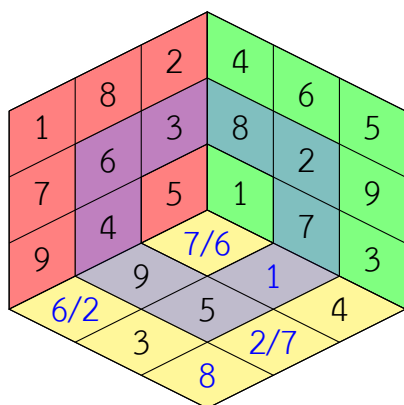
กรณีที่ 29



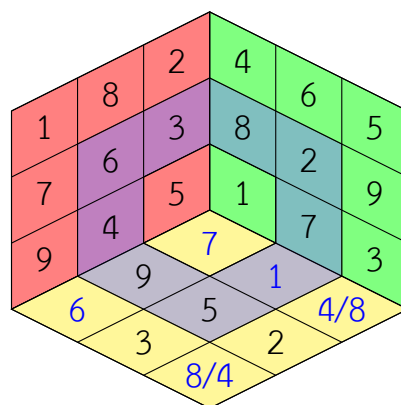
กรณีที่ 30



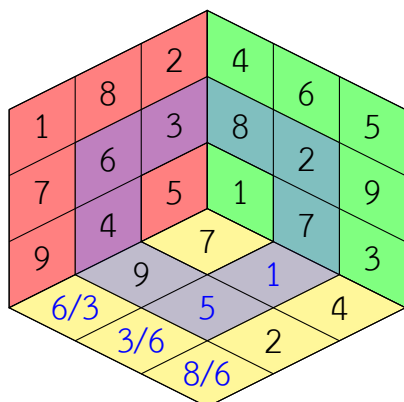
กรณีี่ที่ 31



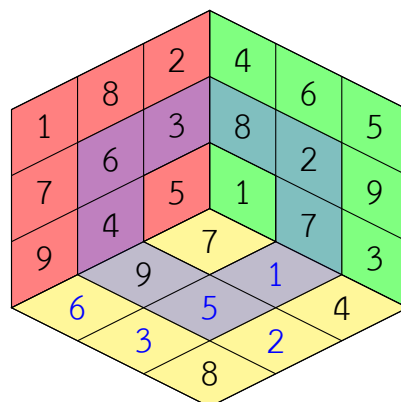
กรณีี่ที่ 32



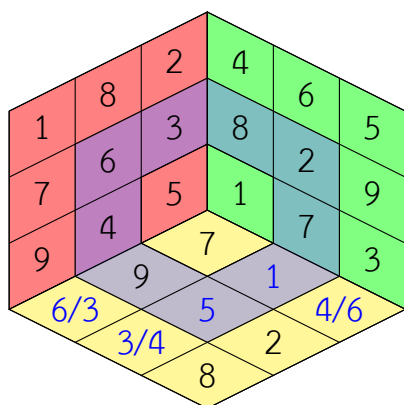
กรณีี่ที่ 33



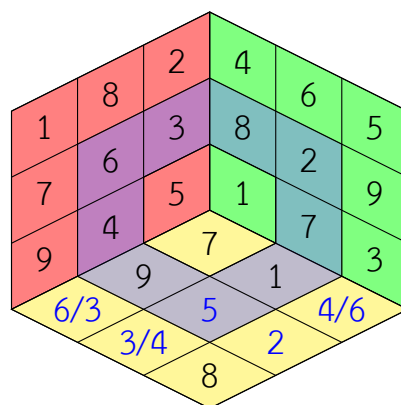
กรณีี่ที่ 34



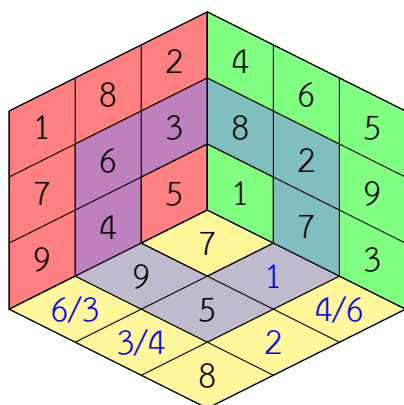
กรณีี่ที่ 35



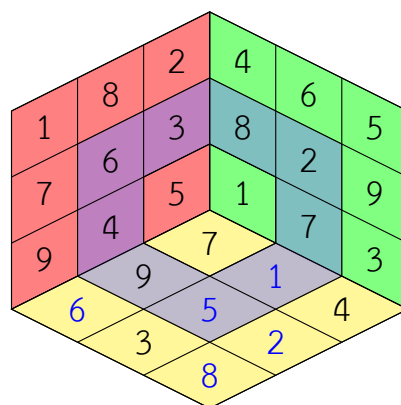
กรณีี่ที่ 36



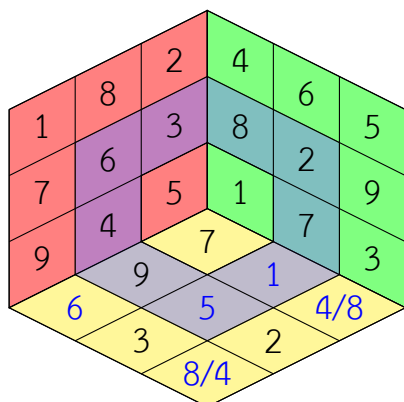
กรณีี่ 37



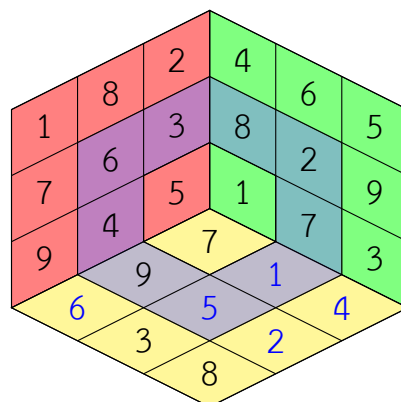
กรณีี่ 38



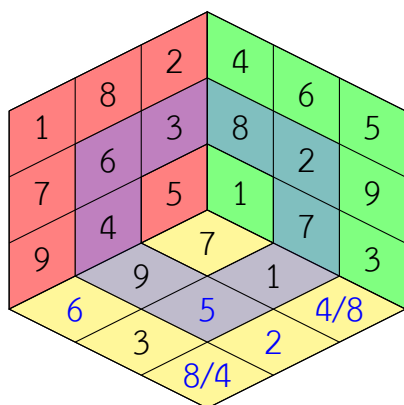
กรณีี่ 39



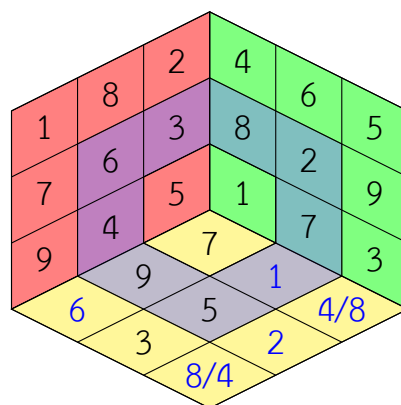
กรณีี่ 40



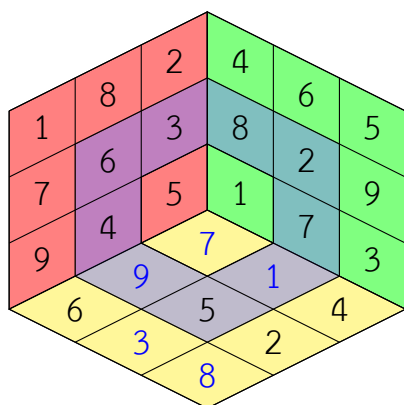
กรณีี่ 41



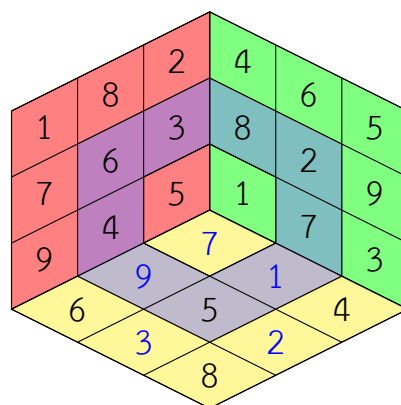
กรณีี่ 42



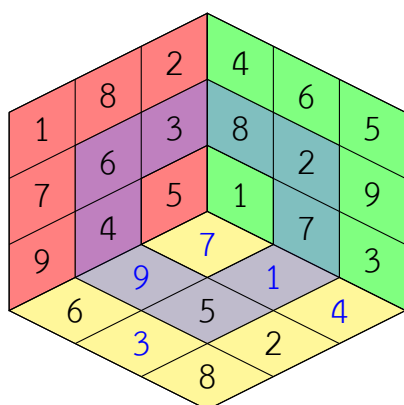
กรณีที่ 43



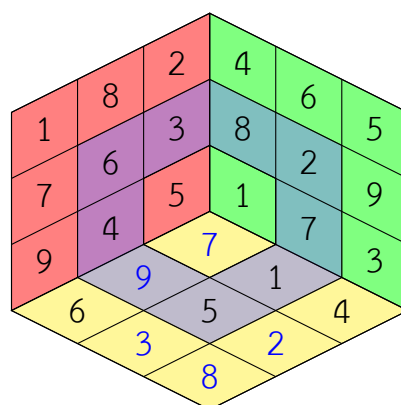
กรณีที่ 44



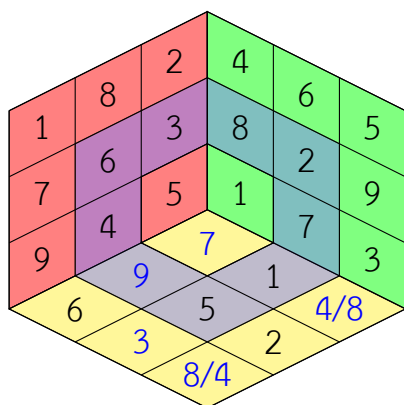
กรณีที่ 45



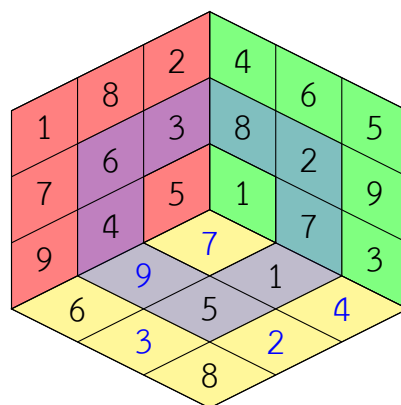
กรณีที่ 46



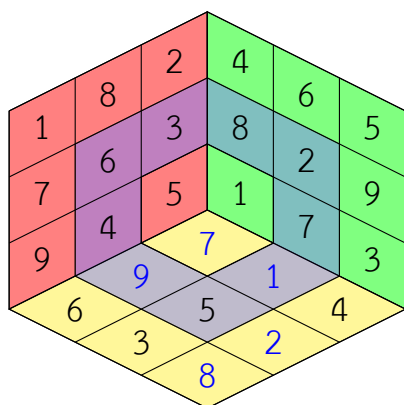
กรณีที่ 47



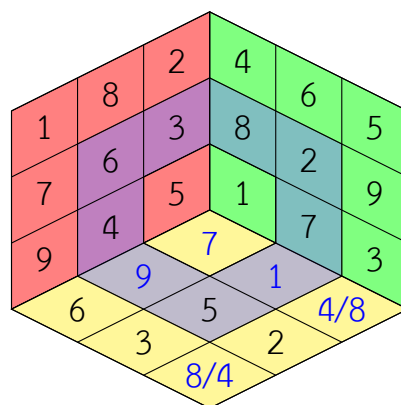
กรณีที่ 48



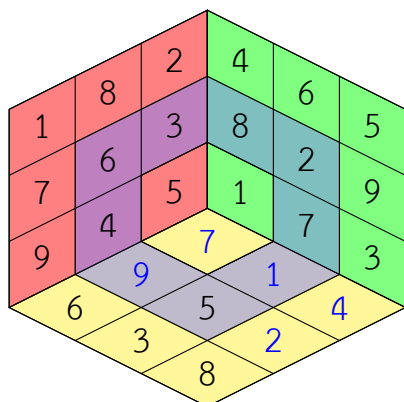
กรณีี่ที่ 49



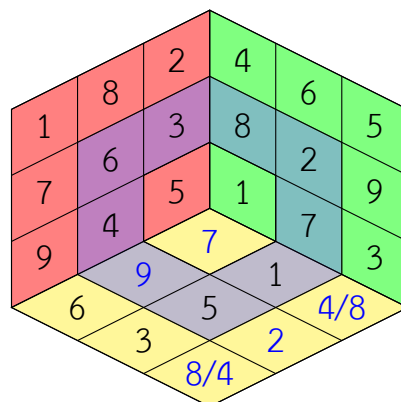
กรณีี่ที่ 50



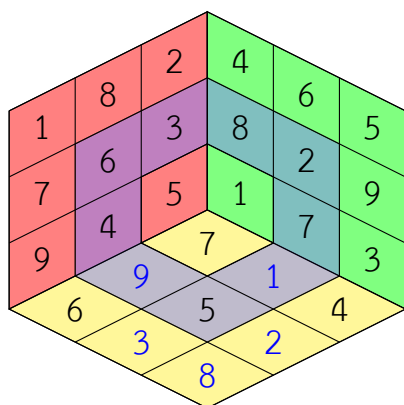
กรณีี่ที่ 51



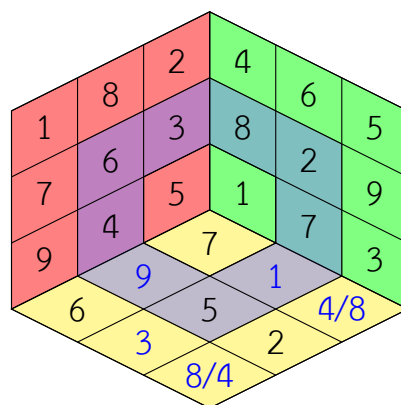
กรณีี่ที่ 52



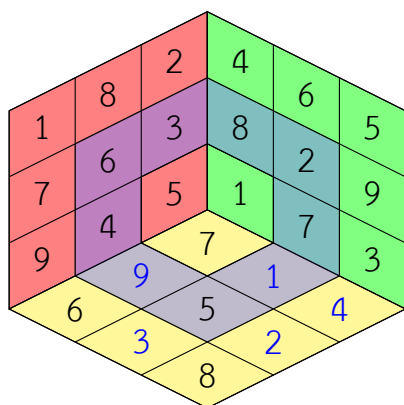
กรณีี่ที่ 53



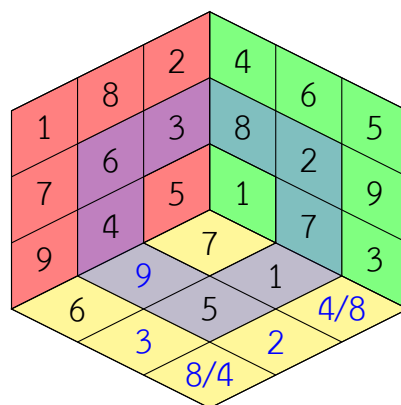
กรณีี่ที่ 54



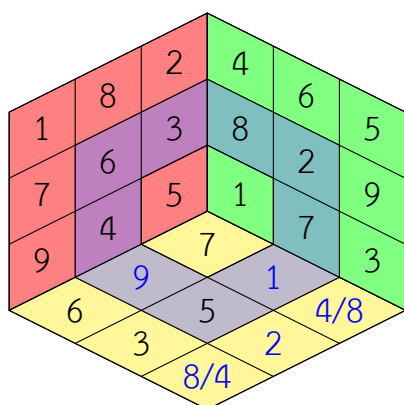
กรณีที่ 55



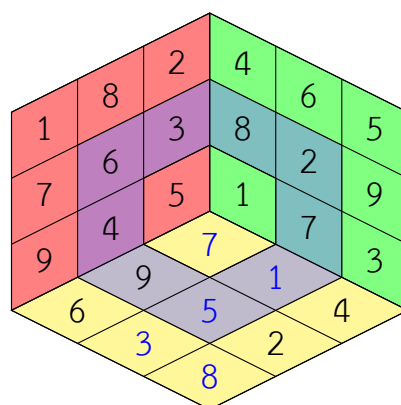
กรณีที่ 56



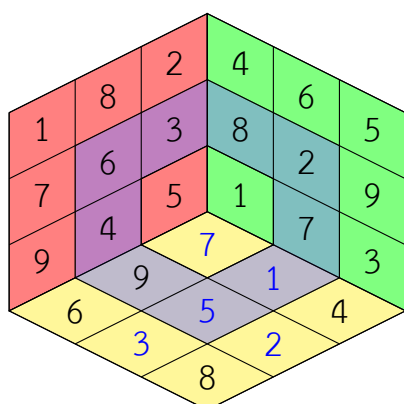
กรณีที่ 57



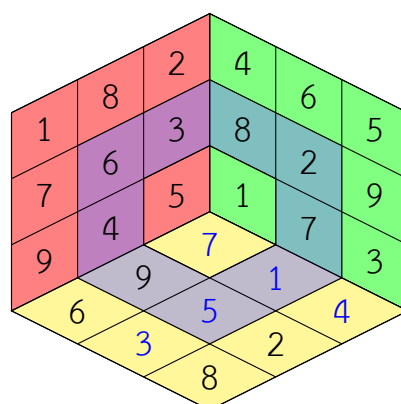
กรณีที่ 58



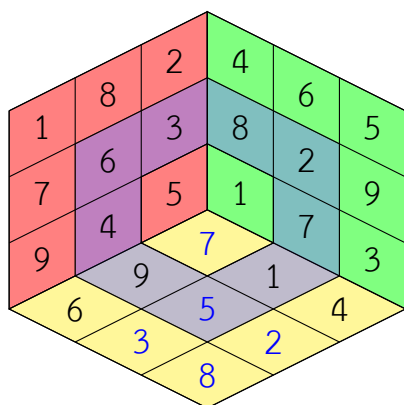
กรณีที่ 59



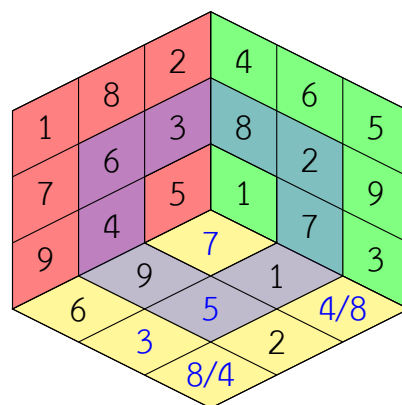
กรณีที่ 60



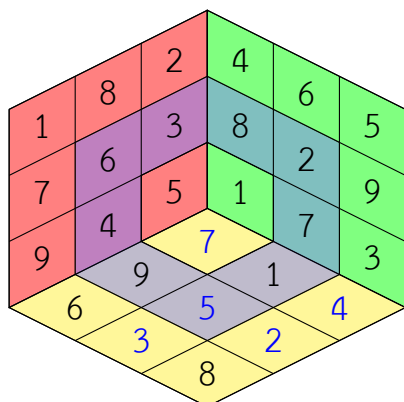
กรณีที่ 61



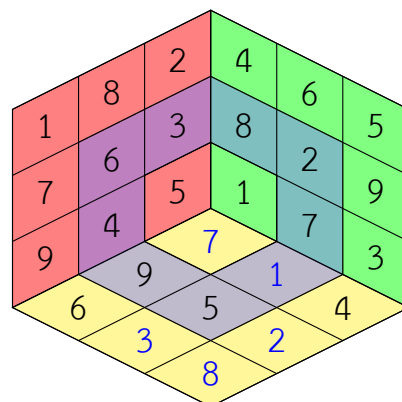
กรณีที่ 62



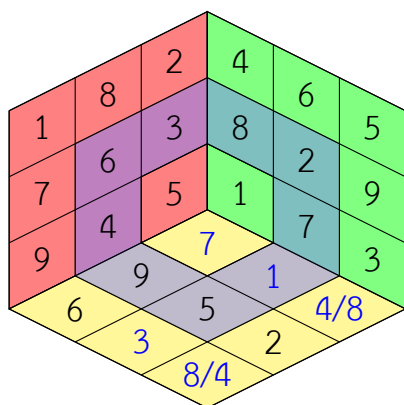
กรณีที่ 63



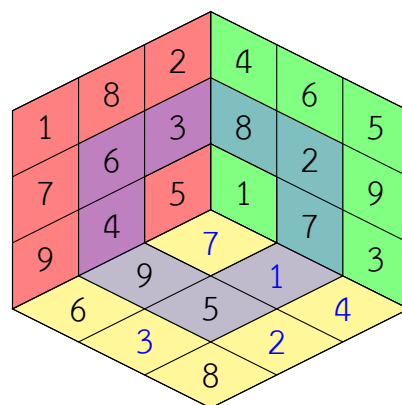
กรณีที่ 64



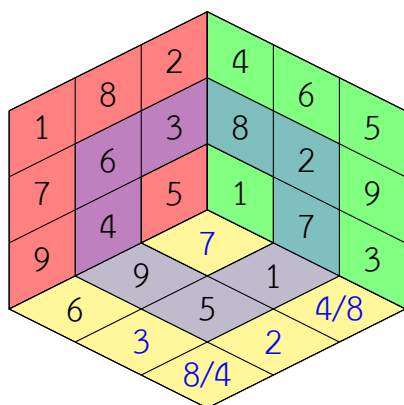
กรณีที่ 65



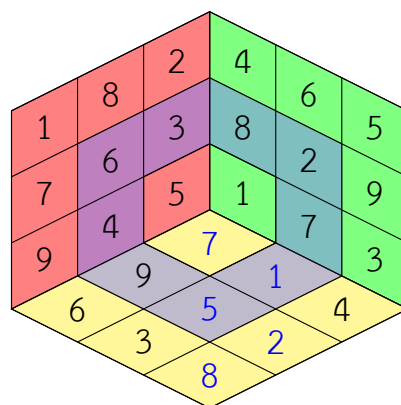
กรณีที่ 66



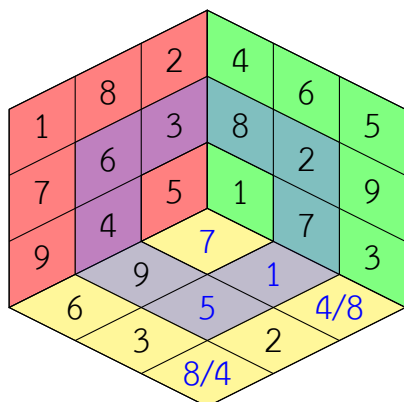
กรณีที่ 67



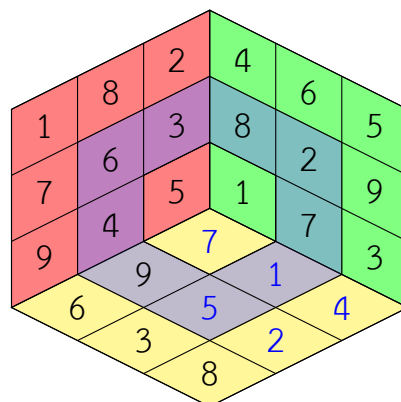
กรณีที่ 68



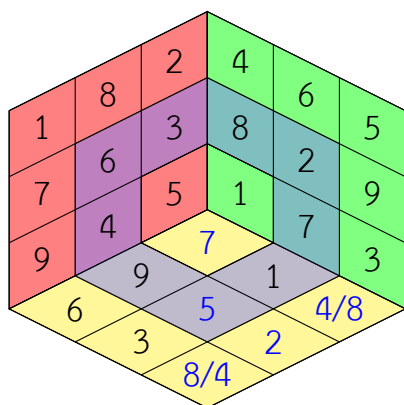
กรณีที่ 69



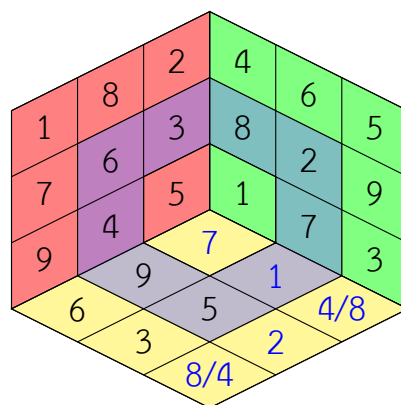
กรณีที่ 70



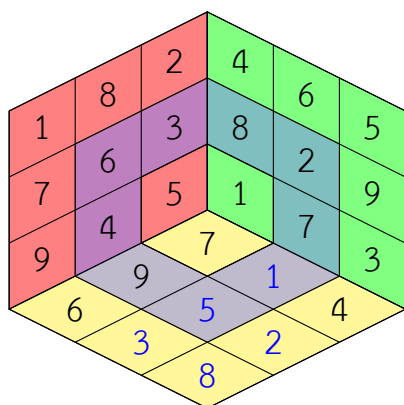
กรณีที่ 71



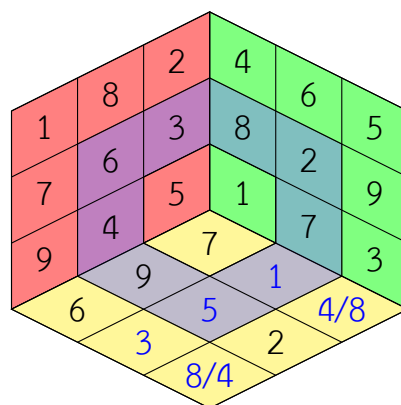
กรณีที่ 72



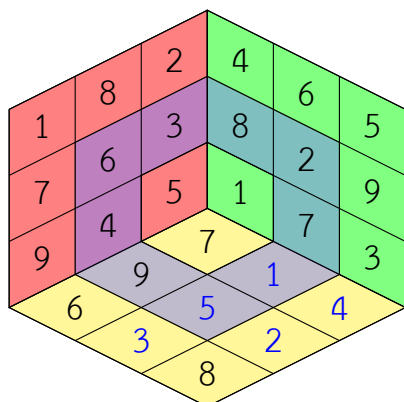
กรณีี่ 73



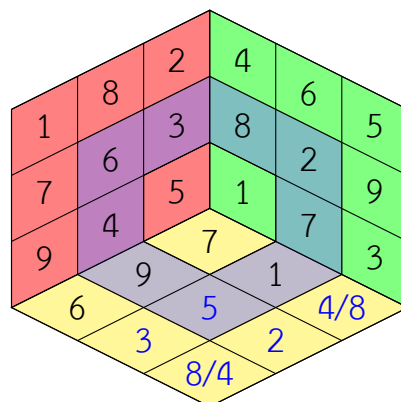
กรณีี่ 74



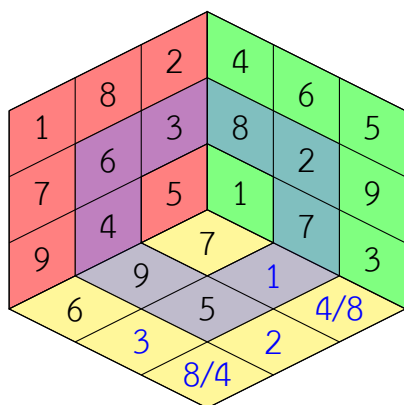
กรณีี่ 75



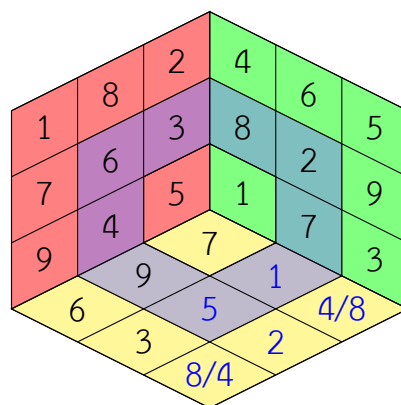
กรณีี่ 76



กรณีี่ 77



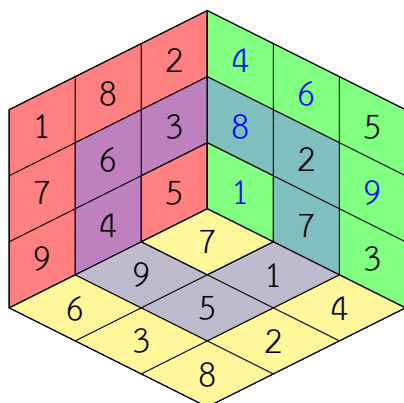
กรณีี่ 78



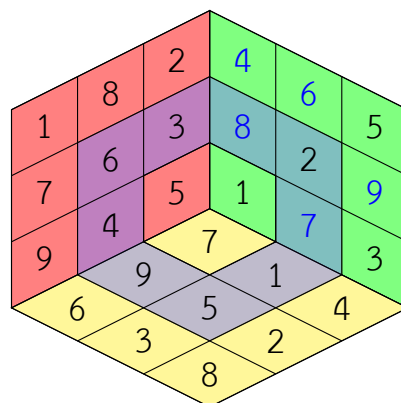
จากตัวอย่าง 47 จะได้ว่า $n(9, 4, 9)$ มีคำตอบเดียว 31 กรณีจาก 126 กรณี

ตัวอย่าง 48 $n(R, Y, G) = n(9, 9, 4)$ โดยพิจารณาเพียง 52 กรณีจาก 126 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

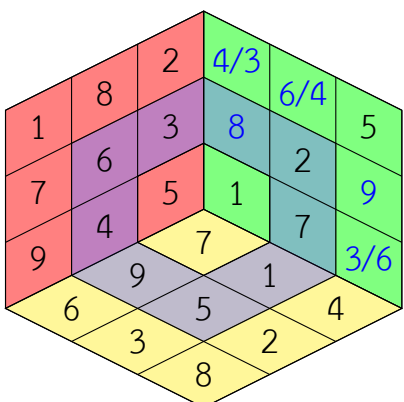
กรณีที่ 1



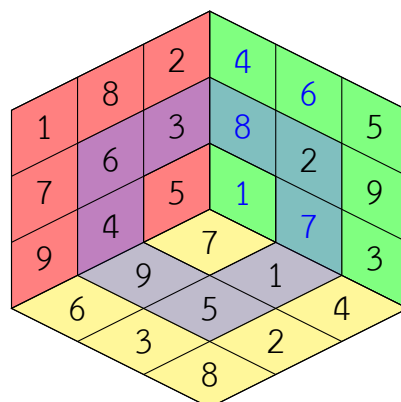
กรณีที่ 2



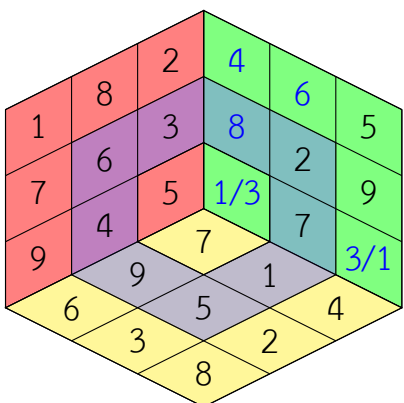
กรณีที่ 3



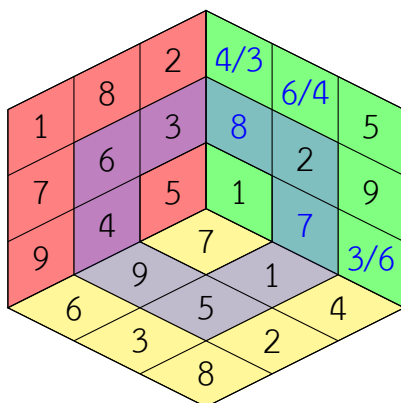
กรณีที่ 4



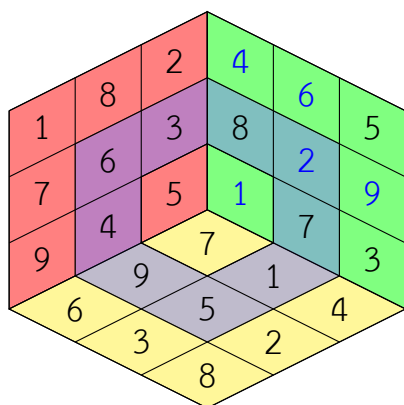
กรณีที่ 5



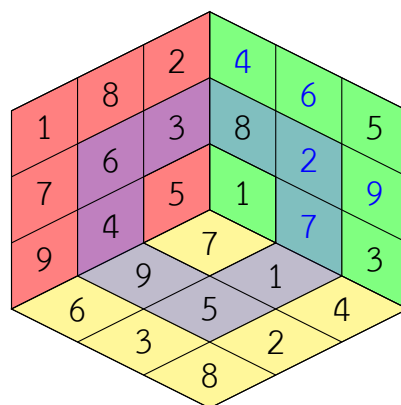
กรณีที่ 6



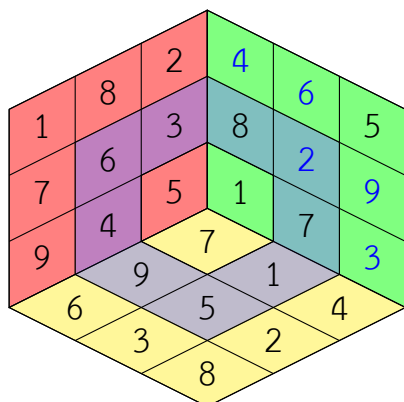
กรณีี่ 7



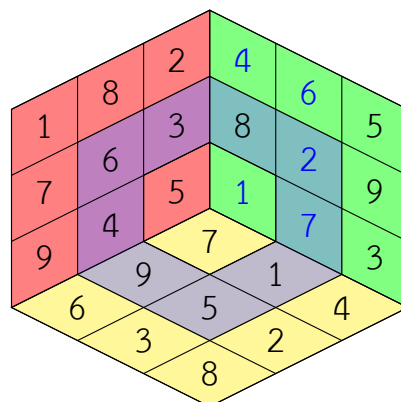
กรณีี่ 8



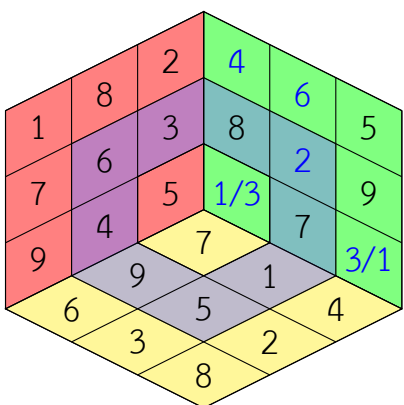
กรณีี่ 9



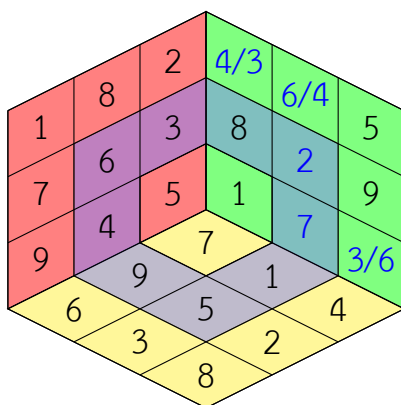
กรณีี่ 10



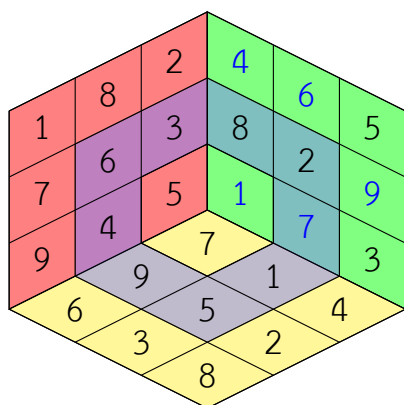
กรณีี่ 11



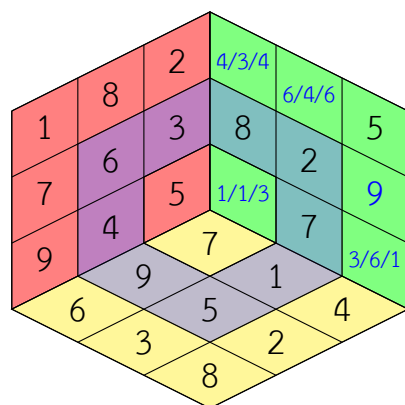
กรณีี่ 12



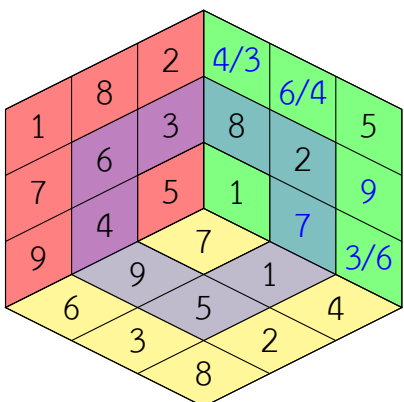
กรณี 13



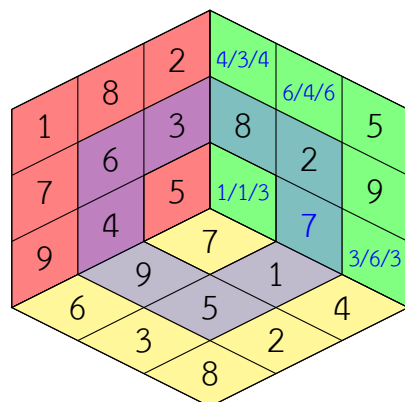
กรณี 14



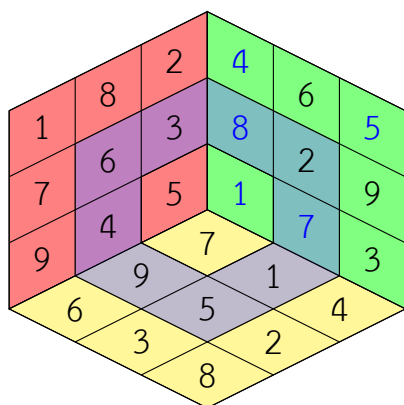
กรณี 15



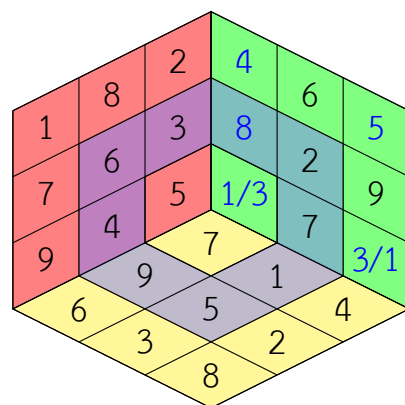
กรณี 16



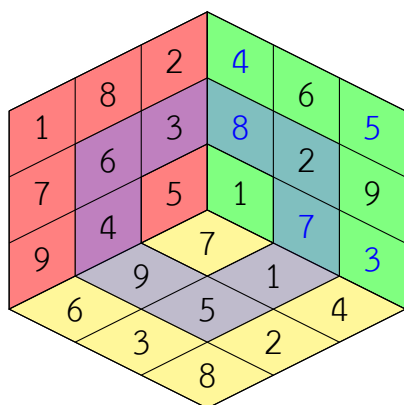
กรณี 17



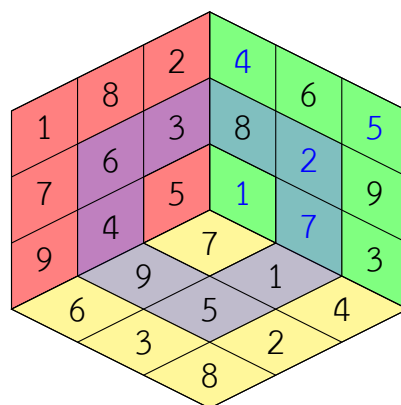
กรณี 18



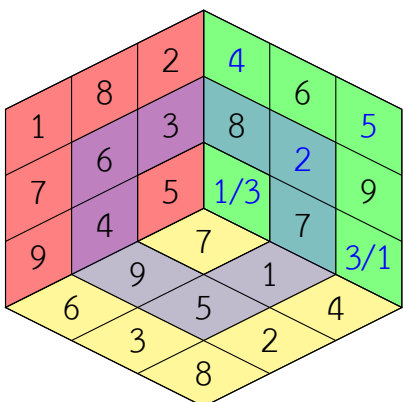
กรณีที่ 19



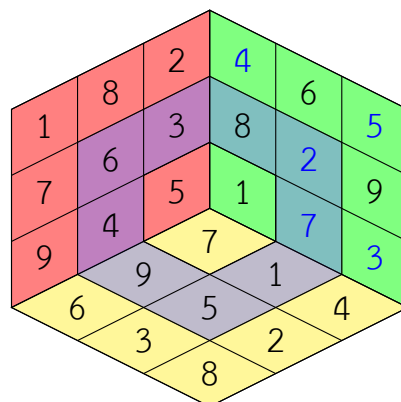
กรณีที่ 20



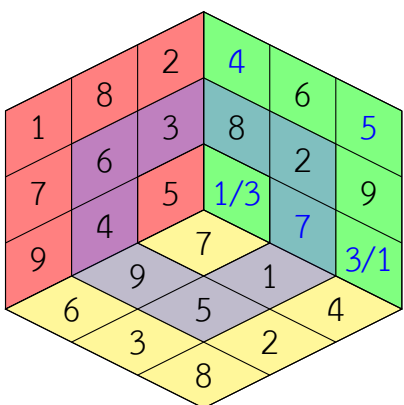
กรณีที่ 21



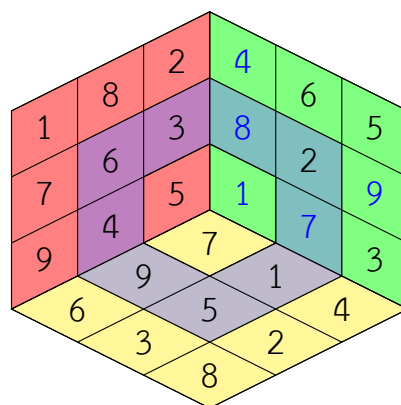
กรณีที่ 22



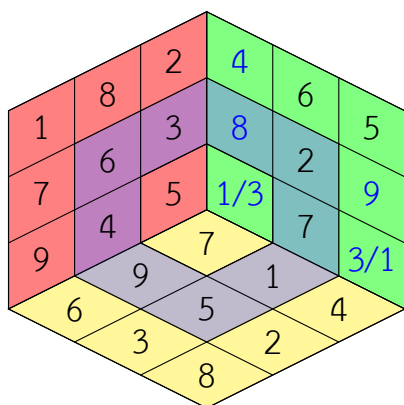
กรณีที่ 23



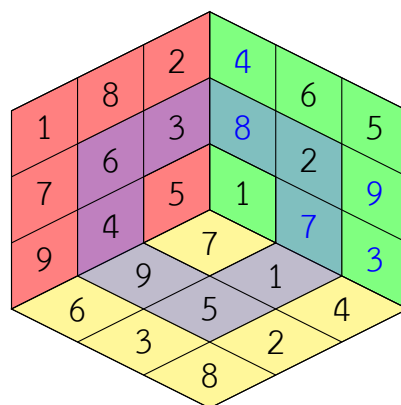
กรณีที่ 24



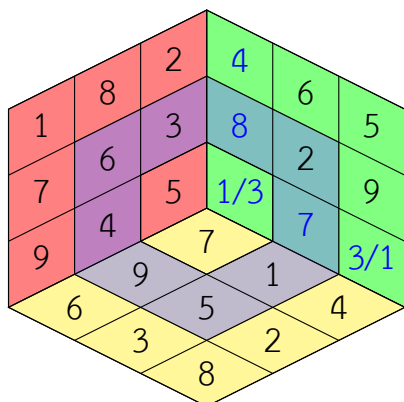
กรณีที่ 25



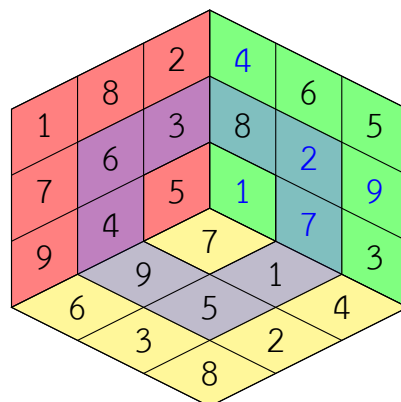
กรณีที่ 26



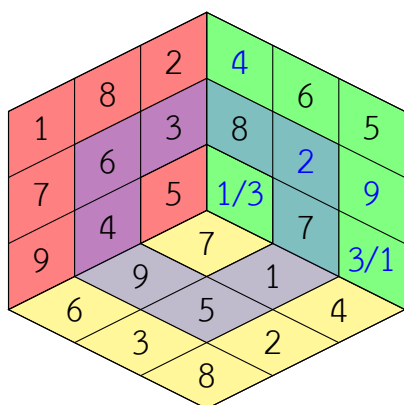
กรณีที่ 27



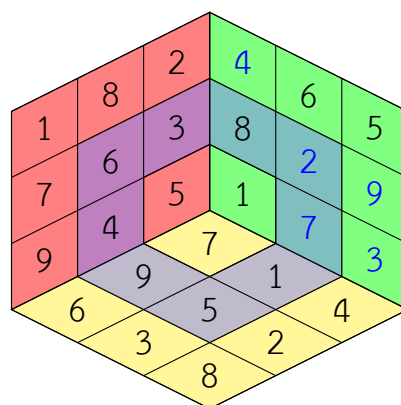
กรณีที่ 28



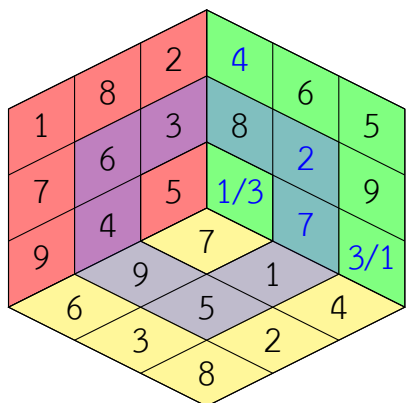
กรณีที่ 29



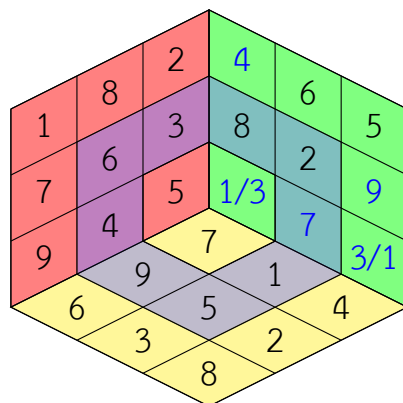
กรณีที่ 30



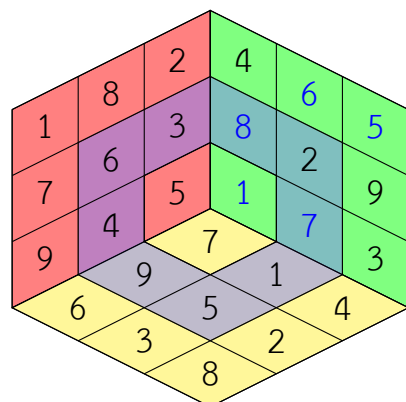
กรณีที่ 31



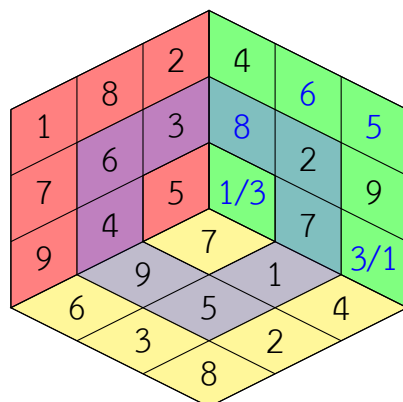
กรณีที่ 32



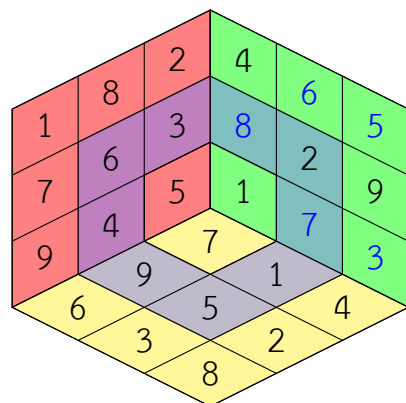
กรณีที่ 33



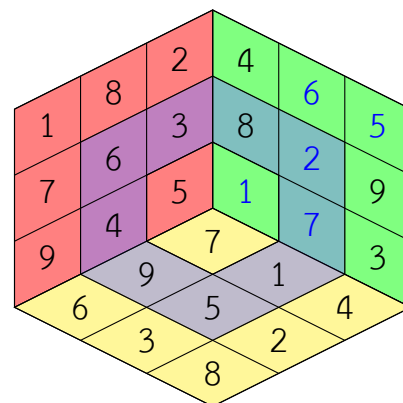
กรณีที่ 34



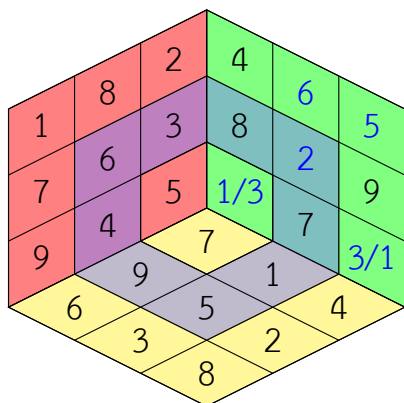
กรณีที่ 35



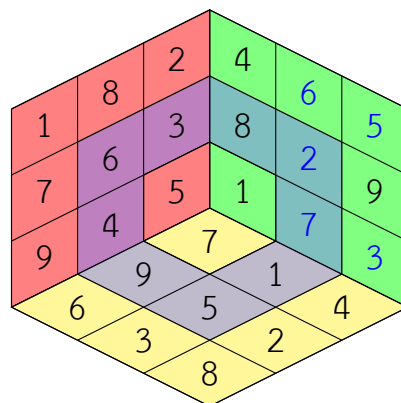
กรณีที่ 36



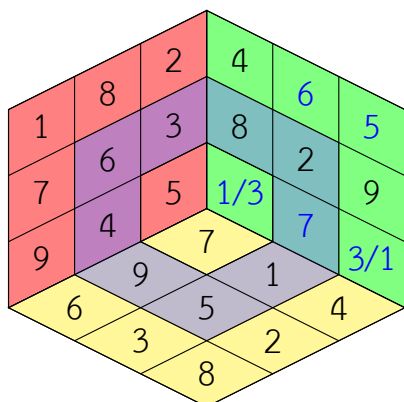
กรณีที่ 37



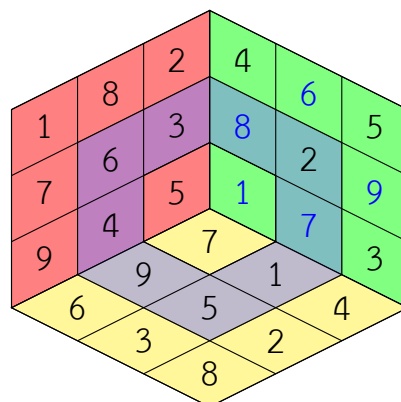
กรณีที่ 38



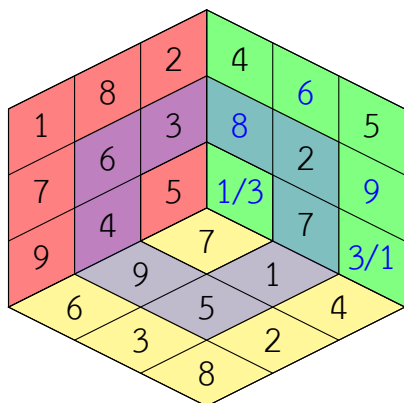
กรณีที่ 39



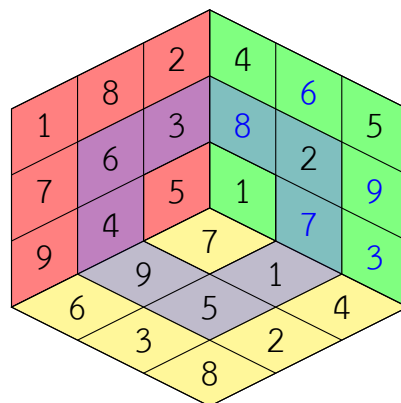
กรณีที่ 40



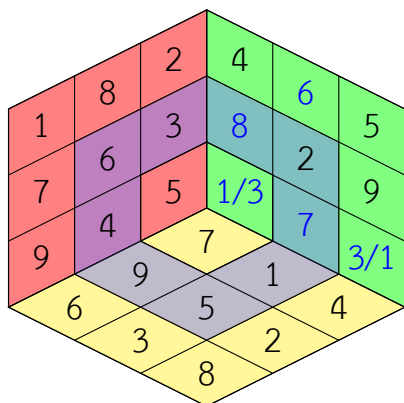
กรณีที่ 41



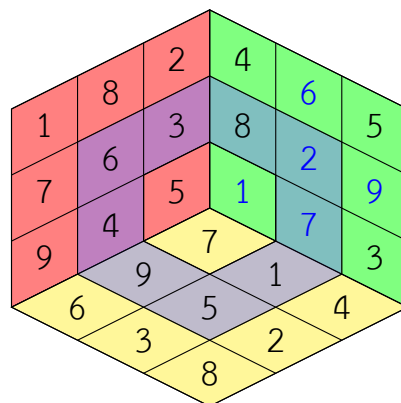
กรณีที่ 42



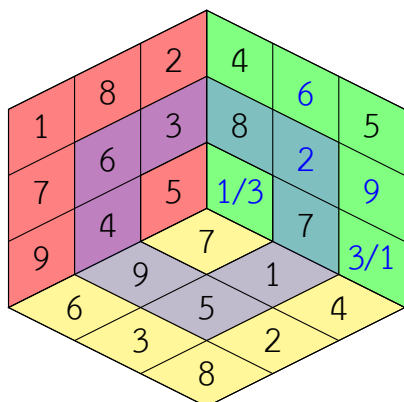
กรณีี่ที่ 43



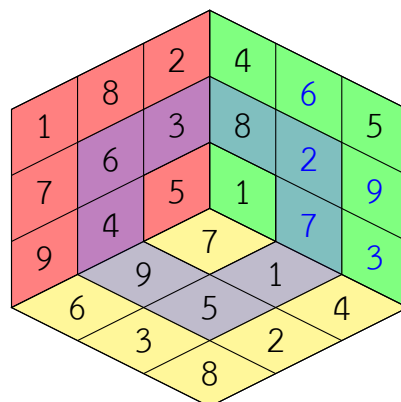
กรณีี่ที่ 44



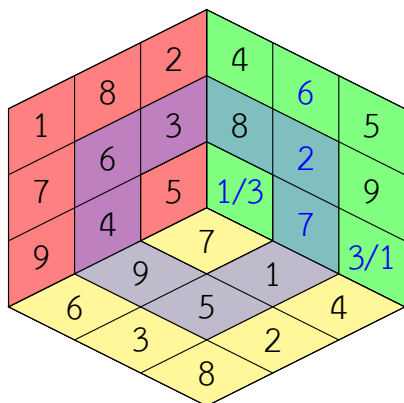
กรณีี่ที่ 45



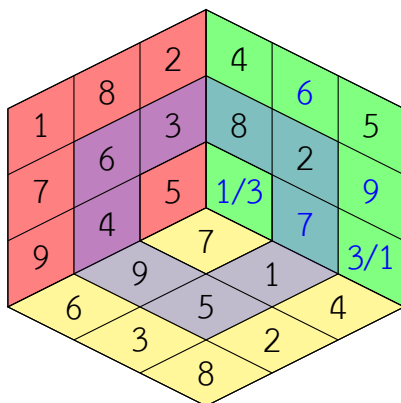
กรณีี่ที่ 46



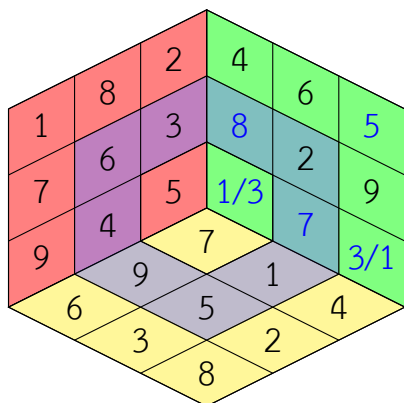
กรณีี่ที่ 47



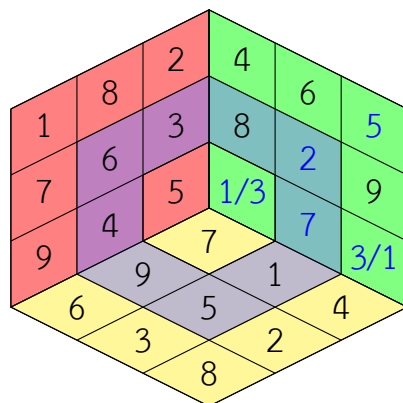
กรณีี่ที่ 48



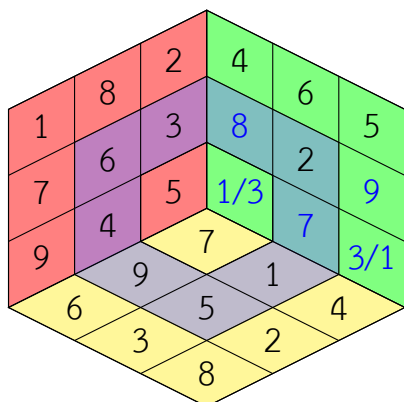
กรณีี่ 49



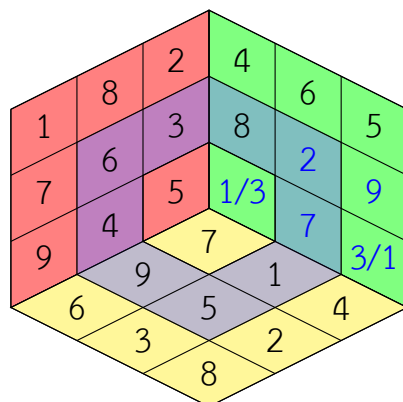
กรณีี่ 50



กรณีี่ 51



กรณีี่ 52



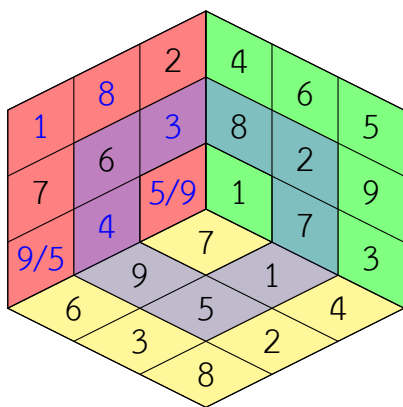
จากตัวอย่าง 48 จะได้ว่า $n(9, 9, 4)$ มีคำตอบเดียว 22 กรณีจาก 126 กรณี
สรุปได้ว่า จาก $n(4, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 7 กรณี, $n(9, 4, 9)$ มีคำตอบเดียว 31 กรณี และ $n(9, 9, 4)$
มีคำตอบเดียว 22 กรณี
ดังนั้นรูปแบบ $(4, 9, 9)$ จะมีคำตอบเดียว 60 กรณีจาก 378 กรณี

4.9 พิจารณารูปแบบ (3, 9, 9)

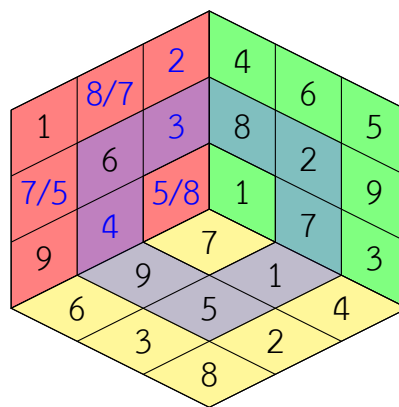
จะทำการลบทีละ 6 ช่อง เพื่อทำการหาคำตอบเดียวที่ได้จากการเติมช่องว่าง หากได้คำตอบมากกว่า 1 คำตอบจะไม่ทำการพิจารณากรณีนั้นต่อ นั่นคือรูปแบบ (3, 9, 9) จะมีทั้งหมด 252 กรณี โดยที่ $n(3, 9, 9)$ มี 84 กรณี, $n(9, 3, 9)$ มี 84 กรณี และ $n(9, 9, 3)$ มี 84 กรณี แต่จากการพิจารณารูปแบบ (4, 9, 9) กรณีใดที่มีจำนวนคำตอบมากกว่า 1 จะไม่นำมาพิจารณาต่อในรูปแบบ (3, 9, 9)

ตัวอย่าง 49 $n(R, Y, G) = n(3, 9, 9)$ โดยพิจารณาเพียง 3 กรณีจาก 84 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

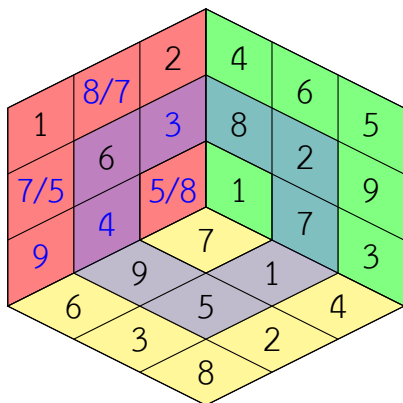
กรณีที่ 1



กรณีที่ 2



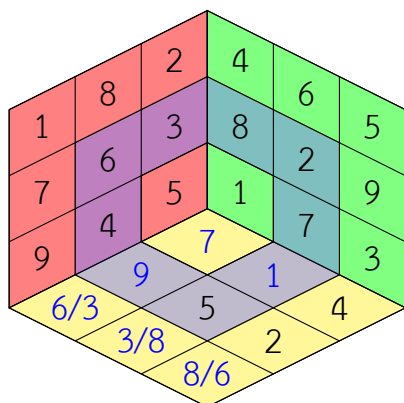
กรณีที่ 3



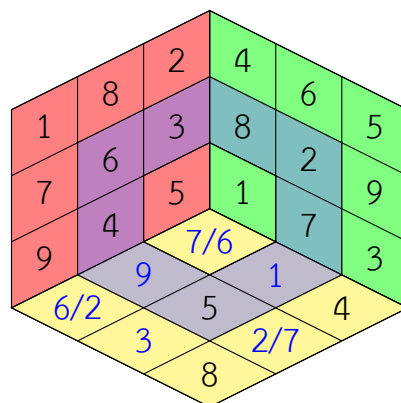
จากตัวอย่าง 49 จะได้ว่า $n(3, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 0 กรณีจาก 84 กรณี

ตัวอย่าง 50 $n(R, Y, G) = n(9, 3, 9)$ โดยพิจารณาเพียง 27 กรณีจาก 84 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

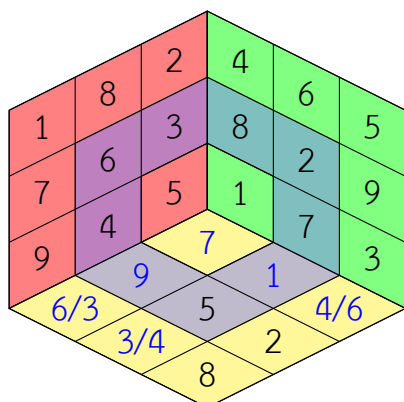
กรณีที่ 1



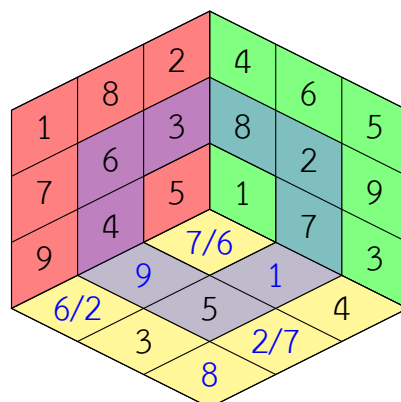
กรณีที่ 2



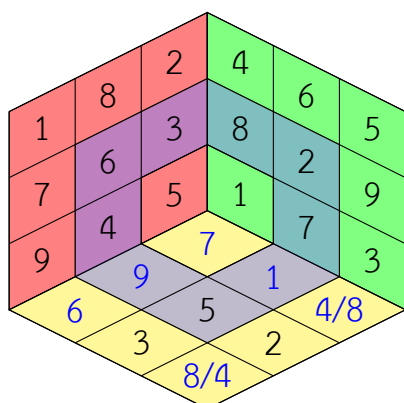
กรณีที่ 3



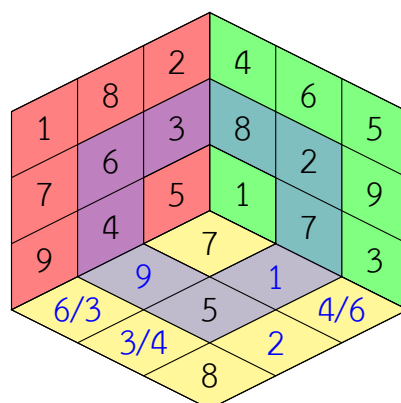
กรณีที่ 4



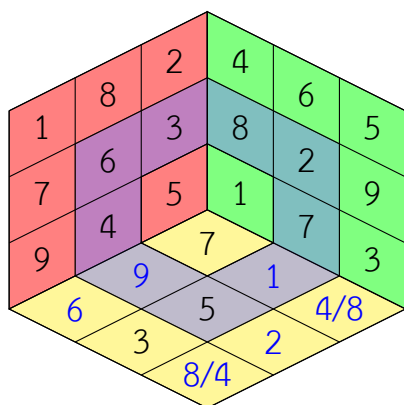
กรณีที่ 5



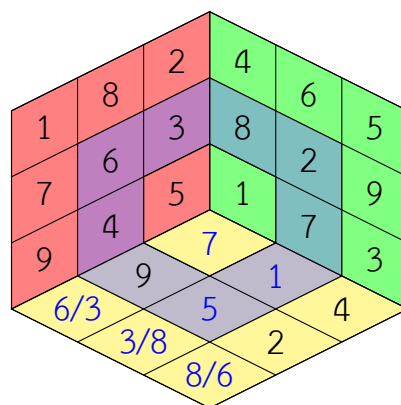
กรณีที่ 6



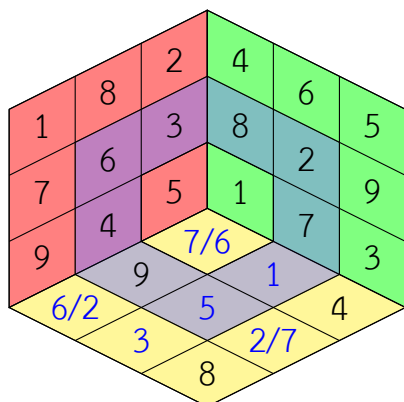
กรณีที่ 7



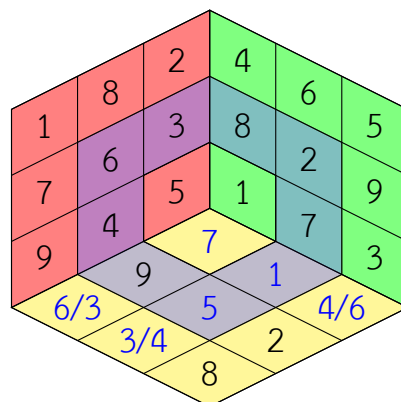
กรณีที่ 8



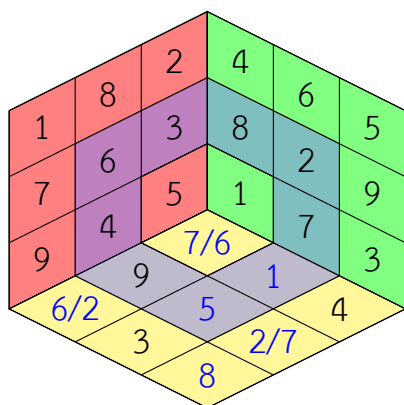
กรณีที่ 9



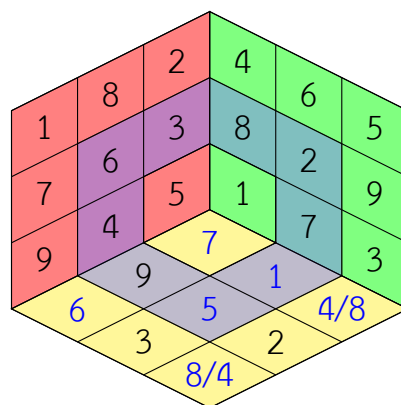
กรณีที่ 10



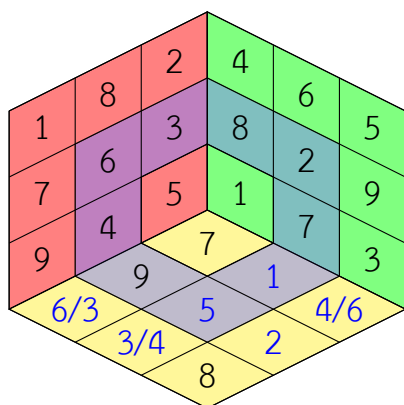
กรณีที่ 11



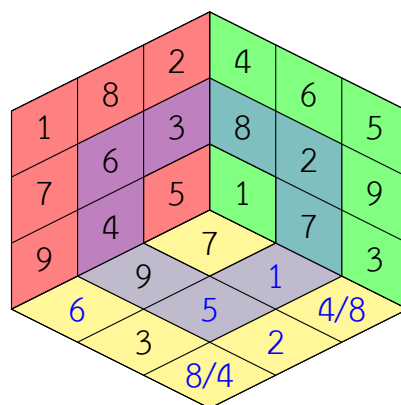
กรณีที่ 12



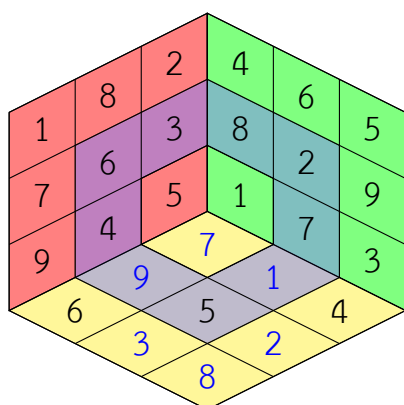
กรณีที่ 13



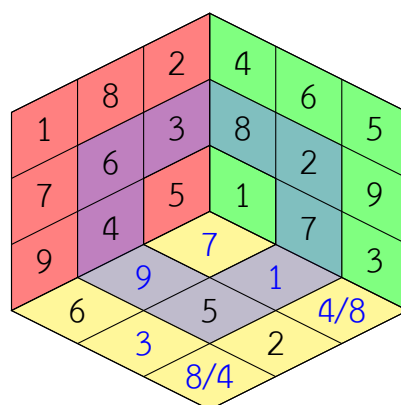
กรณีที่ 14



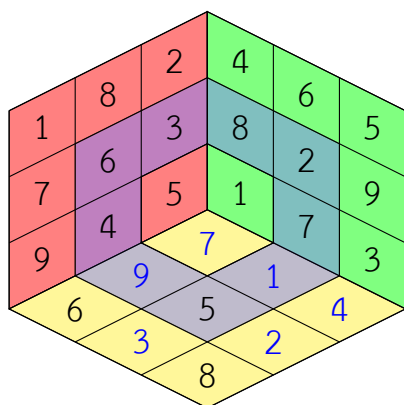
กรณีที่ 15



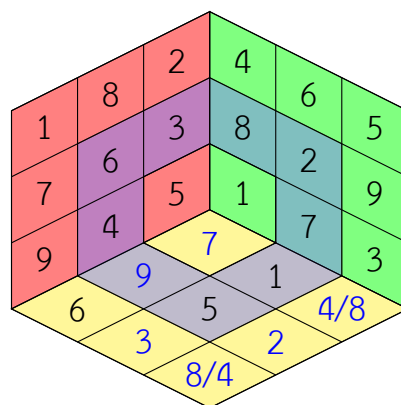
กรณีที่ 16



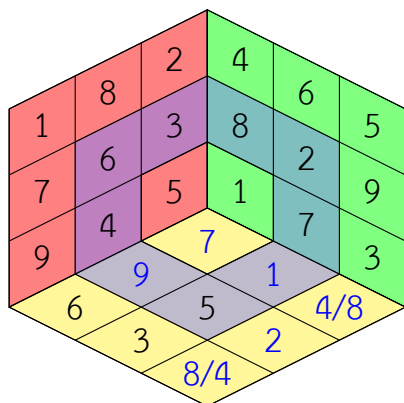
กรณีที่ 17



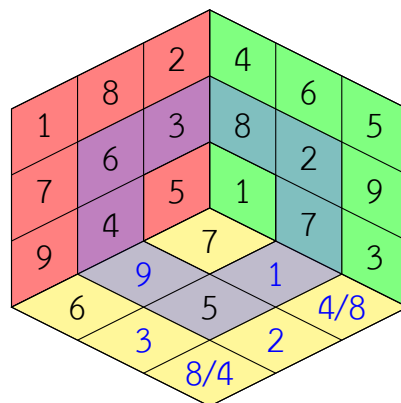
กรณีที่ 18



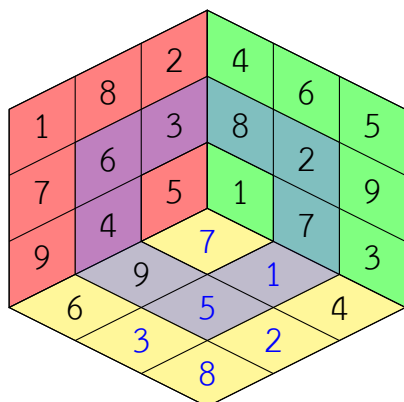
กรณีที่ 19



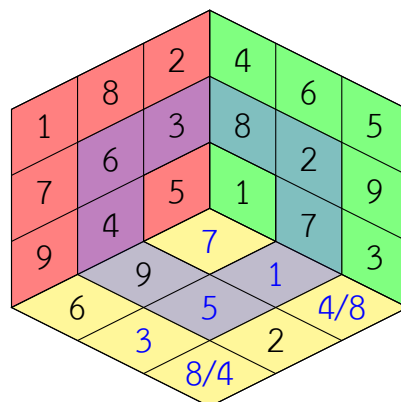
กรณีที่ 20



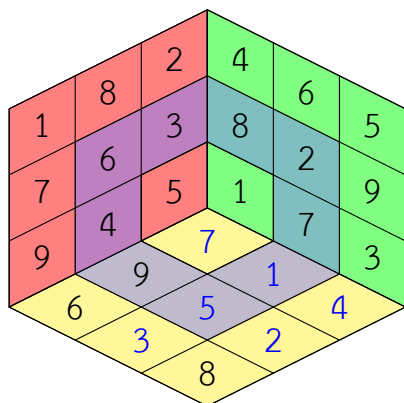
กรณีที่ 21



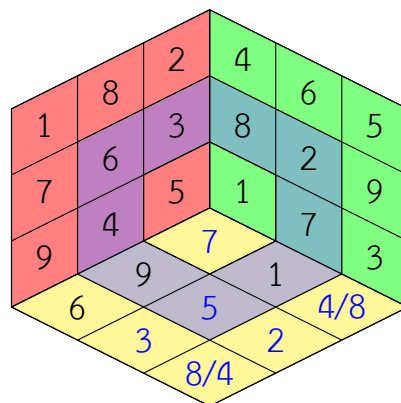
กรณีที่ 22



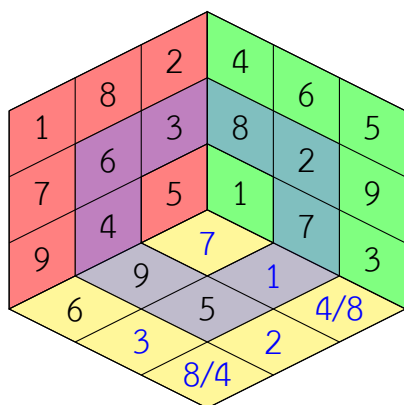
กรณีที่ 23



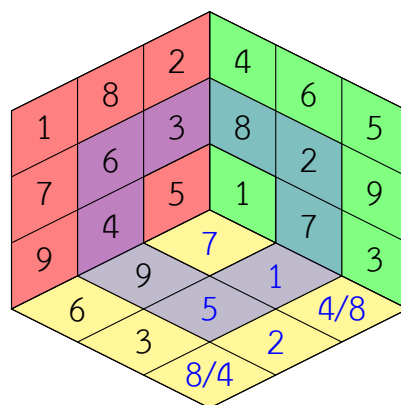
กรณีที่ 24



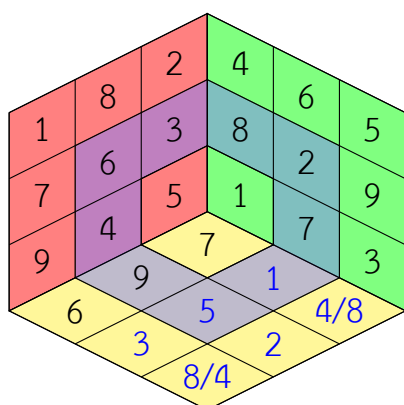
กรณีี่ 25



กรณีี่ 26



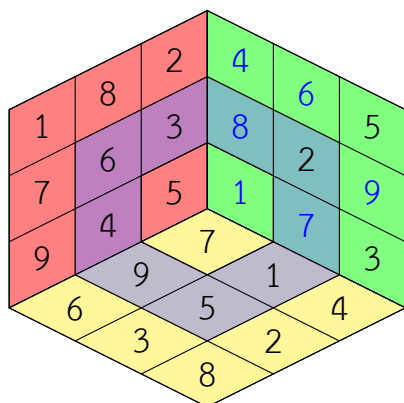
กรณีี่ 27



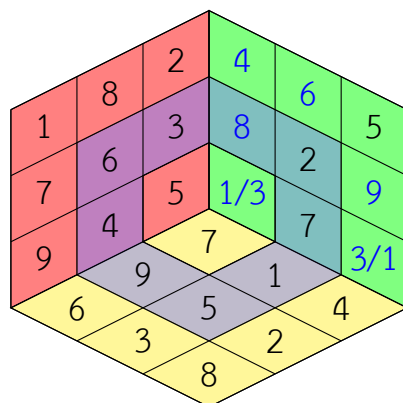
จากตัวอย่าง 50 จะได้ว่า $n(9, 3, 9)$ มีคำตอบเดียว 4 กรณีจาก 84 กรณี

ตัวอย่าง 51 $n(R, Y, G) = n(9, 9, 3)$ โดยพิจารณาเพียง 17 กรณีจาก 84 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

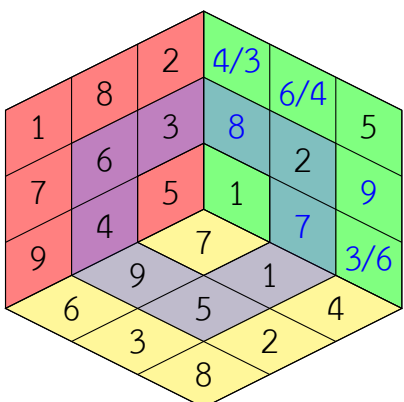
กรณีที่ 1



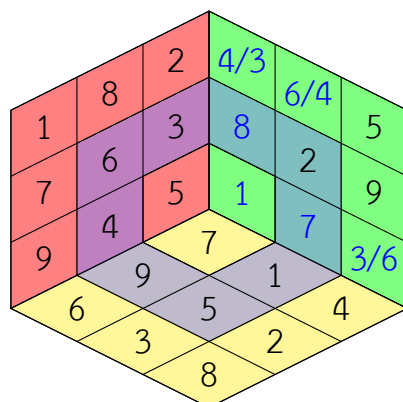
กรณีที่ 2



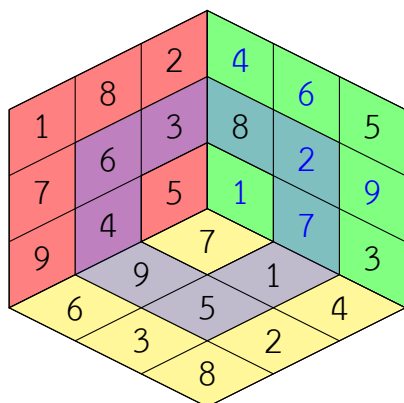
กรณีที่ 3



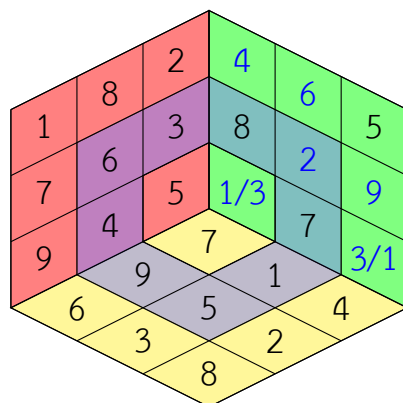
กรณีที่ 4



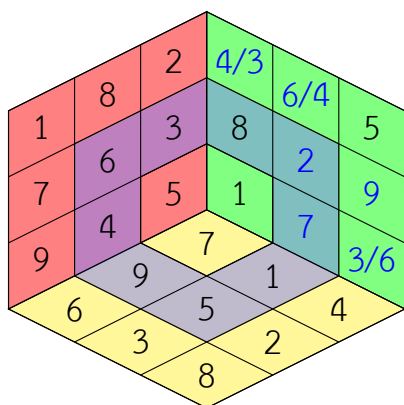
กรณีที่ 5



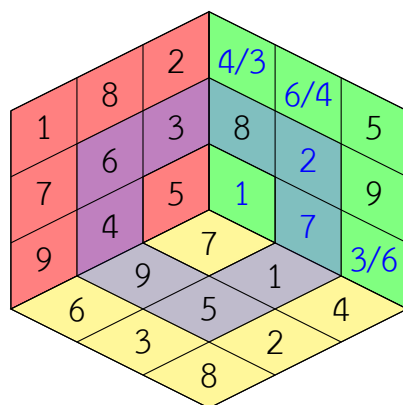
กรณีที่ 6



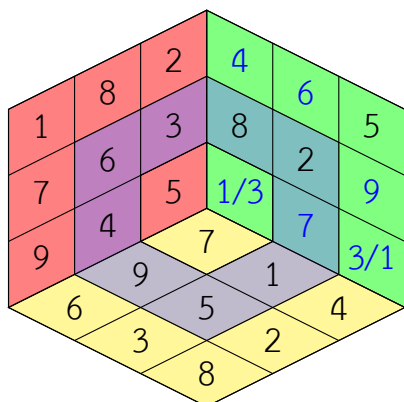
กรณีที่ 7



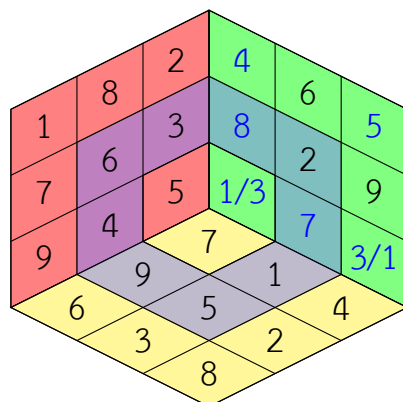
กรณีที่ 8



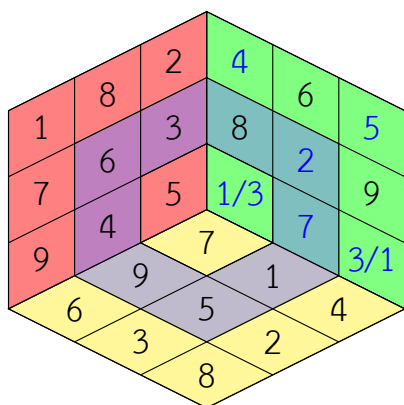
กรณีที่ 9



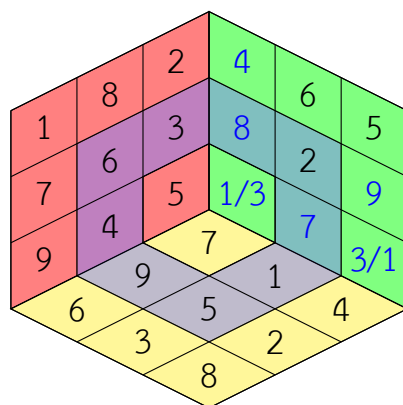
กรณีที่ 10



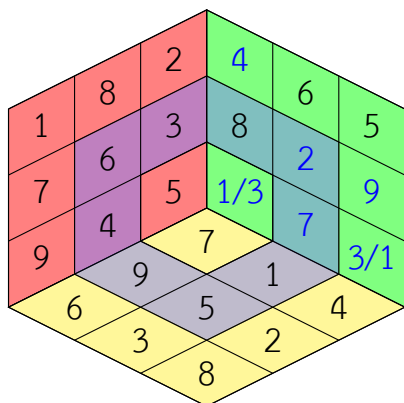
กรณีที่ 11



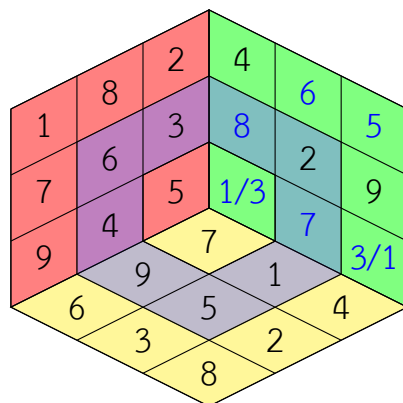
กรณีที่ 12



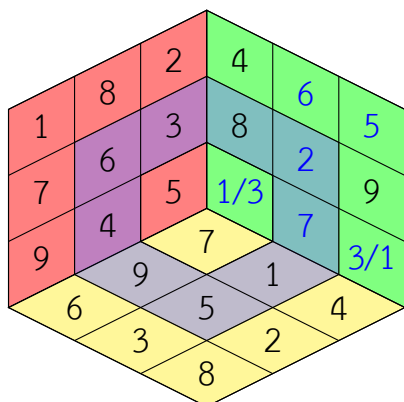
กรณี ที่ 13



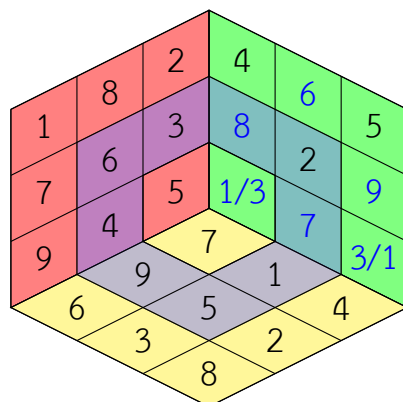
กรณี ที่ 14



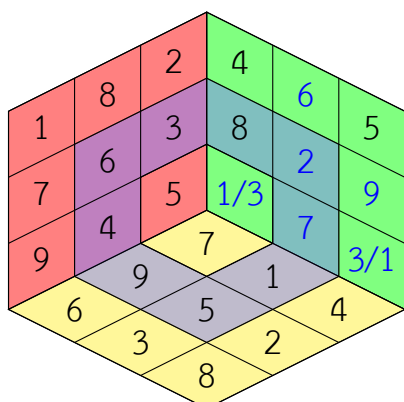
กรณี ที่ 15



กรณี ที่ 16



กรณี ที่ 17



จากตัวอย่าง 51 จะได้ว่า $n(9, 9, 3)$ มีคำตอบเดียว 2 กรณีจาก 84 กรณี
สรุปได้ว่า จาก $n(3, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 0 กรณี, $n(9, 3, 9)$ มีคำตอบเดียว 4 กรณี และ $n(9, 9, 3)$ มีคำตอบเดียว 2 กรณี
ดังนั้นรูปแบบ $(3, 9, 9)$ จะมีคำตอบเดียว 6 กรณีจาก 252 กรณี

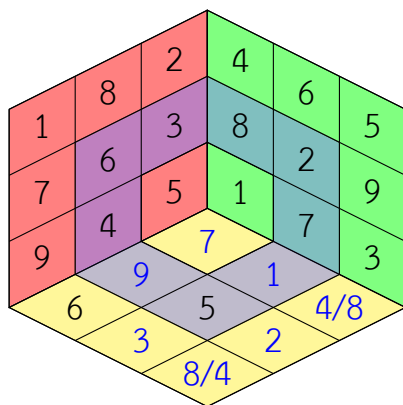
4.10 พิจารณารูปแบบ (2, 9, 9)

จะทำการลบทีละ 7 ช่อง เพื่อทำการหาคำตอบเดียวที่ได้จากการเติมช่องว่าง หากได้คำตอบมากกว่า 1 คำตอบจะไม่ทำการพิจารณากรณีนั้นต่อ นั่นคือรูปแบบ (2, 9, 9) จะมีทั้งหมด 108 กรณี โดยที่ $n(2, 9, 9)$ มี 36 กรณี, $n(9, 2, 9)$ มี 36 กรณี และ $n(9, 9, 2)$ มี 36 กรณี แต่จากการพิจารณารูปแบบ (3, 9, 9) กรณีใดที่มีจำนวนคำตอบมากกว่า 1 จะไม่นำมาพิจารณาต่อในรูปแบบ (2, 9, 9)

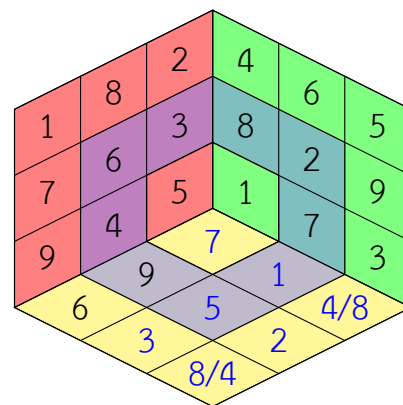
$n(R, Y, G) = n(2, 9, 9)$ จากข้อสรุปตัวอย่าง 49 ที่ไม่สามารถมีตัวเลขตั้งต้นเท่ากับ 3 ในตาราง R ทำให้ได้ว่าไม่สามารถการพิจารณาการมีตัวเลขตั้งต้นเท่ากับ 2 ใน $n(2, 9, 9)$ ได้

ตัวอย่าง 52 $n(R, Y, G) = n(9, 2, 9)$ โดยพิจารณาเพียง 2 กรณีจาก 36 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

กรณีที่ 1



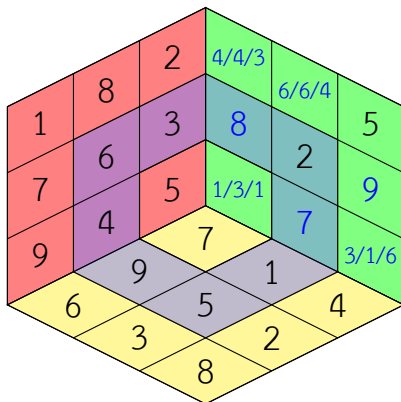
กรณีที่ 2



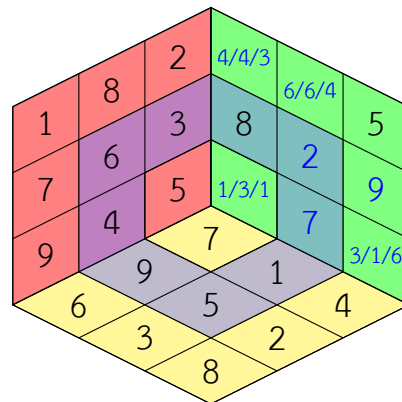
จากตัวอย่าง 52 จะได้ว่า $n(9, 2, 9)$ มีคำตอบเดียว 0 กรณีจาก 36 กรณี

ตัวอย่าง 53 $n(R, Y, G) = n(9, 9, 2)$ โดยพิจารณาเพียง 2 กรณีจาก 36 กรณีและเมื่อหาจำนวนคำตอบ จะได้ว่า

กรณีที่ 1



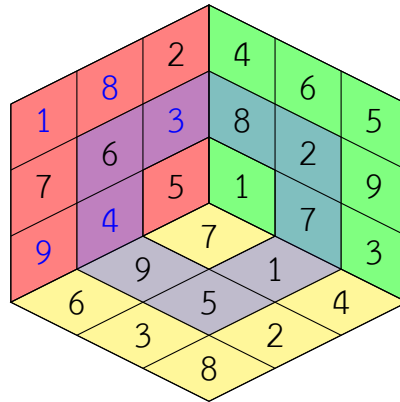
กรณีที่ 2



จากตัวอย่าง 53 จะได้ว่า $n(9, 9, 2)$ มีคำตอบเดียว 0 กรณีจาก 36 กรณี
สรุปได้ว่า จาก $n(2, 9, 9)$ มีคำตอบเดียว 0 กรณี, $n(9, 2, 9)$ มีคำตอบเดียว 0 กรณี และ $n(9, 9, 2)$ มีคำตอบเดียว 0 กรณี
ดังนั้นรูปแบบ $(2, 9, 9)$ จะมีคำตอบเดียว 0 กรณีจาก 108 กรณี สรุปได้ว่าตัวเลขตั้งต้นของตาราง R, Y และ G คือ 4,3 และ 3 ตามลำดับ ทำให้ได้ว่าตัวเลขตั้งต้นของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุนี้มีมากกว่าหรือเท่ากับ 10 เนื่องจากตัวเลขตั้งต้นของตาราง R, Y และ G คือ 4,3 และ 3 ตามลำดับที่ได้มานั้น เป็นการพิจารณาในอีก 2 ตารางมีเลขตั้งต้นครบ 9 ช่อง ดังนั้นตัวเลขตั้งต้นของตาราง R, Y และ G คือ 4,3 และ 3 ตามลำดับ จะไม่สามารถปรากฏพร้อมกันได้

4.11 พิจารณาการหาตัวเลขตั้งต้นน้อยที่สุดจากรูปแบบ $n(4, 9, 9)$

จากรูปแบบ $(4, 9, 9)$ ทำให้ได้ตัวเลขตั้งต้นน้อยที่สุดของตาราง B จากนั้นจะทำการพิจารณาการหาคำตอบเดียวจากรูปแบบนี้ โดยการพิจารณาลบเลขตั้งต้นในตาราง Y ซึ่ง จากการพิจารณารูปแบบ $n(4, 9, 9)$ จากตัวอย่าง 46 มีคำตอบเดียว 7 กรณี แต่การพิจารณานี้จะยกมาพิจารณาเพียง 1 กรณี นั่นคือจากตัวอย่าง 46 กรณีที่ 3 ดังรูป

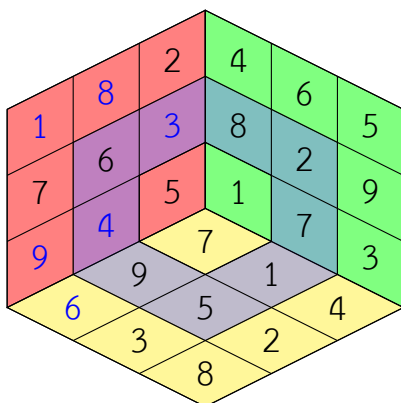


4.11.1 พิจารณารูปแบบ $n(4, 8, 9)$

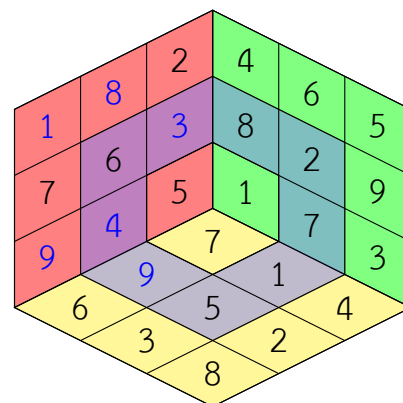
จะทำการลบทีละ 1 ช่อง เพื่อทำการหาคำตอบเดียวที่ได้จากการเติมช่องว่าง

ตัวอย่าง 54 $n(R, Y, G) = n(4, 8, 9)$ มีทั้งหมด 9 กรณี

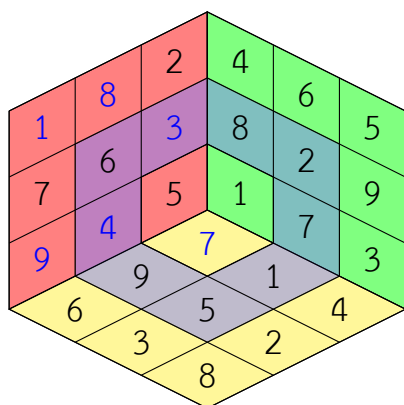
กรณีที่ 1



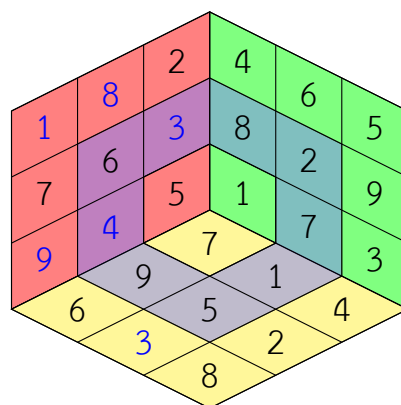
กรณีที่ 2



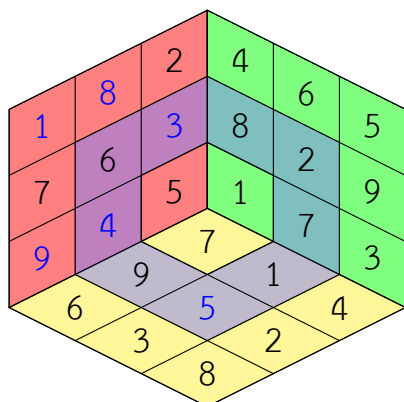
กรณีที่ 3



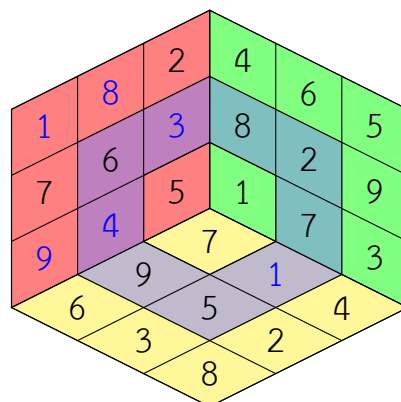
กรณีที่ 4



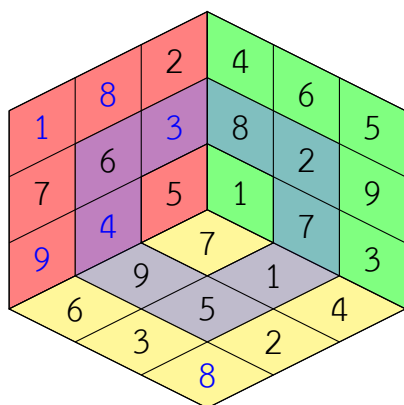
กรณีที่ 5



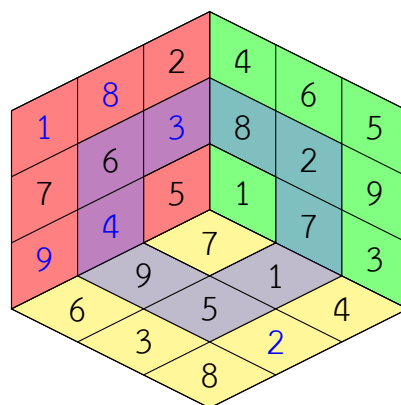
กรณีที่ 6



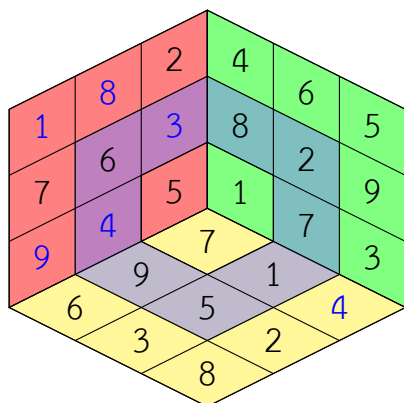
กรณีที่ 7



กรณีที่ 8



กรณีที่ 9

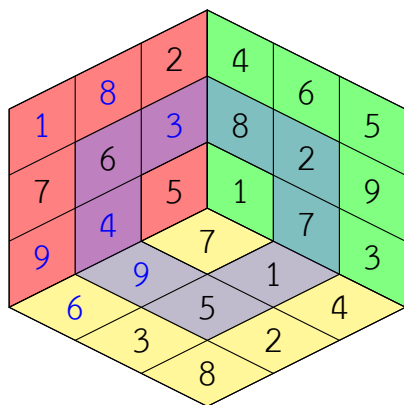


จากตัวอย่าง 54 จะได้ว่า $n(4, 8, 9)$ มีคำตอบเดียว 9 กรณี อ้างอิงจากกลยุทธ์ เทคนิคและเคล็ดลับการไขปริศนา 1. ช่องว่างสุดท้าย

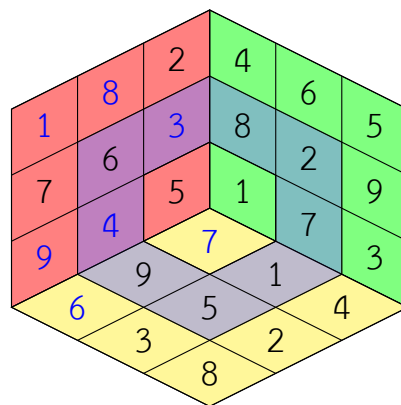
4.11.2 พิจารณารูปแบบ $n(4, 7, 9)$

ตัวอย่าง 55 $n(R, Y, G) = n(4, 7, 9)$ มีทั้งหมด 36 กรณี แต่การพิจารณานี้เป็นการพิจารณาจากรูปแบบ $n(4, 8, 9)$ หรือจากตัวอย่าง 54 ในกรณีที่ 1 ดังนั้นจะทำการพิจารณา $n(4, 7, 9)$ เพียง 8 กรณี

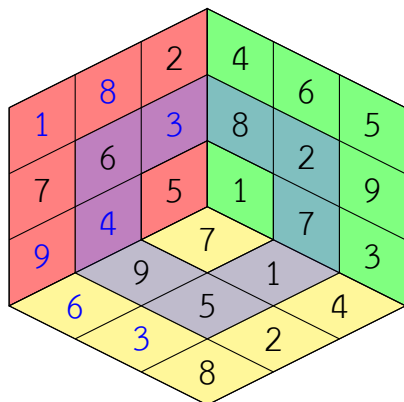
กรณีที่ 1



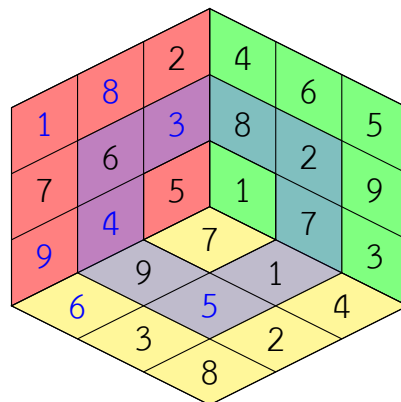
กรณีที่ 2



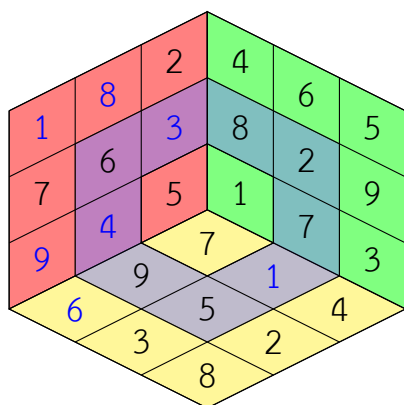
กรณีที่ 3



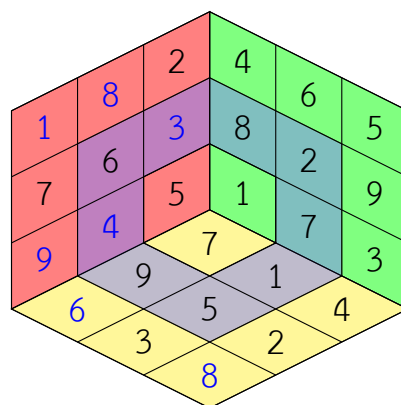
กรณีที่ 4



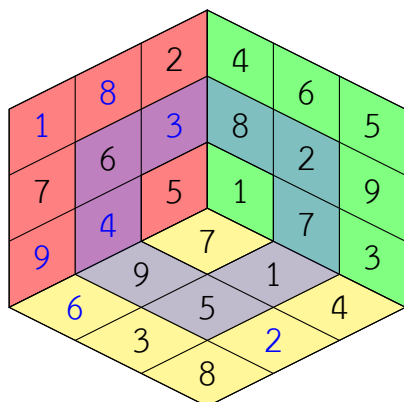
กรณีที่ 5



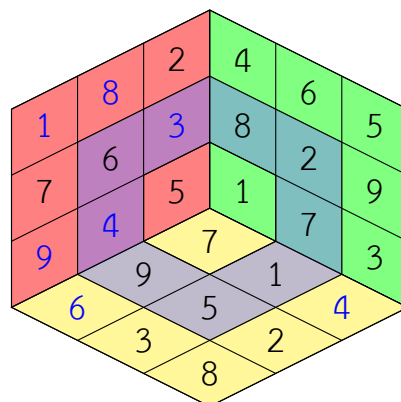
กรณีที่ 6



กรณีที่ 7



กรณีที่ 8

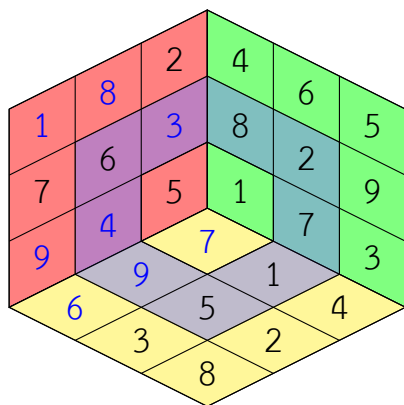


จากตัวอย่าง 55 จะได้ว่าปริศนาไอโซเมตริกทุกกรณีมีคำตอบเดียว นั่นคือมีทั้งหมด 8 กรณี

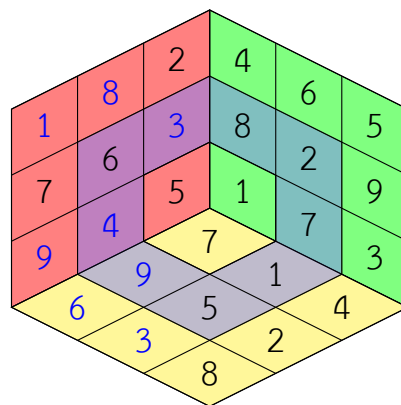
4.11.3 พิจารณารูปแบบ $n(4, 6, 9)$

ตัวอย่าง 56 $n(R, Y, G) = n(4, 6, 9)$ มีทั้งหมด 84 กรณี แต่การพิจารณานี้เป็นการพิจารณาจากรูปแบบ $n(4, 7, 9)$ หรือจากตัวอย่าง 55 ในกรณีที่ 1 ดังนั้นจะทำการพิจารณา $n(4, 6, 9)$ เพียง 7 กรณี

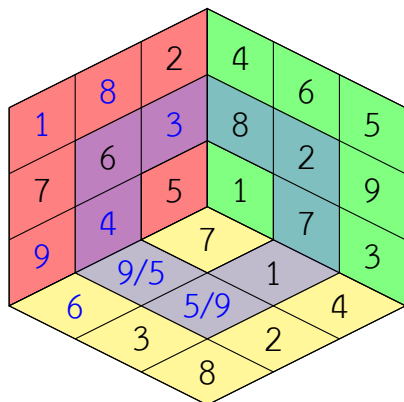
กรณีที่ 1



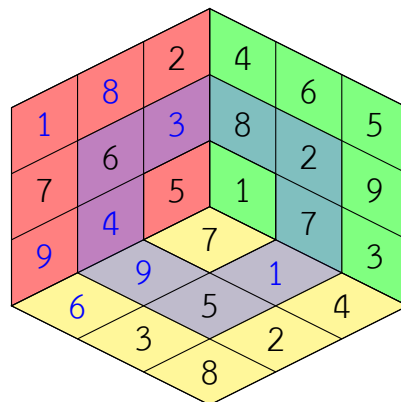
กรณีที่ 2



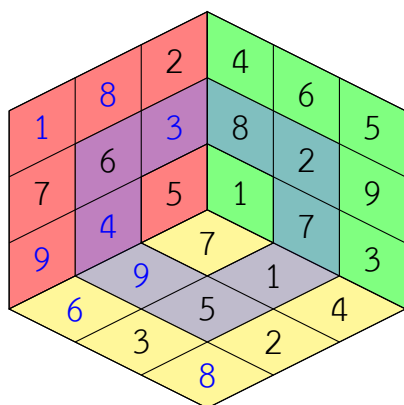
กรณีที่ 3



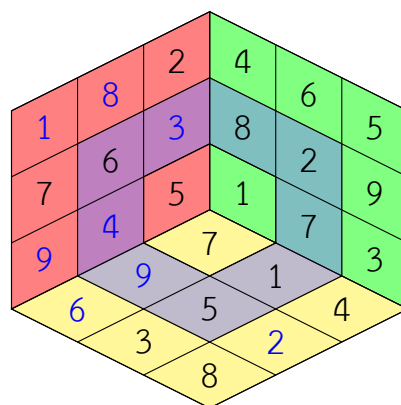
กรณีที่ 4



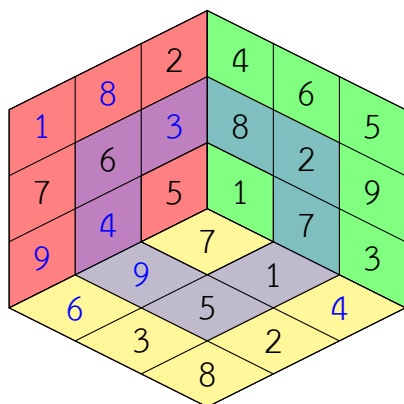
กรณีที่ 5



กรณีที่ 6



กรณีที่ 7

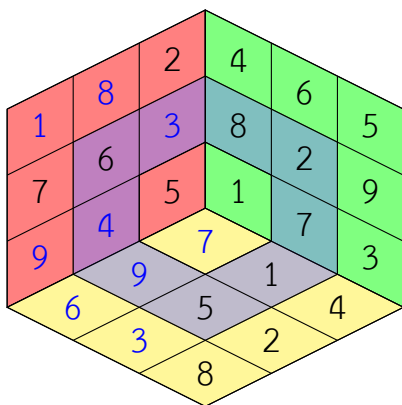


จากตัวอย่าง 56 จะได้ว่าปริศนาไอโซเมตริกทุกกรณีมีคำตอบเดียว 6 กรณี จากทั้งหมด 7 กรณี

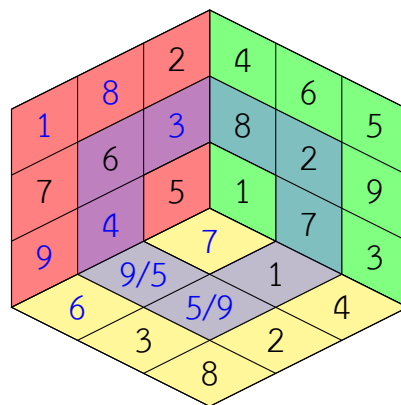
4.11.4 พิจารณารูปแบบ $n(4, 5, 9)$

ตัวอย่าง 57 $n(R, Y, G) = n(4, 5, 9)$ มีทั้งหมด 126 กรณี แต่การพิจารณานี้เป็นการพิจารณาจากรูปแบบ $n(4, 6, 9)$ หรือจากตัวอย่าง 56 ในกรณีที่ 1 ดังนั้นจะทำการพิจารณา $n(4, 6, 9)$ เพียง 6 กรณี

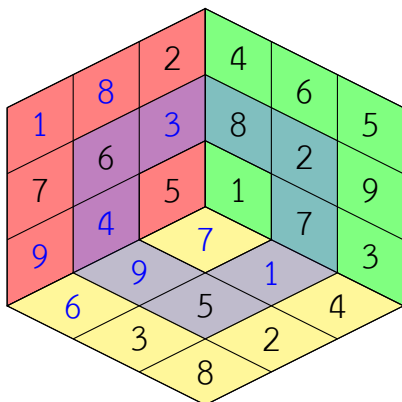
กรณีที่ 1



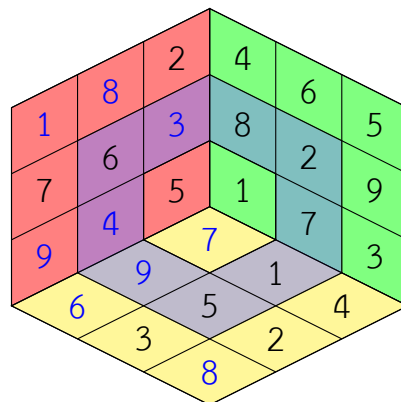
กรณีที่ 2



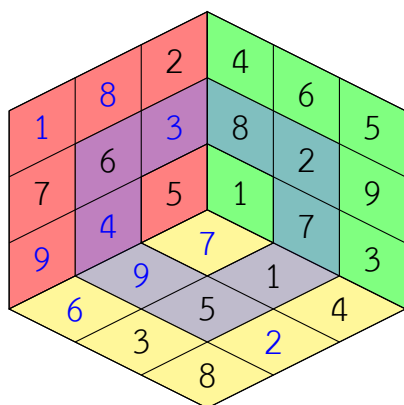
กรณีที่ 3



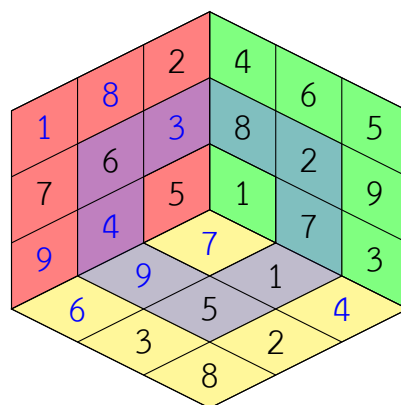
กรณีที่ 4



กรณีที่ 5



กรณีที่ 6

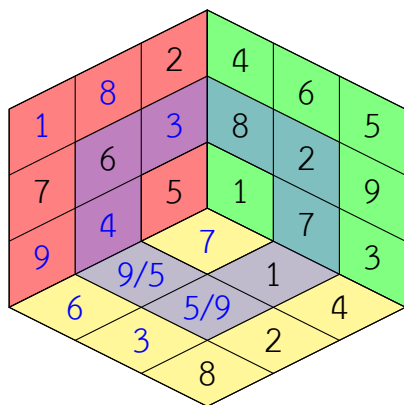


จากตัวอย่าง 57 จะได้ว่าปริศนาไอโซเมตริกทุกกรณีมีคำตอบเดียว 5 กรณี จากทั้งหมด 6 กรณี

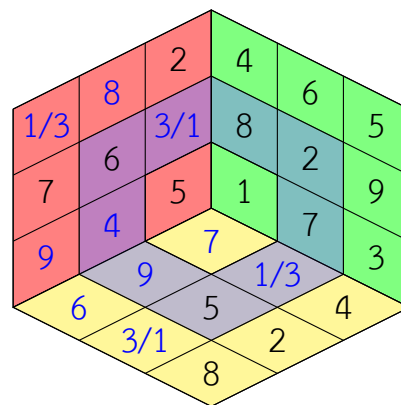
4.11.5 พิจารณารูปแบบ $n(4, 4, 9)$

ตัวอย่าง 58 $n(R, Y, G) = n(4, 4, 9)$ มีทั้งหมด 126 กรณี แต่การพิจารณานี้เป็นการพิจารณาจากรูปแบบ $n(4, 5, 9)$ หรือจากตัวอย่าง 57 ในกรณีที่ 1 ดังนั้นจะทำการพิจารณา $n(4, 5, 9)$ เพียง 5 กรณี

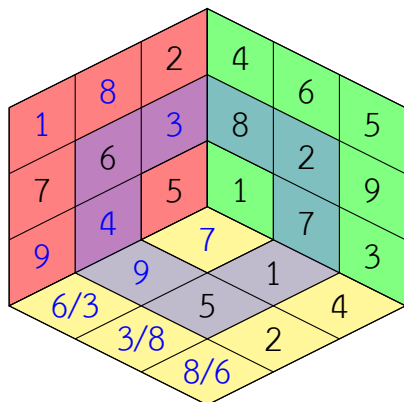
กรณีที่ 1



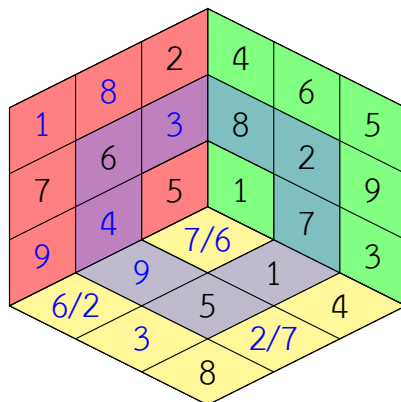
กรณีที่ 2



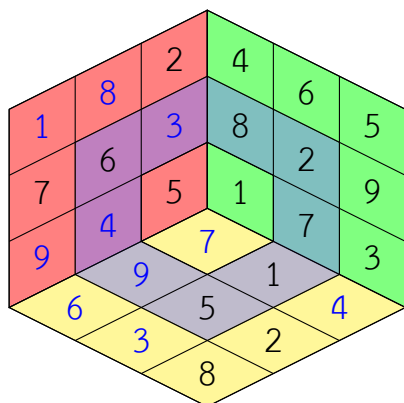
กรณีที่ 3



กรณีที่ 4



กรณีที่ 5

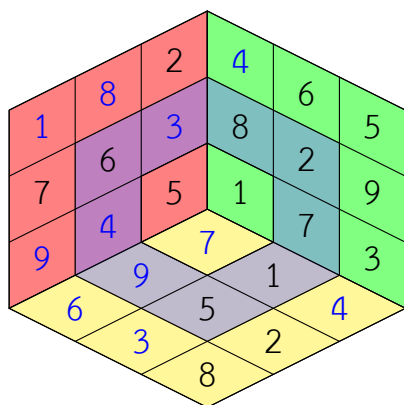


จากตัวอย่าง 58 จะได้ว่าปริศนาไอโซเมตริกทุกกรณีมีคำตอบเดียว 1 กรณี จากทั้งหมด 5 กรณี
สรุปได้ว่าเมื่อลบเลขตั้งต้นเพื่อสร้างปริศนาไอโซเมตริกในตาราง R และ Y เพื่อให้ได้เพียงคำ
ตอบเดียวคือ อยู่ในรูปแบบ $n(4, 4, 9)$

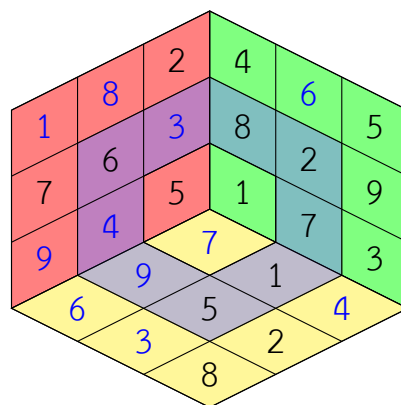
4.11.6 พิจารณารูปแบบ $n(4, 4, 8)$

ตัวอย่าง 59 $n(R, Y, G) = n(4, 4, 8)$ มีทั้งหมด 9 กรณี

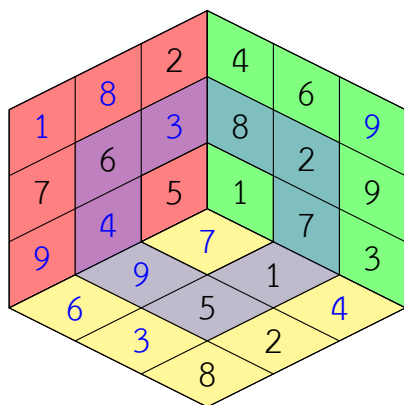
กรณีที่ 1



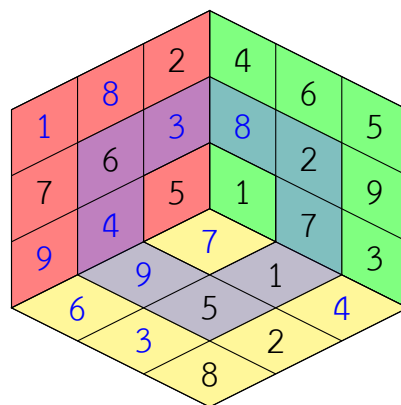
กรณีที่ 2



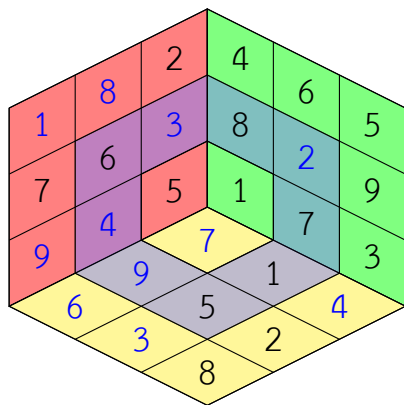
กรณีที่ 3



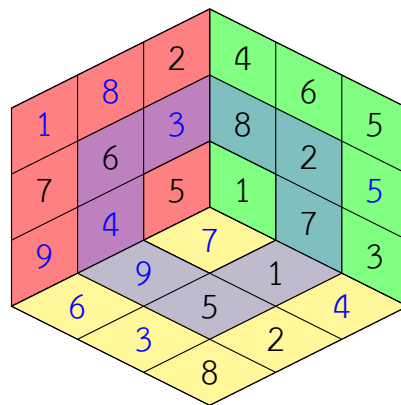
กรณีที่ 4



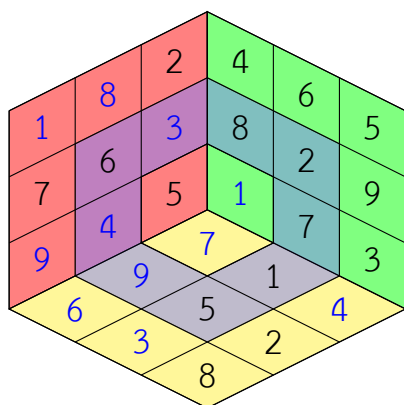
กรณีที่ 5



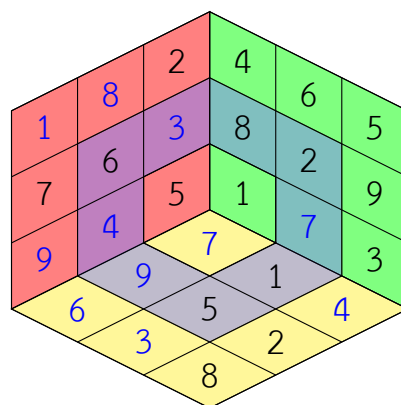
กรณีที่ 6



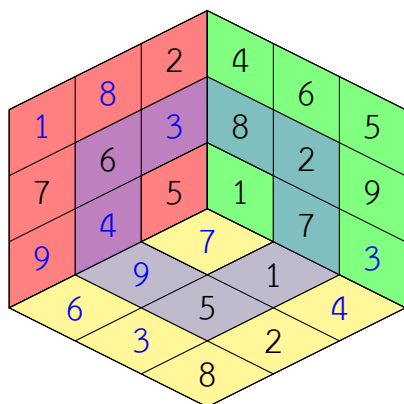
กรณีี่ 7



กรณีี่ 8



กรณีี่ 9

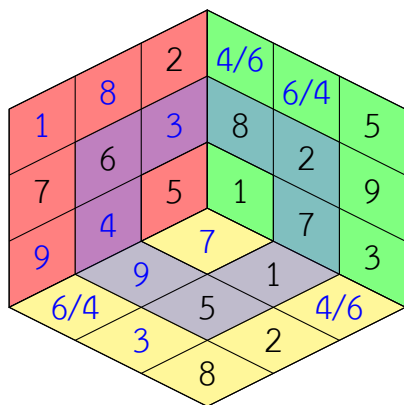


จากตัวอย่าง 59 จะได้ว่า $n(4, 4, 8)$ มีคำตอบเดียว 9 กรณี อ้างอิงจากกลยุทธ์ เทคนิคและเคล็ดลับการไขปริศนา 1. ช่องว่างสุดท้าย

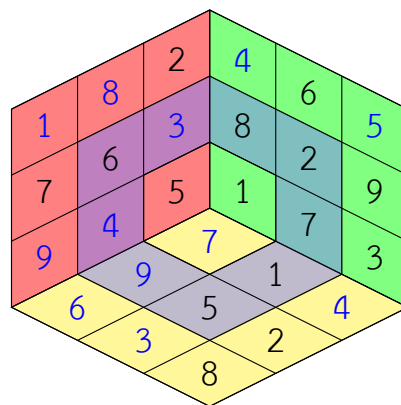
4.11.7 พิจารณารูปแบบ $n(4, 4, 7)$

ตัวอย่าง 60 $n(R, Y, G) = n(4, 4, 7)$ มีทั้งหมด 36 กรณี แต่การพิจารณานี้เป็นการพิจารณาจากรูปแบบ $n(4, 4, 8)$ หรือจากตัวอย่าง 59 ในกรณีที่ 1 ดังนั้นจะทำการพิจารณา $n(4, 4, 7)$ เพียง 8 กรณี

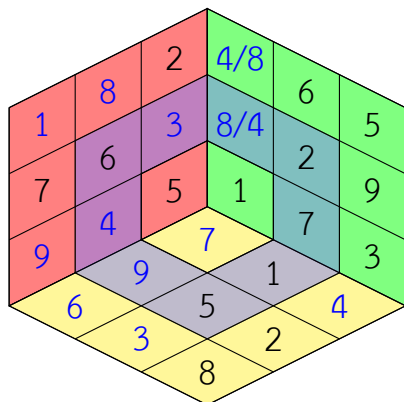
กรณีที่ 1



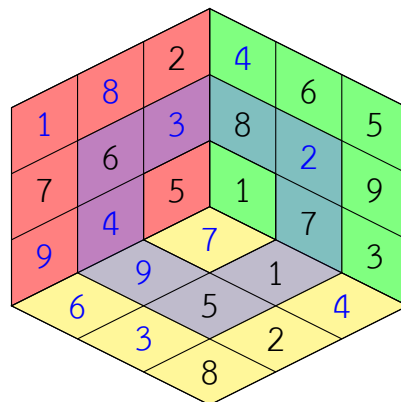
กรณีที่ 2



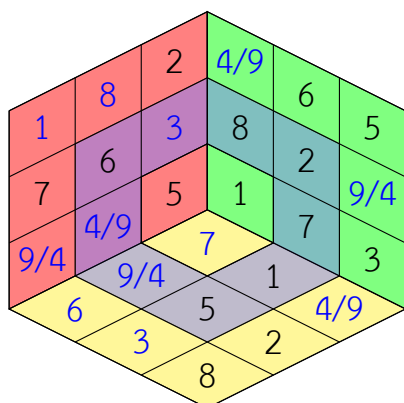
กรณีที่ 3



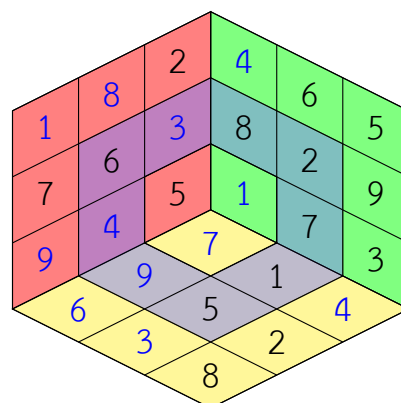
กรณีที่ 4



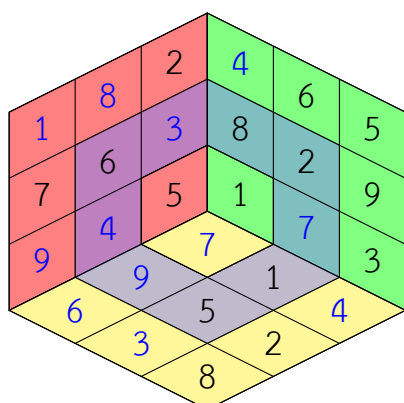
กรณีที่ 5



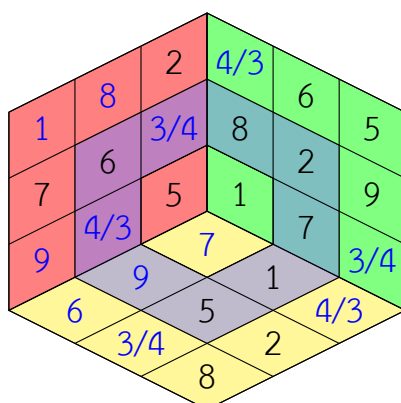
กรณีที่ 6



กรณีที่ 7



กรณีที่ 8

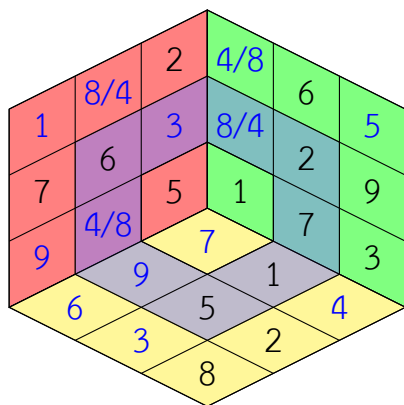


จากตัวอย่าง 60 จะได้ว่าปริศนาไอโซเมตริกทุกกรณีมีคำตอบเดียว 4 กรณี จากทั้งหมด 8 กรณี

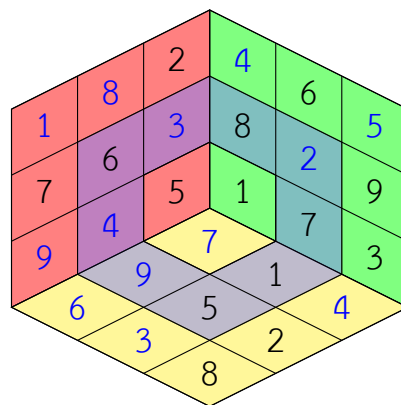
4.11.8 พิจารณารูปแบบ $n(4, 4, 6)$

ตัวอย่าง 61 $n(R, Y, G) = n(4, 4, 6)$ มีทั้งหมด 84 กรณี แต่การพิจารณานี้เป็นการพิจารณาจากรูปแบบ $n(4, 4, 7)$ หรือจากตัวอย่าง 60 ในกรณีที่ 2 ดังนั้นจะทำการพิจารณา $n(4, 4, 6)$ เพียง 6 กรณี

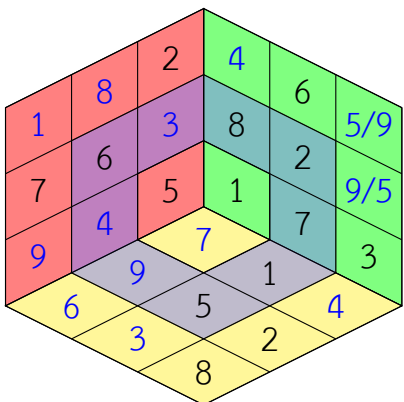
กรณีที่ 1



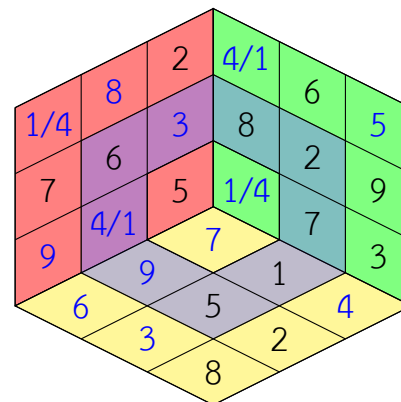
กรณีที่ 2



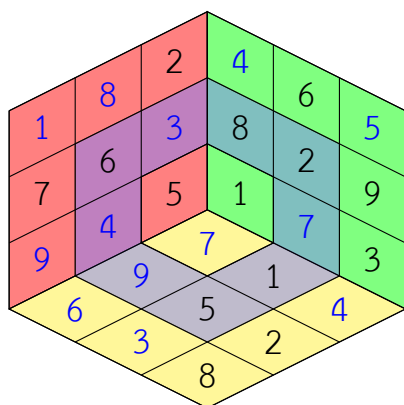
กรณีที่ 3



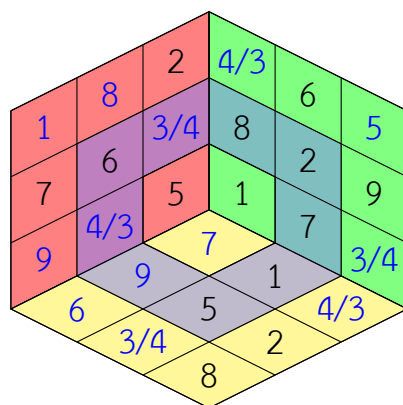
กรณีที่ 4



กรณีที่ 5



กรณีที่ 6

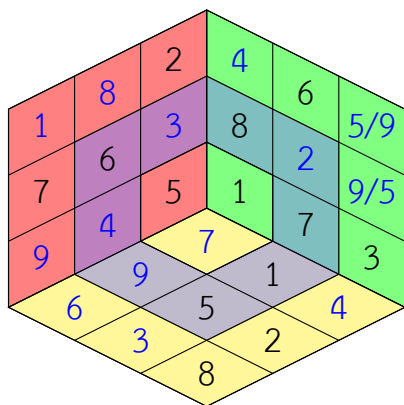


จากตัวอย่าง 61 จะได้ว่าปริศนาไอโซเมตริกทุกกรณีมีคำตอบเดียว 2 กรณี จากทั้งหมด 6 กรณี

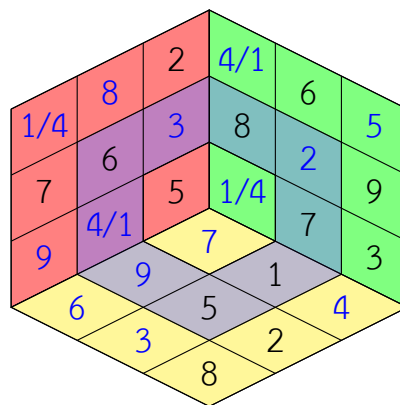
4.11.9 พิจารณารูปแบบ $n(4, 4, 5)$

ตัวอย่าง 62 $n(R, Y, G) = n(4, 4, 5)$ มีทั้งหมด 126 กรณี แต่การพิจารณานี้เป็นการพิจารณาจากรูปแบบ $n(4, 4, 6)$ หรือจากตัวอย่าง 61 ในกรณีที่ 2 ดังนั้นจะทำการพิจารณา $n(4, 4, 5)$ เพียง 4 กรณี

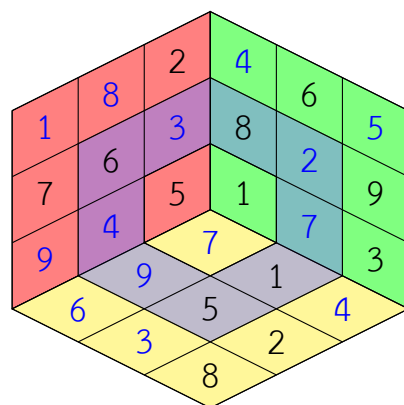
กรณีที่ 1



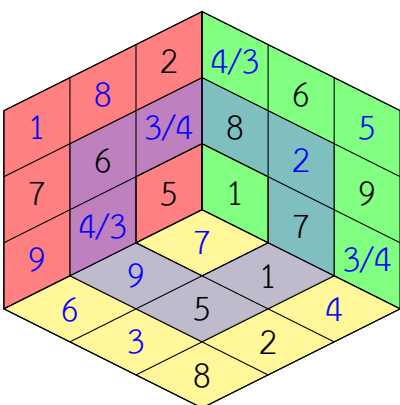
กรณีที่ 2



กรณีที่ 3



กรณีที่ 4

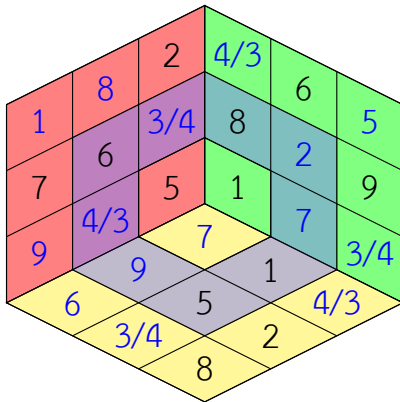


จากตัวอย่าง 62 จะได้ว่าปริศนาไอโซเมตริกทุกกรณีมีคำตอบเดียว 1 กรณี จากทั้งหมด 4 กรณี

4.11.10 พิจารณารูปแบบ $n(4, 4, 4)$

ตัวอย่าง 63 $n(R, Y, G) = n(4, 4, 4)$ มีทั้งหมด 126 กรณี แต่การพิจารณานี้เป็นการพิจารณาจากรูปแบบ $n(4, 4, 5)$ หรือจากตัวอย่าง 61 ในกรณีที่ 3 ดังนั้นจะทำการพิจารณา $n(4, 4, 4)$ เพียง 1 กรณี

กรณีที่ 1



จากตัวอย่าง 63 จากการพิจารณาหาคำตอบเดียวของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุ ได้ว่ารูปแบบ $n(4, 4, 4)$ ไม่มีคำตอบเดียว

สรุปได้ว่าเมื่อลบเลขตั้งต้นเพื่อสร้างปริศนาไอโซเมตริกในตาราง R, Y และ G เพื่อให้ได้เพียงคำตอบเดียวคือ อยู่ในรูปแบบ $n(4, 4, 5)$

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษา

- หาจำนวนเลขตั้งต้นน้อยสุดของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุที่จะทำให้มีเพียงคำตอบเดียว

กรณี	รูปแบบ	จำนวนปริศนาทั้งหมด	จำนวนปริศนาที่มีเพียงคำตอบเดียว
(8,9,9)	$n(8, 9, 9)$	9	9
	$n(9, 8, 9)$	9	9
	$n(9, 9, 8)$	9	9
	รวม	27	27
(7,9,9)	$n(7, 9, 9)$	36	31
	$n(9, 9)$	36	34
	$n(9, 9, 7)$	36	33
	รวม	108	98
(6,9,9)	$n(6, 9, 9)$	84	49
	$n(9, 6, 9)$	84	68
	$n(9, 9, 6)$	84	61
	รวม	252	178
(5,9,9)	$n(5, 9, 9)$	126	34
	$n(9, 5, 9)$	126	69
	$n(9, 9, 5)$	126	55
	รวม	378	160
(4,9,9)	$n(4, 9, 9)$	126	7
	$n(9, 4, 9)$	126	31
	$n(9, 9, 4)$	126	22
	รวม	378	60
(3,9,9)	$n(3, 9, 9)$	84	0
	$n(9, 3, 9)$	84	4
	$n(9, 9, 3)$	84	2
	รวม	252	6
(2,9,9)	$n(2, 9, 9)$	36	0
	$n(9, 2, 9)$	36	0
	$n(9, 9, 2)$	36	0
	รวม	108	0

จากการพิจารณาตามตารางข้างต้นแล้ว ต่อไปจะเป็นการยกกรณีจากตารางข้างต้นในกรณี (4, 9, 9) มาหาคำตอบเดียวของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุ จากการลบเลขตั้งต้นในตาราง Y

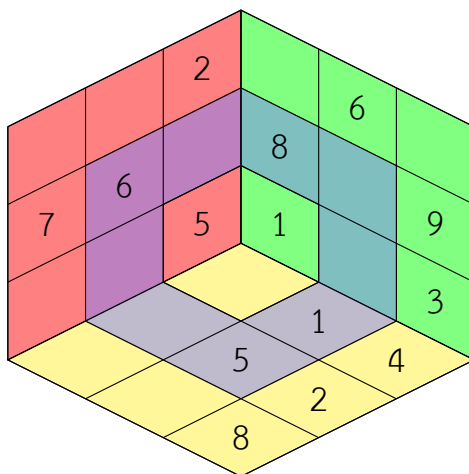
รูปแบบ	จำนวนกรณีที่เป็นไปได้ ของรูปแบบ $n(u, v, w)$	จำนวนกรณีที่น่ามาพิจารณา	จำนวนกรณีที่ มีเพียงคำตอบเดียว
$n(4, 8, 9)$	9	9	9
$n(4, 7, 9)$	36	8	8
$n(4, 6, 9)$	84	7	6
$n(4, 5, 9)$	126	6	5
$n(4, 4, 9)$	126	5	1

จากการพิจารณาตามตารางข้างต้นแล้ว ต่อไปจะเป็นการยกกรณีจากตารางข้างต้นในกรณี (4, 4, 9) มาหาคำตอบเดียวของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุ จากการลบเลขตั้งต้นในตาราง G

รูปแบบ	จำนวนกรณีที่เป็นไปได้ ของรูปแบบ $n(u, v, w)$	จำนวนกรณีที่น่ามาพิจารณา	จำนวนกรณีที่ มีเพียงคำตอบเดียว
$n(4, 4, 8)$	9	9	9
$n(4, 4, 7)$	36	8	4
$n(4, 4, 6)$	84	6	2
$n(4, 4, 5)$	126	4	1
$n(4, 4, 4)$	126	1	0

จากตารางข้างต้นเราสามารถรู้เลขตั้งต้นที่น้อยที่สุดของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุอยู่ในรูปแบบ $n(4, 4, 5)$ หรือว่ามีเลขตั้งต้นเท่ากับ 13 ดังนั้นสรุปได้ว่าตัวเลขตั้งต้นของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุนี้คือ ตั้งแต่ 10 ถึง 13

ตัวอย่าง 64 ปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุที่มีคำตอบเดียวจากการเติมตัวเลข



รูปแบบ $n(4, 4, 5)$ ของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุที่สามารถได้เพียงคำตอบเดียว

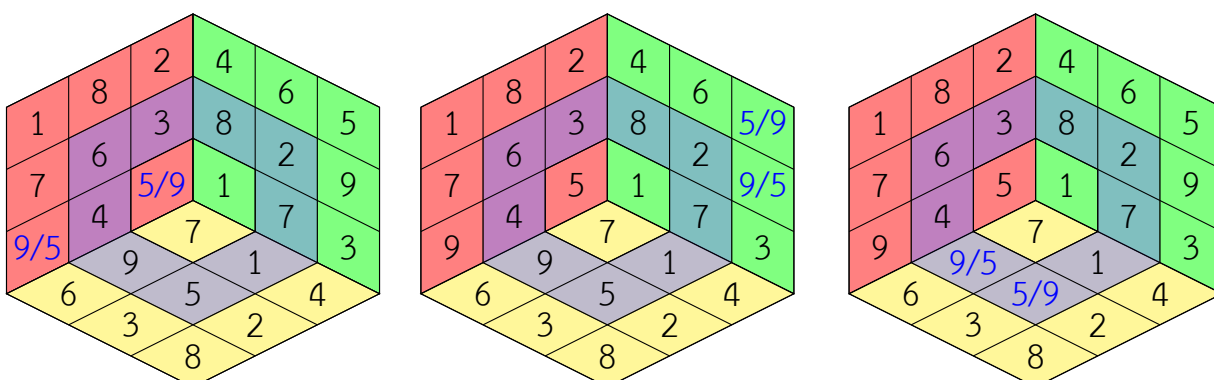
- หาจำนวนไอโซเมตริกซูโดกุสมบูรณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จากชุดคำสั่งโฟตอน ได้ว่าสามารถมีขอบเขตบนเป็น $9! \times 6!^3$

หมายเหตุ การศึกษานี้เป็นการพิจารณาเพียงกรณี $n(a, 9, 9)$ โดยที่ $a = 1, 2, \dots, 8$ และจากนั้นพิจารณาตัวเลขตั้งต้นของตาราง Y เพียงบางกรณี เช่นเดียวกับการพิจารณาเลขตั้งต้นในตาราง G ที่มีการยกกรณีบางกรณีมาพิจารณาเพื่อหาการมีคำตอบเพียงคำตอบเดียว

5.1 ข้อสังเกต

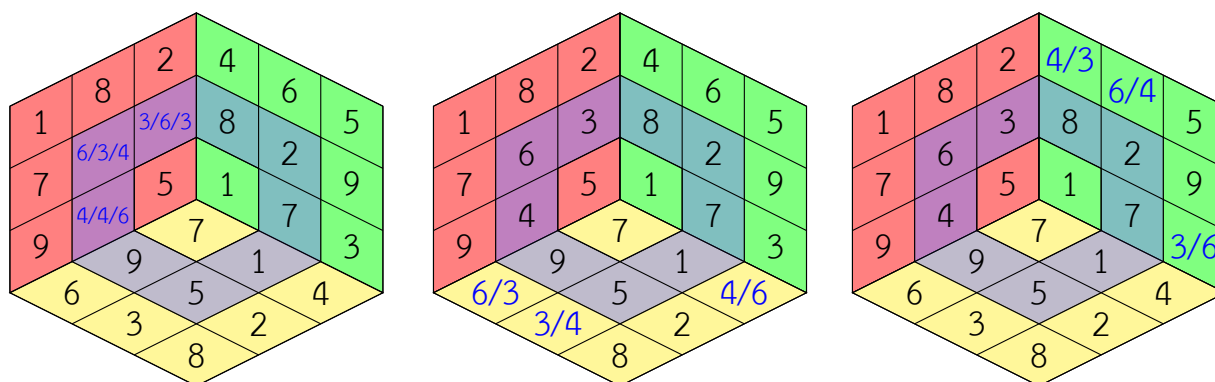
จากการพิจารณา $(7, 9, 9)$ จะเห็นได้จากการลบเลขตั้งต้นและการเติมตัวเลขเพื่อพิจารณาการมีจำนวนคำตอบ จะมีตัวเลขจำนวน 1 คู่ ที่มีการลบและการเติมคำตอบจะมีจำนวน 2 คำตอบ นั่นคือเลข 5 และเลข 9 ในทุกตารางสี่

ข้อสังเกต 1 ดังภาพเมื่อมีการลบเลขตั้งต้นเลข 5 และ 9 จากนั้นเติมตัวเลขเพื่อพิจารณาการมีจำนวนคำตอบ



จากการพิจารณา (6, 9, 9) จะเห็นได้จากการลบเลขตั้งต้นและการเติมตัวเลขเพื่อพิจารณาการมีจำนวนคำตอบ จะมีตัวเลขจำนวน 1 ชุด ที่มีการลบและการเติมคำตอบจะมีจำนวนอย่างน้อย 2 คำตอบ นั่นคือเลข 3, 4 และเลข 6 ในทุกตารางสี

ข้อสังเกต 2 ดังภาพเมื่อมีการลบเลขตั้งต้นเลข 3, 4 และ 6 จากนั้นเติมตัวเลขเพื่อพิจารณาการมีจำนวนคำตอบ



จากข้อสังเกตข้างต้นได้ว่ามีจำนวนเลข 1 ชุด ที่ทำการลบเลขตั้งต้นแล้วทำการพิจารณาการมีคำตอบ ทำให้ได้ว่าหลังจากการใส่ตัวเลขในช่องว่างที่เป็นไปได้แล้วจะได้ว่ามีจำนวนคำตอบอย่างน้อย 2 คำตอบ ดังนั้นจึงอยากทราบว่าถ้าเป็นปริศนาไอโซเมตริกซูโดกรุปแบบอื่น แล้วจะมีข้อสังเกตเหมือนข้อสังเกตข้างต้นหรือไม่

บรรณานุกรม

- [1] <https://sudoku.com/th/k-tkas-dok/> (วันที่ 9 เดือนกันยายน พ.ศ.2566)
- [2] <https://th.wikipedia.org/wiki/> (วันที่ 9 เดือนกันยายน พ.ศ.2566)
- [3] <https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics-of-Sudoku>
(วันที่ 9 เดือนกันยายน พ.ศ.2566)

ภาคผนวก

1. पोस्เตอร์การเสนอผลงานวิชาการ

Isometric Sudoku

Nutwara Tachompul Student ID : 630510544
Assistant Professor Dr. Penying Rochanakul
Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University

Abstract

In this independent study, we focus on a modified version of the Sudoku game called "Isometric Sudoku" which has 3 sub-grids of size 3x3 placed on a 3-dimensional space and there is the 4th sub-grid that overlaps with the first 3 sub-grids above, called shared-grid. The additional rule apart from the standard Sudoku rules in Isometric Sudoku are that the player must fill only 3 sets of number 1 to 9 on the board such that the numbers on each row, column, sub-grid and shared-grid must not be repeated. In this independent study, we find the least number of clues for Isometric Sudoku puzzles that give a unique solution and find the total number of possible complete Isometric Sudokus. Additionally, the research involved developing a Python program to solve Isometric Sudoku puzzles and to count the total number of possible solutions.

Interested Isometric Sudoku

1. Complete the chosen Isometric Sudoku puzzle.

2. Randomly delete clues.

3. Note all possible number(s) in the blanks.

4. Fill appropriate number(s) in the blanks

Research Objective

1. To find the fewest clues possible for a proper Isometric Sudoku.
2. To find the total number of possible complete Isometric Sudokus.

Scope of the study

1. The least number of clues for Isometric Sudoku puzzles are investigated over a chosen complete Isometric Sudoku.
2. The total number of possible complete Isometric Sudokus are solve using Python program.

Research Methods

1. Study basic knowledge of standard Sudoku.
2. Find a certain amount of complete Isometric Sudokus.
3. Pick a complete Isometric Sudoku, then build some random puzzle and observe the pattern.
4. Divide possible puzzle into group according to the remaining numbers in each subgrids.
5. Consider each case thoroughly.
6. Validate results using Python program.

Isometric Sudoku

• Rules

1. Isometric Sudoku grid consists of $3 \times 3 \times 3$ spaces.
2. You can use only numbers from 1 to 9.
3. Each 3×3 colored sub-grid can only contain numbers from 1 to 9.
4. The blue shared-grid can only contain numbers from 1 to 9.
5. Each number in sub-grid, vertical column or horizontal row can be used only once.
6. The game is over when the whole Isometric Sudoku grid is correctly filled with numbers.

• Agreements

R-grid

Y-grid

G-grid

B-grid

1. R-grid is the red sub-grid of size 3×3 .
2. Y-grid is the yellow sub-grid of size 3×3 .
3. G-grid is the green sub-grid of size 3×3 .
4. B-grid is the shared-grid that overlaps with the first 3 sub-grids above.

• Notation

For $u, v, w \in \{0, 1, \dots, 9\}$:

1. Let $n(R, Y, G) = n(u, v, w)$ be the set of all puzzles with u clues, v clues and w clues in R-grid, Y-grid and G-grid, respectively. Note that sometimes $n(R, Y, G) = n(u, v, w)$ is abbreviated to $n(u, v, w)$
2. Let the triple (u, v, w) be the union set of all 3 coordinates permutation, i.e., $(u, v, w) = n(u, v, w) \cup n(u, w, v) \cup n(v, w, u) \cup n(w, u, v) \cup n(w, v, u) \cup n(v, u, w)$.

Main Result

1. Find the least number of clues for Isometric Sudoku puzzles that gives a unique solution.

Case	Total number of puzzles	Number of puzzles with unique solution
(8,9,9)	27	27
(7,9,9)	108	98
(6,9,9)	252	178
(5,9,9)	378	160
(4,9,9)	378	60
(3,9,9)	252	6
(2,9,9)	108	0

Since (4,9,9) gives no puzzle with unique solution in R-grid and (3,9,9) gives no puzzle with unique solution in Y-grid and G-grid, the fewest clues is greater than or equal to 10. From (4,9,9), we consider $n(4,8,9)$. This leads to $n(4,7,9)$, $n(4,6,9)$, $n(4,5,9)$, $n(4,5,8)$ and $n(4,5,7)$. This is an $n(4,5,7)$ puzzle with unique solution. Thus the fewest clues is lesser than or equal to 16.

A (4,5,7) puzzle with unique solution.

2. Find the total number of possible complete Isometric Sudoku by Python program.
3. QR code for Mind map and Python program

Mindmap

Python code

Conclusion

- The fewest clues possible for a proper Isometric Sudoku puzzle is between 10 and 16.
- The total number of possible complete Isometric Sudoku is $9! \times (6!)^3$.

2. QR-code สำหรับแผนผังความคิดการพิจารณาคำตอบของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุ



3. QR-code สำหรับชุดคำสั่งไฟทอนการหาคำตอบของปริศนาไอโซเมตริกซูโดกุ

