

ตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
(Symmetric Bi-multipliers on CI-algebras)

นางสาวณัฐนิชา บุชบก

รหัส 630510542

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2566

ตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
(Symmetric Bi-multipliers on CI-algebras)

นางสาวณัฐนิชา บุชบก

630510542

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

ตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
(Symmetric Bi-multipliers on CI-algebras)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ


..... ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปริยานุช โนนแหยม)


..... กรรมการ
(ศาสตราจารย์ ดร.สุศักดิ์ ลีรัตนาวลี)

วันที่ 4 มีนาคม พ.ศ. 2567

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการค้นคว้าอิสระ (206499) ตาม หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมี วัตถุประสงค์เพื่อให้ให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง ตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI (Symmetric Bi-multipliers on CI-algebras)

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปริยานุช โหนแหยม ประธานกรรมการสอบและในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษา งานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องของรายงานการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลีรัตนาวลี อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้ข้อเสนอแนะ พิจารณาและตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม รวมถึงให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

นางสาวณัฐนิชา บุชบก

หัวข้อ (ภาษาไทย) ตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
 (ภาษาอังกฤษ) Symmetric Bi-multipliers on CI-algebras
 ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นางสาวณัฐนิชา บุชบก รหัสนักศึกษา 630510542
 ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปริญญ์ โพนแหยม
 ชื่อกรรมการสอบ ศาสตราจารย์ ดร.สรศักดิ์ ลีรัตนาวิ

บทคัดย่อ

ในการค้นคว้าอิสระนี้เราได้ศึกษาบทนิยาม และสมบัติบางประการของพีชคณิต CI โดยเราได้ศึกษาแนวคิดของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI พร้อมทั้งศึกษาสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้เราได้ศึกษาบทนิยามและสมบัติบางประการของเคอร์เนล เซตของจุดตรึงของตัวคูณคู่แบบสมมาตรและฟังก์ชันสาคูพื้นฐานบนพีชคณิต CI

Abstract

In this independent study, we study the definition and some properties of CI-algebras. We also study the concept of symmetric bi-multipliers on CI-algebras and investigate some related properties. Moreover, we study the definition and some properties of kernels, sets of fixed points of symmetric bi-multipliers and homomorphisms on CI-algebras.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ (Introduction)	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	4
2.1 ความสัมพันธ์ (Relations)	4
2.2 ฟังก์ชัน (Functions)	7
2.3 การดำเนินการทวิภาค (Binary operations)	8
2.4 พีชคณิต CI (CI-algebras)	9
บทที่ 3 ผลการศึกษา (Main results)	22
3.1 บทนิยามและตัวอย่างของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI	22
3.2 เคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI (Kernels and set of fixed points of symmetric bi-multipliers on CI-algebras) . . .	30
3.3 ฟังก์ชันสasihสัณฐานบนพีชคณิต CI (Homomorphisms on CI-algebras)	34
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	39
บรรณานุกรม	42
ภาคผนวก	43

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

แนวคิดเกี่ยวกับพีชคณิต CI (CI-algebras) ได้เริ่มศึกษาโดย Biao Long Meng ในปี 2009 [1] โดยศึกษาเกี่ยวกับสมบัติบางประการของพีชคณิต CI ต่อมาในปี 2021 กัลยรัตน์ เกียวประเสริฐ ได้ศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับตัวคูณของพีชคณิต CI [3] ในปี 2015 Tamer Firat และ Şule Ayar Özbal ได้ศึกษาเกี่ยวกับตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต d ซึ่งเป็นพีชคณิตหนึ่งที่มีสมบัติเพียงหนึ่งข้อเหมือนกับพีชคณิต CI โดยได้ศึกษาบทนิยามและสมบัติบางประการของเคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต d สำหรับพีชคณิต CI ยังไม่มีผู้ศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเรื่องตัวคูณคู่แบบสมมาตร ด้วยเหตุผลดังกล่าว ในการค้นคว้าอิสระนี้จึงเป็นการศึกษาเกี่ยวกับตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI

การศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ ได้ทำการศึกษบทนิยามของพีชคณิต CI พร้อมยกตัวอย่าง ทั้งพีชคณิตจำกัดและพีชคณิตอนันต์ เราได้ศึกษาสมบัติบางประการของตัวคูณในพีชคณิต CI ได้แก่ สมบัติของพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัว พีชคณิต CI ที่มีสมบัติสลับที่ พีชคณิตย่อยและตัวคูณคู่บนพีชคณิต CI นอกจากนี้ได้ศึกษาเกี่ยวกับตัวคูณคู่แบบสมมาตรในพีชคณิต CI พร้อมยกตัวอย่างรวมถึงศึกษาสมบัติของตัวคูณคู่แบบสมมาตรในพีชคณิต CI และได้ศึกษาเกี่ยวกับเคอร์เนล เซตของจุดตรึงของตัวคูณคู่แบบสมมาตรและฟังก์ชันสาทิสฐานบนพีชคณิต CI

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียน ความสัมพันธ์และสมบัติต่าง ๆ ความสัมพันธ์สมมูล เซตอันดับบางส่วน ฟังก์ชัน การดำเนินการทวิภาคและได้ให้บทนิยามของพีชคณิต CI พร้อมทั้งยกตัวอย่าง และได้ศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของพีชคณิต CI ได้แก่ พีชคณิตย่อย การแจกแจงในตัว การสลับที่ตัวคูณในพีชคณิต CI เคอร์เนลและเซตของจุดตรึงตัวคูณในพีชคณิต CI

ในบทที่ 3 เราได้ศึกษบทนิยามของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI พร้อมทั้งยกตัวอย่าง และได้ศึกษาสมบัติบางประการของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI นอกจากนี้ได้ศึกษบทนิยามและสมบัติบางประการเคอร์เนล เซตของจุดตรึงของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI และฟังก์ชันสาทิสฐานบนพีชคณิต CI โดยแบ่งผลการศึกษาเป็น 3 หัวข้อ ดังต่อไปนี้

- บทนิยามและตัวอย่างของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
- เคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
- ฟังก์ชันสาทิสฐานบนพีชคณิต CI

วัตถุประสงค์ของการค้นคว้าอิสระ (objectives)

1. เพื่อศึกษาแนวคิดและบทนิยามของตัวคุณและตัวคุณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
2. เพื่อศึกษาสมบัติบางประการของตัวคุณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
3. เพื่อศึกษาบทนิยามและสมบัติบางประการของเคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคุณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
4. เพื่อศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับฟังก์ชันสาทิสส์ฐานบนพีชคณิต CI

ขอบเขตของการค้นคว้าอิสระ

ศึกษาแนวคิดและบทนิยามของตัวคุณและตัวคุณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI พร้อมทั้งศึกษาสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้เราได้ศึกษาเกี่ยวกับเคอร์เนล เซตของจุดตรึงของตัวคุณคู่แบบสมมาตรและฟังก์ชันสาทิสส์ฐานบนพีชคณิต CI

วิธีการดำเนินการค้นคว้าอิสระ

1. ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับพีชคณิต CI และตัวคุณในพีชคณิต CI
2. ศึกษาเกี่ยวกับแนวคิดและบทนิยามของตัวคุณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI พร้อมทั้งหาตัวอย่างประกอบ
3. ศึกษาสมบัติบางประการของตัวคุณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI เช่น เคอร์เนล เซตของจุดตรึงของตัวคุณคู่แบบสมมาตรและฟังก์ชันสาทิสส์ฐานบนพีชคณิต CI พร้อมทั้งสร้างทฤษฎีบทต่าง ๆ และพิสูจน์ให้เห็นจริง
4. เขียนเล่ม และตรวจสอบความถูกต้อง

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการค้นคว้าอิสระ

1. ผู้ศึกษาค้นคว้ามีความเข้าใจแนวคิดและบทนิยามของตัวคุณและตัวคุณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
2. ผู้ศึกษาค้นคว้าทราบสมบัติบางประการของตัวคุณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI
3. ผู้ศึกษาค้นคว้าทราบบทนิยามและสมบัติบางประการของเคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคุณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI

4. ผู้ศึกษาค้นคว้ามีความเข้าใจแนวคิดเกี่ยวกับฟังก์ชันสถิติสัณฐานบนพีชคณิต CI

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

2.1 ความสัมพันธ์ (Relations)

บทนิยาม 2.1 ให้ A และ B เป็นเซต ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ กำหนดโดย

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

โดยที่ (a, b) แทนคู่อันดับที่มี a เป็นพิกัดแรก และ b เป็นพิกัดหลัง

หมายเหตุ: ถ้า A หรือ B เป็นเซตว่าง แล้ว $A \times B$ เป็นเซตว่าง

ตัวอย่าง 2.2 ให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{1, 2\}$ จะได้ว่า

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

บทนิยาม 2.3 ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง จะกล่าวว่า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B (relation from A to B) ก็ต่อเมื่อ $r \subseteq A \times B$

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้วสามารถเขียนแทน $(a, b) \in r$ ด้วย $a r b$
จะเรียกความสัมพันธ์จาก A ไป A ว่า ความสัมพันธ์บน A (relation on A)

ตัวอย่าง 2.4 ให้ $A = \{a, b, c\}$ และ $B = \{1, 2\}$

ให้ $r = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$

ดังนั้น r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และได้ว่า $a r 1, b r 1$ และ $c r 1$

บทนิยาม 2.5 ให้ A และ B เป็นเซต และ $r \subseteq A \times B$

1) โดเมน (domain) ของ r เขียนแทนด้วย D_r นิยามโดย $D_r = \{x \in A \mid \text{มี } y \in B \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$

2) เรนจ์ (range) ของ r เขียนแทนด้วย R_r นิยามโดย $R_r = \{y \in B \mid \text{มี } x \in A \text{ ซึ่ง } (x, y) \in r\}$

จะได้ว่า $D_r \subseteq A$ และ $R_r \subseteq B$

ตัวอย่าง 2.6 ให้ $A = \{-1, -2, -3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ และ $r = \{(-1, 1), (-2, 2), (-3, 3)\}$

จะได้ว่า $D_r = \{-1, -2, -3\}$ และ $R_r = \{1, 2, 3\}$

บทนิยาม 2.7 ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะกล่าวว่า

1) r มีสมบัติสะท้อน (reflexive) ถ้า $x r x$

2) r มีสมบัตินิสมมาตร (symmetric) ถ้า $x r y$ แล้ว $y r x$

3) r มีสมบัติถ่ายทอด (transitive) ถ้า $x r y$ และ $y r z$ แล้ว $x r z$

4) r มีสมบัติปฏิสมมาตร (antisymmetric) ถ้า $x r y$ และ $y r x$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in A$

บทนิยาม 2.8 ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) บน A ถ้า r มีสมบัติสะท้อน นิสมมาตร และถ่ายทอด

ตัวอย่าง 2.9 ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ และ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้

$$x r y \iff x \equiv y \pmod{n} \iff n \mid (x - y)$$

(1) ให้ $x \in \mathbb{Z}$ เนื่องจาก $x - x = 0$ และ $n \mid 0$ ทำให้ได้ว่า $n \mid (x - x)$

ดังนั้น $x \equiv x \pmod{n}$ ได้ว่า $x r x$ นั่นคือ r มีสมบัติสะท้อน

(2) ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $x \equiv y \pmod{n}$ นั่นคือ $n \mid (x - y)$

ดังนั้น จะมี $q \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $x - y = nq$

จะได้ว่า $y - x = n(-q)$ โดยที่ $-q \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $n \mid (y - x)$ ดังนั้น $y \equiv x \pmod{n}$ ได้ว่า $y r x$

นั่นคือ r มีสมบัตินิสมมาตร

(3) ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}$ โดยที่ $x \equiv y \pmod{n}$ และ $y \equiv z \pmod{n}$

นั่นคือ $n \mid (x - y)$ และ $n \mid (y - z)$

ดังนั้น จะมี $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $x - y = nq_1$ และ $y - z = nq_2$

จะได้ว่า $x - z = (x - y) + (y - z) = nq_1 + nq_2 = n(q_1 + q_2)$ โดยที่ $q_1 + q_2 \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $n \mid (x - z)$

ดังนั้น $x \equiv z \pmod{n}$ ได้ว่า $x r z$

นั่นคือ r มีสมบัติถ่ายทอด

จาก (1) - (3) สรุปได้ว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูล

บทนิยาม 2.10 ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะเรียก r ว่าเป็น **ความสัมพันธ์อันดับบางส่วน (partially ordered relation)** บน A ถ้า r มีสมบัติสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด และจะเรียกเซต A พร้อมด้วยความสัมพันธ์อันดับบางส่วน r บน A ว่า **เซตอันดับบางส่วน (partially ordered set)** หรือ **โพเซต (poset)** เขียนแทนด้วย (A, r)

ตัวอย่าง 2.11 ให้ r เป็นความสัมพันธ์ $\mid$ บน $\mathbb{Z}^+$

(1) จะเห็นว่า $x \mid x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{Z}^+$ ได้ว่า $x r x$

ดังนั้น r มีสมบัติสะท้อน

(2) ให้ $x, y \in \mathbb{Z}^+$

สมมติให้ $x r y$ และ $y r x$

นั่นคือ $x \mid y$ และ $y \mid x$ จะได้ว่า $x = y$

ดังนั้น r มีสมบัติปฏิสมมาตร

(3) ให้ $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

สมมติให้ $x r y$ และ $y r z$

นั่นคือ $x \mid y$ และ $y \mid z$

จะได้ว่า $x \mid z$ นั่นคือ $x r z$

ดังนั้น r มีสมบัติถ่ายทอด

จาก (1) - (3) สรุปได้ว่า r เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วนบน $\mathbb{Z}^+$

ดังนั้น $(\mathbb{Z}^+, r)$ เป็นเซตอันดับบางส่วน

2.2 ฟังก์ชัน (Functions)

บทนิยาม 2.12 ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จะกล่าวว่า

1) f เป็นฟังก์ชัน (function) ถ้า $(a, b) \in f$ และ $(a, c) \in f$ แล้ว $b = c$ สำหรับทุก $a \in A$ และ $b, c \in B$

2) f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A to B) เขียนแทนด้วย $f : A \rightarrow B$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน และสำหรับทุก $a \in A$ จะมี $b \in B$ ซึ่ง $(a, b) \in f$ นั่นคือ $D_f = A$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B แล้วจะเขียนแทน $(x, y) \in f$ ด้วย $y = f(x)$

บทนิยาม 2.13 ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B จะกล่าวว่า

1) f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B (one-to-one function from A to B) (เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{1-1} B$) ถ้า $f(x) = f(y)$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก $x, y \in A$

2) f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจาก A ไป B (function from A onto B) (เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow{onto} B$) ถ้าสำหรับทุก $y \in B$ จะมี $x \in A$ ที่ทำให้ $f(x) = y$ นั่นคือ $R_f = B$

3) f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงจาก A ไป B (one-to-one and onto function from A to B) (เขียนแทนด้วย $f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B

ตัวอย่าง 2.14 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c\}$

กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$ โดยที่ $f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, c)\}$

และ $g : B \rightarrow B$ โดยที่ $g = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

จะได้ว่า $R_f = R_g = \{a, b, c\} = B$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจาก A ไป B และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงจาก B ไป B

บทนิยาม 2.15 ให้ A, B, C เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ นิยาม $g \circ f : A \rightarrow C$ กำหนดโดย

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

สำหรับทุก $x \in A$ เรียก $g \circ f$ ว่าฟังก์ชันประกอบ (composite function) ของ f และ g

บทนิยาม 2.16 ให้ $f : A \rightarrow B$ จะเรียกเรนจ์ของ f ว่า **ภาพ (image)** ของ f เขียนแทนด้วย $Im(f)$ นั่นคือ

$$Im(f) = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ สำหรับบาง } a \in A\} = \{f(a) \mid a \in A\}$$

บทนิยาม 2.17 ให้ $f : A \rightarrow B, X \subseteq A$ และ $Y \subseteq B$

(1) **ภาพของ X ภายใต้ f (image of X under f)** เขียนแทนด้วย $f(X)$ คือ เซต

$$f(X) = \{b \in B \mid b = f(x) \text{ สำหรับบาง } x \in X\} = \{f(x) \mid x \in X\}$$

นั่นคือ $b \in f(X)$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = b$ สำหรับบาง $x \in X$

(2) **ภาพผกผันของ Y ภายใต้ f (inverse image of Y under f)** เขียนแทนด้วย $f^{-1}(Y)$ คือ เซต

$$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

นั่นคือ $a \in f^{-1}(Y)$ ก็ต่อเมื่อ $f(a) \in Y$

บทนิยาม 2.18 ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง นิยาม $f : X \rightarrow X$ กำหนดโดย $f(a) = a$ สำหรับทุก $a \in X$ จะเรียก f ว่าเป็น**ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)** บน X เขียนแทนด้วย id_X

บทนิยาม 2.19 ให้ X และ Y เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง นิยาม $f : X \rightarrow Y$ กำหนดโดย $f(x) = k$ สำหรับทุก $x \in X$ โดยที่ $k \in Y$ นั่นคือ $R_f = \{k\}$ จะเรียก f ว่าเป็น**ฟังก์ชันค่าคงตัว (constant function)** เขียนแทนด้วย X_k

2.3 การดำเนินการทวิภาค (Binary operations)

บทนิยาม 2.20 ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง การดำเนินการทวิภาค (binary operation) $*$ บนเซต A คือฟังก์ชันจาก $A \times A$ ไป A นั่นคือ $*$: $A \times A \rightarrow A$

สำหรับ $a, b \in A$ จะเขียนแทน $*(a, b)$ ด้วย $a * b$ นั่นคือ สำหรับทุกสมาชิก $a, b \in A$ จะต้องหาค่า $a * b$ ได้เสมอและมีเพียงค่าเดียวที่เป็นสมาชิกใน A

บทนิยาม 2.21 ให้ A เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่างและ $\emptyset \neq B \subseteq A$ โดยที่ $*$: $A \times A \rightarrow A$

ถ้า $a * b \in B$ ทุก $a, b \in B$ แล้วจะเรียกว่า B มี **สมบัติปิด (closure property)** ภายใต้ $*$ ในกรณีนี้ B

มีสมบัติปิดภายใต้ $*$ เราจะได้ว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน B และเรียก $*$ ว่าเป็น การดำเนินการที่ถูกเหนี่ยวนำ (induced operation) ของ $*$ บน B

ตัวอย่าง 2.22 ให้ $G = \{1, -1, i, -i\}$ เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเชิงซ้อน ($\mathbb{C}$) กำหนดการดำเนินการ $*$ ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

จะได้ว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน G เนื่องจากสำหรับแต่ละ $a, b \in G$ ได้ว่า $a * b$ หาค่าได้เสมอ และมีเพียงค่าเดียวที่เป็นสมาชิกใน G

2.4 พีชคณิต CI (CI-algebras)

บทนิยาม 2.23 ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X และ $1 \in X$ จะเรียก $(X, *, 1)$ หรือ X ว่าเป็น **พีชคณิต CI (CI-algebra)** ถ้า X สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$(CI1) \quad x * x = 1$$

$$(CI2) \quad 1 * x = x$$

$$(CI3) \quad x * (y * z) = y * (x * z)$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

บทนิยาม 2.24 ให้ X เป็นพีชคณิต CI กำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ บน X ดังนี้

$$x \leq y \text{ ก็ต่อเมื่อ } x * y = 1$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

จาก (CI1) ได้ว่า $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น $x \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$ นั่นคือ $\leq$ มีสมบัติสะท้อน

ตัวอย่าง 2.25 ให้ $X = \{1, a, b\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	1
b	1	a	1

จะแสดงว่า $(X, *, 1)$ เป็นพีชคณิต CI

จากตารางจะได้ว่า $x * x = 1$ และ $1 * x = x$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น (CI1) และ (CI2) เป็นจริงตามลำดับ

ต่อไปจะแสดงว่า (CI3) เป็นจริง นั่นคือ จะแสดงว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ $3 \times 3 \times 3 = 27$ กรณี ดังนี้

ให้ $x, y, z \in X$

ถ้า $x = y = z$ แล้วจะได้ว่า $x * (y * z) = 1 = y * (x * z)$

และจากตารางจะได้ว่า

$$a * (1 * 1) = a * 1 = 1 = 1 * 1 = 1 * (a * 1)$$

$$b * (1 * 1) = b * 1 = 1 = 1 * 1 = 1 * (b * 1)$$

$$1 * (a * 1) = 1 * 1 = 1 = a * 1 = a * (1 * 1)$$

$$a * (a * 1) = a * 1 = 1 = a * 1 = a * (a * 1)$$

$$b * (a * 1) = b * 1 = 1 = a * 1 = a * (b * 1)$$

$$1 * (b * 1) = 1 * 1 = 1 = b * 1 = b * (1 * 1)$$

$$a * (b * 1) = a * 1 = 1 = b * 1 = b * (a * 1)$$

$$b * (b * 1) = b * 1 = 1 = b * 1 = b * (b * 1)$$

$$1 * (1 * a) = 1 * a = a = 1 * a = 1 * (1 * a)$$

$$a * (1 * a) = a * a = 1 = 1 * 1 = 1 * (a * a)$$

$$b * (1 * a) = b * a = a = 1 * a = 1 * (b * a)$$

$$1 * (a * a) = 1 * 1 = 1 = a * a = a * (1 * a)$$

$$b * (a * a) = b * 1 = 1 = a * a = a * (b * a)$$

$$1 * (b * a) = 1 * a = a = b * a = b * (1 * a)$$

$$a * (b * a) = a * a = 1 = b * 1 = b * (a * a)$$

$$b * (b * a) = b * a = a = b * a = b * (b * a)$$

$$\begin{aligned}
1 * (1 * b) &= 1 * b = b = 1 * b = 1 * (1 * b) \\
a * (1 * b) &= a * b = 1 = 1 * 1 = 1 * (a * b) \\
b * (1 * b) &= b * b = 1 = 1 * 1 = 1 * (b * b) \\
1 * (a * b) &= 1 * 1 = 1 = a * b = a * (1 * b) \\
a * (a * b) &= a * 1 = 1 = a * 1 = a * (a * b) \\
b * (a * b) &= b * 1 = 1 = a * 1 = a * (b * b) \\
1 * (b * b) &= 1 * 1 = 1 = b * b = b * (1 * b) \\
a * (b * b) &= a * 1 = 1 = b * 1 = b * (a * b)
\end{aligned}$$

ดังนั้น (CI3) เป็นจริง

จะได้ว่า $(X, *, 1)$ เป็นพีชคณิต CI

จากตารางจะเห็นว่า $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ และ $a * 1 = 1, a * b = 1$ และ $b * 1 = 1$

ดังนั้น $1 \leq 1, a \leq a, b \leq b, a \leq 1, a \leq b$ และ $b \leq 1$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า $\leq$ ไม่มีสมบัติสมมาตร เนื่องจาก $a \leq 1$ แต่ $1 \not\leq a$

นอกจากนี้จะเห็นได้ว่า $\leq$ มีสมบัติถ่ายทอดและปฏิสมมาตร

ตัวอย่าง 2.26 ให้ $X = \mathbb{N}$ เมื่อ $\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังต่อไปนี้

$$x * y = \begin{cases} y & \text{ถ้า } x = 1 \\ 1 & \text{ถ้า } x \neq 1 \end{cases}$$

จะแสดงว่า X เป็นพีชคณิต CI

1. จะแสดงว่า (CI1) เป็นจริง

$$\text{เนื่องจาก } x * x = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x = 1 \\ 1 & \text{ถ้า } x \neq 1 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $x * x = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น (CI1) เป็นจริง

2. จะเห็นว่า (CI2) เป็นจริง เนื่องจาก $1 * x = x$ สำหรับทุก $x \in X$

3. จะพิสูจน์ (CI3) เป็นจริง ให้ $x, y, z \in X$

กรณี 1: $x = 1$ จะได้ว่า

$$x * (y * z) = 1 * (y * z) = y * z = y * (1 * z) = y * (x * z)$$

ดังนั้น $x * (y * z) = y * (x * z)$

กรณี 2: $x \neq 1$ จะได้ว่า

$$x * (y * z) = 1$$

และ

$$y * (x * z) = y * 1 = \begin{cases} y & \text{ถ้า } y = 1 \\ 1 & \text{ถ้า } y \neq 1 \end{cases}$$

จะได้ว่า $x * (y * z) = 1 = y * (x * z)$

ดังนั้น (CI3) เป็นจริง

สรุปได้ว่า X เป็นพีชคณิต CI

จาก $1 * 1 = 1$ ได้ว่า $1 \leq 1$

จาก $x * y = 1$ เมื่อ $x \neq 1$ ทำให้ได้ว่า $x \leq y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq 1$

บทนิยาม 2.27 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ S เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะเรียก S ว่าเป็น **พีชคณิตย่อย (subalgebra)** ของ X ถ้า

$$x * y \in S$$

สำหรับทุก $x, y \in S$

ตัวอย่าง 2.28 ให้ $X = \{1, a, b\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	1
b	1	a	1

จากตัวอย่าง 2.25 จะได้ว่า X เป็นพีชคณิต CI

ให้ $S_1 = \{1, a\}$ และ $S_2 = \{a, b\}$

พิจารณา $S_1 = \{1, a\}$ จากตาราง จะได้ว่า

$$1 * 1 = 1 \in S_1, 1 * a = a \in S_1, a * 1 = 1 \in S_1, a * a = 1 \in S_1$$

ดังนั้น S_1 เป็นพีชคณิตย่อยของ X

พิจารณา $S_2 = \{a, b\}$ จะเห็นว่า $a * b = 1 \notin S_2$

ดังนั้น S_2 ไม่เป็นพีชคณิตย่อยของ X

พีชคณิตย่อยทั้งหมดของ X ได้แก่ $\{1\}$, $\{1, a\}$, $\{1, b\}$ และ $\{1, a, b\}$

บทตั้ง 2.29 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ S เป็นพีชคณิตย่อยของ X จะได้ว่า $1 \in S$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ S เป็นพีชคณิตย่อยของ X

ให้ $x \in S$ ได้ว่า $x * x \in S$

จาก (CI1) ได้ว่า $x * x = 1$

ดังนั้น $1 \in S$ □

บทตั้ง 2.30 ให้ X เป็นพีชคณิต CI จะได้ว่า

1. $\{1\}$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X

2. X เป็นพีชคณิตย่อยของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI

1. จะเห็นได้ชัดว่า $\{1\} \subseteq X$ และ $\{1\} \neq \emptyset$

ให้ $x, y \in \{1\}$ ได้ว่า $x = 1 = y$

ดังนั้น $x * y = 1 * 1$

$$= 1 \quad (\text{จาก (CI1)})$$

$$\in \{1\}$$

ได้ว่า $\{1\}$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X

2. จาก $X \subseteq X$ ซึ่ง $X \neq \emptyset$ และ

$x * y \in X$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ดังนั้น X เป็นพีชคณิตย่อยของ X □

บทนิยาม 2.31 ให้ X เป็นพีชคณิต CI จะเรียก X ว่ามีการแจกแจงในตัวเอง (self distributive) ถ้า

$$x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

บทนิยาม 2.32 ให้ X เป็นพีชคณิต CI จะเรียก X ว่ามีสมบัติสลับที่ (commutative) ถ้า

$$(y * x) * x = (x * y) * y$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

ตัวอย่าง 2.33 ให้ $X = \{1, a, b, c\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	a	a
b	1	1	1	a
c	1	1	a	1

จะแสดงว่า $(X, *, 1)$ เป็นพีชคณิต CI

จากตารางจะได้ว่า $x * x = 1$ และ $1 * x = x$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น (CI1) และ (CI2) เป็นจริงตามลำดับ

ต่อไปจะแสดงว่า (CI3) เป็นจริง นั่นคือ จะแสดงว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ $4 \times 4 \times 4 = 64$ กรณี ดังนี้

ให้ $x, y, z \in X$

ถ้า $x = y = z$ แล้วได้ว่า $x * (y * z) = 1 = y * (x * z)$

ถ้า $x = 1$ แล้วได้ว่า $x * (y * z) = 1 * (y * z) = y * z = y * (1 * z) = y * (x * z)$

และจากตารางได้ว่า

$$\begin{aligned}
 a * (1 * 1) &= a * 1 = 1 = 1 * 1 = 1 * (a * 1) \\
 b * (1 * 1) &= b * 1 = 1 = 1 * 1 = 1 * (b * 1) \\
 c * (1 * 1) &= c * 1 = 1 = 1 * 1 = 1 * (c * 1) \\
 a * (a * 1) &= a * 1 = 1 = a * 1 = a * (a * 1) \\
 b * (a * 1) &= b * 1 = 1 = a * 1 = a * (b * 1) \\
 c * (a * 1) &= c * 1 = 1 = a * 1 = a * (c * 1) \\
 a * (b * 1) &= a * 1 = 1 = b * 1 = b * (a * 1) \\
 b * (b * 1) &= b * 1 = 1 = b * 1 = b * (b * 1) \\
 c * (b * 1) &= c * 1 = 1 = b * 1 = b * (c * 1) \\
 a * (c * 1) &= a * 1 = 1 = c * 1 = c * (a * 1) \\
 b * (c * 1) &= b * 1 = 1 = c * 1 = c * (b * 1) \\
 c * (c * 1) &= c * 1 = 1 = c * 1 = c * (c * 1) \\
 a * (1 * a) &= a * a = 1 = 1 * 1 = 1 * (a * a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b * (1 * a) &= b * a = 1 = 1 * 1 = 1 * (b * a) \\
c * (1 * a) &= c * a = 1 = 1 * 1 = 1 * (c * a) \\
b * (a * a) &= b * 1 = 1 = a * 1 = a * (b * a) \\
c * (a * a) &= c * 1 = 1 = a * 1 = a * (c * a) \\
a * (b * a) &= a * 1 = 1 = b * 1 = b * (a * a) \\
b * (b * a) &= b * 1 = 1 = b * 1 = b * (b * a) \\
c * (b * a) &= c * 1 = 1 = b * 1 = b * (c * a) \\
a * (c * a) &= a * 1 = 1 = c * 1 = c * (a * a) \\
b * (c * a) &= b * 1 = 1 = c * 1 = c * (b * a) \\
c * (c * a) &= c * 1 = 1 = c * 1 = c * (c * a) \\
a * (1 * b) &= a * b = a = 1 * a = 1 * (a * b) \\
b * (1 * b) &= b * b = 1 = 1 * 1 = 1 * (b * b) \\
c * (1 * b) &= c * b = a = 1 * a = 1 * (c * b) \\
a * (a * b) &= a * a = 1 = a * 1 = a * (a * b) \\
b * (a * b) &= b * a = 1 = a * 1 = a * (b * b) \\
c * (a * b) &= c * a = 1 = a * a = a * (c * b) \\
a * (b * b) &= a * 1 = 1 = b * a = b * (a * b) \\
c * (b * b) &= c * 1 = 1 = b * a = b * (c * b) \\
a * (c * b) &= a * a = 1 = c * a = c * (a * b) \\
b * (c * b) &= b * a = 1 = c * 1 = c * (b * b) \\
c * (c * b) &= c * a = 1 = c * a = c * (c * b) \\
a * (1 * c) &= a * c = a = 1 * a = 1 * (a * c) \\
b * (1 * c) &= b * c = a = 1 * a = 1 * (b * c) \\
c * (1 * c) &= c * c = 1 = 1 * 1 = 1 * (c * c) \\
a * (a * c) &= a * a = 1 = a * a = a * (a * c) \\
b * (a * c) &= b * a = 1 = a * a = a * (b * c) \\
c * (a * c) &= c * a = 1 = a * 1 = a * (c * c) \\
a * (b * c) &= a * a = 1 = b * a = b * (a * c) \\
b * (b * c) &= b * a = 1 = b * a = b * (b * c) \\
c * (b * c) &= c * a = 1 = b * 1 = b * (c * c) \\
a * (c * c) &= a * 1 = 1 = c * a = c * (a * c)
\end{aligned}$$

$$b * (c * c) = b * 1 = 1 = c * a = c * (b * c)$$

ได้ว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ ดังนั้น (CI3) เป็นจริง

จะได้ว่า $(X, *, 1)$ เป็นพีชคณิต CI

จากตารางได้ว่า $c * (a * b) = c * a = 1$ และ $(c * a) * (c * b) = 1 * a = a$

จะเห็นว่า $c * (a * b) = 1 \neq a = (c * a) * (c * b)$

ดังนั้น X ไม่มีการแจกแจงในตัว

ต่อไปจะแสดงว่า X มีสมบัติสลับที่

นั่นคือจะพิสูจน์ว่า $(x * y) * y = (y * x) * x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ทั้งหมด $4 \times 4 = 16$ กรณี ดังต่อไปนี้

ให้ $x, y \in X$

ถ้า $x = y$ แล้วได้ว่า $(x * y) * y = 1 = (y * x) * x$

และจากตารางได้ว่า

$$(1 * a) * a = a * a = 1 = 1 * 1 = (a * 1) * 1$$

$$(1 * b) * b = b * b = 1 = 1 * 1 = (b * 1) * 1$$

$$(1 * c) * c = c * c = 1 = 1 * 1 = (c * 1) * 1$$

$$(a * b) * b = a * b = a = 1 * a = (b * a) * a$$

$$(a * c) * c = a * c = a = 1 * a = (c * a) * a$$

$$(b * c) * c = a * c = a = a * b = (c * b) * b$$

ดังนั้น $(x * y) * y = (y * x) * x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

นั่นคือ X มีสมบัติสลับที่

สรุปได้ว่า X เป็นพีชคณิต CI ที่ไม่มีการแจกแจงในตัวแต่มีสมบัติสลับที่

ตัวอย่าง 2.34 ให้ $X = \{1, a\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ และ $'$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a		$'$	1	a
1	1	a	และ	1	1	a
a	1	1		a	a	1

1. จะแสดงว่า $(X, *, 1)$ เป็นพีชคณิต CI

จากตารางจะได้ว่า $x * x = 1$ และ $1 * x = x$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น (CI1) และ (CI2) เป็นจริง ตามลำดับ

ต่อไปจะแสดงว่า (CI3) เป็นจริง นั่นคือ จะแสดงว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ $2 \times 2 \times 2 = 8$ กรณี ดังนี้

ให้ $x, y, z \in X$

ถ้า $x = y$ แล้วได้ว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$

และจากตารางได้ว่า

$$1 * (a * a) = 1 * 1 = 1 = a * a = a * (1 * a)$$

$$1 * (a * 1) = 1 * 1 = 1 = a * 1 = a * (1 * 1)$$

ได้ว่า $x * (y * z) = y * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ดังนั้น (CI3) เป็นจริง

ต่อไปจะแสดงว่า X มีการแจกแจงในตัว

นั่นคือจะพิสูจน์ว่า $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ทั้งหมด $2 \times 2 \times 2 = 8$ กรณี ดังต่อไปนี้

ให้ $x, y, z \in X$

ถ้า $x = y = z$ แล้วได้ว่า

$$x * (y * z) = x * (x * x) = x * 1 = 1 = 1 * 1 = (x * x) * (x * x) = (x * y) * (x * z)$$

และจากตารางได้ว่า

$$1 * (1 * a) = 1 * a = a = 1 * a = (1 * 1) * (1 * a)$$

$$1 * (a * 1) = 1 * 1 = 1 = a * 1 = (1 * a) * (1 * 1)$$

$$1 * (a * a) = 1 * 1 = 1 = a * a = (1 * a) * (1 * a)$$

$$a * (1 * 1) = a * 1 = 1 = 1 * 1 = (a * 1) * (a * 1)$$

$$a * (1 * a) = a * a = 1 = 1 * 1 = (a * 1) * (a * a)$$

$$a * (a * 1) = a * 1 = 1 = 1 * 1 = (a * a) * (a * 1)$$

ดังนั้น $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

นั่นคือ X มีการแจกแจงในตัว

ต่อไปจะแสดงว่า X มีสมบัติสลับที่

นั่นคือจะพิสูจน์ว่า $(x * y) * y = (y * x) * x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ทั้งหมด $2 \times 2 = 4$ กรณี ดังต่อไปนี้

ให้ $x, y \in X$

ถ้า $x = y$ แล้วได้ว่า $(x * x) * x = x = (x * x) * x$

และจากตารางได้ว่า

$$(1 * a) * a = a * a = 1 = 1 * 1 = (a * 1) * 1$$

ดังนั้น $(x * y) * y = (y * x) * x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

นั่นคือ X มีสมบัติสลับที่

สรุปได้ว่า X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและมีสมบัติสลับที่

2. จะแสดงว่า $(X, *, 1)$ เป็นพีชคณิต CI

จากตารางจะได้ว่า $x *' x = 1$ และ $1 *' x = x$ สำหรับทุก $x \in X$

ดังนั้น (CI1) และ (CI2) เป็นจริง ตามลำดับ

ต่อไปจะแสดงว่า (CI3) เป็นจริง นั่นคือ จะแสดงว่า $x *' (y *' z) = y *' (x *' z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ $2 \times 2 \times 2 = 8$ กรณี ดังนี้

ให้ $x, y, z \in X$

ถ้า $x = y$ แล้วได้ว่า $x *' (y *' z) = y *' (x *' z)$

และจากตารางได้ว่า

$$1 *' (a *' a) = 1 *' 1 = 1 = a *' a = a *' (1 *' a)$$

$$1 *' (a *' 1) = 1 *' a = a = a *' 1 = a *' (1 *' 1)$$

ได้ว่า $x *' (y *' z) = y *' (x *' z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ดังนั้น (CI3) เป็นจริง

จากตารางได้ว่า $a *' (a *' a) = a *' 1 = a$ และ $(a *' a) *' (a *' a) = 1 *' 1 = 1$

จะเห็นว่า $a *' (a *' a) = a \neq 1 = (a *' a) *' (a *' a)$

ดังนั้น X ไม่มีการแจกแจงในตัว

จากตารางได้ว่า $(1 *' a) *' a = a *' a = 1$ และ $(a *' 1) *' 1 = a *' 1 = a$

จะเห็นว่า $(1 *' a) *' a = 1 \neq a = (a *' 1) *' 1$

ดังนั้น X ไม่มีสมบัติสลับที่

สรุปได้ว่า X เป็นพีชคณิต CI ที่ไม่มีการแจกแจงในตัวและไม่มีสมบัติสลับที่

จากตัวอย่างจะเห็นว่า $x * 1 = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ แต่ $x *' 1 \neq 1$ สำหรับบาง $x \in X$

ตัวอย่าง 2.35 ให้ $X = \mathbb{N}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังต่อไปนี้

$$x * y = \begin{cases} y & \text{ถ้า } x = 1 \\ 1 & \text{ถ้า } x \neq 1 \end{cases}$$

จากตัวอย่าง 2.26 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต CI

จะแสดงว่า X มีการแจกแจงในตัว

นั่นคือจะพิสูจน์ว่า $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ให้ $x, y, z \in X$

กรณี 1: $x = 1$ จะได้ว่า

$$x * (y * z) = 1 * (y * z) = y * z$$

และ $(x * y) * (x * z) = (1 * y) * (1 * z) = y * z$

ดังนั้น $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$

กรณี 2: $x \neq 1$ จะได้ว่า

$$x * (y * z) = 1$$

และ $(x * y) * (x * z) = 1 * 1 = 1$

จะได้ว่า $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$

ดังนั้น X มีการแจกแจงในตัว

จะเห็นว่า $(2 * 3) * 3 = 1 * 3 = 3$ และ $(3 * 2) * 2 = 1 * 2 = 2$

นั่นคือ $(2 * 3) * 3 \neq (3 * 2) * 2$

ดังนั้น X ไม่มีสมบัติสลับที่

บทตั้ง 2.36 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัว จะได้ว่า $x * 1 = 1$ สำหรับทุก $x \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัว และ $x \in X$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } x * 1 &= x * (x * x) && \text{(จาก (CI1))} \\ &= (x * x) * (x * x) && \text{(จาก } X \text{ มีการแจกแจงในตัว)} \\ &= 1 && \text{(จาก (CI1))} \end{aligned}$$

จะได้ว่า $x * 1 = 1$ สำหรับทุก $x \in X$ □

บทนิยาม 2.37 ให้ X เป็นพีชคณิต CI จะเรียก $f : X \rightarrow X$ ว่าเป็นตัวคูณ (multiplier) ถ้า

$$f(x * y) = x * f(y)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม 2.38 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ f เป็นตัวคูณของ X กำหนด **เคอร์เนล (kernel)** ของ f ดังนี้

$$Ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

บทนิยาม 2.39 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ f เป็นตัวคูณของ X นิยาม

$$Fix(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

จะเรียก $Fix(f)$ เซตของจุดตรึง (set of fixed points) ของ f

ตัวอย่าง 2.40 ให้ $X = \{1, a, b\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	1	1	a	a
b	1	1	1	a
b	1	1	a	1

จากตัวอย่าง 2.33 จะได้ว่า X เป็นพีชคณิต CI

กำหนดให้ $f : X \times X \rightarrow X$ โดย

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \in \{1, a, c\} \\ a & \text{ถ้า } x \in \{b\} \end{cases}$$

จาก [3] จะได้ว่า f เป็นตัวคูณของ X

จาก $f(1) = 1, f(a) = 1$ และ $f(b) = 1$

ได้ว่า $Ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\} = \{1, a, c\}$

และ $Fix(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\} = \{1\}$

บทตั้ง 2.41 [3] ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณของ X จะได้ว่า $f(1) = 1$

บทตั้ง 2.42 [3] ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณของ X จะได้ว่า

1. $x \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$
2. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x \leq f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 2.43 [3] ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ f_1, f_2 เป็นตัวคูณของ X จะได้ว่า $f_1 \circ f_2$ เป็นตัวคูณของ X

ทฤษฎีบท 2.44 [3] ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณของ X จะได้ว่า $Ker(f)$ และ $Fix(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X

ทฤษฎีบท 2.45 [3] ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติสลับที่และมีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณของ X จะได้ว่า ถ้า $x \in Ker(f)$ และ $x \leq y$ แล้ว $y \in Ker(f)$

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Main results)

3.1 บทนิยามและตัวอย่างของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI

บทนิยาม 3.1 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ $f : X \times X \rightarrow X$ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันแบบสมมาตร (symmetric) เมื่อ f สอดคล้องกับ

$$f(x, y) = f(y, x)$$

สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม 3.2 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ $f : X \times X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรจะเรียก f ว่าเป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI (symmetric bi-multipliers on CI-algebras) เมื่อ f สอดคล้องกับ

$$f(x * y, z) = x * f(y, z)$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ตัวอย่าง 3.3 ให้ $X = \{1, a, b\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	1
b	1	a	1

จากตัวอย่าง 2.25 จะได้ว่า X เป็นพีชคณิต CI

กำหนดให้ $f : X \times X \rightarrow X$, $g : X \times X \rightarrow X$ และ $h : X \times X \rightarrow X$ โดยที่

$$f(x, y) = 1, g(x, y) = \begin{cases} a & \text{ถ้า } (x, y) = (a, a) \\ 1 & \text{ถ้า } (x, y) \neq (a, a) \end{cases} \quad \text{และ}$$

$$h(x, y) = \begin{cases} b & \text{ถ้า } (x, y) = (a, a) \\ 1 & \text{ถ้า } (x, y) \neq (a, a) \end{cases}$$

สำหรับทุก $(x, y) \in X \times X$

1. จะแสดงว่า f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

ก่อนอื่นจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรบน X

นั่นคือ จะแสดงว่า $f(x, y) = f(y, x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะได้ว่า $f(x, y) = 1 = f(y, x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรบน X

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X นั่นคือ จะแสดงว่า $f(x * y, z) = x * f(y, z)$ สำหรับ

ทุก $x, y, z \in X$

ให้ $x, y, z \in X$ จากตารางจะได้ว่า

$$f(x * y, z) = 1 = x * 1 = x * f(y, z)$$

ดังนั้น $f(x * y, z) = x * f(y, z)$

สรุปได้ว่า f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

2. จะแสดงว่า g เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

ก่อนอื่นจะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรบน X

นั่นคือ จะแสดงว่า $g(x, y) = g(y, x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิจารณา $g(1, a) = 1 = g(a, 1)$

$$g(1, b) = 1 = g(b, 1)$$

$$g(a, b) = 1 = g(b, a)$$

จะได้ว่า $g(x, y) = g(y, x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรบน X

ต่อไปจะแสดงว่า g เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X นั่นคือ จะแสดงว่า $g(x * y, z) = x * g(y, z)$ สำหรับ

ทุก $x, y, z \in X$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ $3 \times 3 \times 3 = 27$ กรณี ดังนี้

ให้ $x, y, z \in X$

ถ้า $x = a$ แล้วจะได้ว่า

$$g(x * y, z) = g(a * y, z) = g(1, z) = 1 = a * g(y, z) = x * g(y, z)$$

และจะได้ว่า

$$g(1 * 1, 1) = g(1, 1) = 1 = 1 * g(1, 1)$$

$$g(1 * 1, a) = g(1, a) = 1 = 1 * g(1, a)$$

$$g(1 * 1, b) = g(1, b) = 1 = 1 * g(1, b)$$

$$g(1 * a, 1) = g(a, 1) = 1 = 1 * g(a, 1)$$

$$g(1 * a, a) = g(a, a) = a = 1 * g(a, a)$$

$$g(1 * a, b) = g(a, b) = 1 = 1 * g(a, b)$$

$$g(1 * b, 1) = g(b, 1) = 1 = 1 * g(b, 1)$$

$$g(1 * b, a) = g(b, a) = 1 = 1 * g(b, a)$$

$$g(1 * b, b) = g(b, b) = 1 = 1 * g(b, b)$$

$$g(b * 1, 1) = g(1, 1) = 1 = b * g(1, 1)$$

$$g(b * 1, a) = g(1, a) = 1 = b * g(1, a)$$

$$g(b * 1, b) = g(1, b) = 1 = b * g(1, b)$$

$$g(b * a, 1) = g(a, 1) = 1 = b * g(a, 1)$$

$$g(b * a, a) = g(a, a) = a = b * g(a, a)$$

$$g(b * a, b) = g(a, b) = 1 = b * g(a, b)$$

$$g(b * b, 1) = g(1, 1) = 1 = b * g(b, 1)$$

$$g(b * b, a) = g(1, a) = 1 = b * g(b, a)$$

$$g(b * b, b) = g(1, b) = 1 = b * g(b, b)$$

ดังนั้น $g(x * y, z) = x * g(y, z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in X$

สรุปได้ว่า g เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

3. จาก $h(b * a, a) = h(a, a) = b$

และ $b * h(a, a) = b * b = 1$

จะได้ว่า $h(b * a, a) \neq b * h(a, a)$

สรุปได้ว่า h ไม่เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

บทนิยาม 3.4 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่แจกแจงในตัว กำหนดให้ $S(X)$ แทนเซตของตัวคูณคู่แบบสมมาตรทั้งหมดบน X

บทตั้ง 3.5 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและกำหนดให้ $\bar{1} : X \times X \rightarrow X$ โดย $\bar{1}(x, y) = 1$ สำหรับทุก $(x, y) \in X \times X$ ได้ว่า $\bar{1}$ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X นั่นคือ $\bar{1} \in S(X)$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติการแจกแจงในตัว และกำหนดให้ $\bar{1} : X \times X \rightarrow X$ โดย $\bar{1}(x, y) = 1$ สำหรับทุก $(x, y) \in X \times X$

ให้ $x, y, z \in X$

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $\bar{1}$ เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรบน X

$$\text{จาก } \bar{1}(x, y) = 1 = \bar{1}(y, x)$$

ได้ว่า $\bar{1}$ เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรบน X

$$\text{พิจารณา } \bar{1}(x * y, z) = 1$$

$$= x * 1 \quad (\text{จากบทตั้ง 2.36})$$

$$= x * \bar{1}(y, z)$$

ดังนั้น $\bar{1}$ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X □

จากบทตั้ง 3.5 จะได้ว่า $S(X)$ ไม่เป็นเซตว่าง เนื่องจากมี $\bar{1} \in S(X)$

บทนิยาม 3.6 ให้ X เป็นพีชคณิต CI นิยามการดำเนินการบน $S(X)$ ดังนี้

สำหรับ $f, g \in S(X)$ กำหนดให้

$$(f * g)(x, y) = f(x, y) * g(x, y)$$

สำหรับทุก $(x, y) \in X \times X$

หมายเหตุ $f * g$ well-define เพราะ $f * g$ หาค่าได้เสมอและมีเพียงค่าเดียว

บทตั้ง 3.7 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติแจกแจงในตัว ถ้า $f, g \in S(X)$ แล้ว $f * g \in S(X)$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติการแจกแจงในตัว และ $f, g \in S(X)$

ให้ $x, y, z \in X$

ก่อนอื่นจะแสดงว่า $f * g$ เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรบน X

$$\text{พิจารณา } (f * g)(x, y) = f(x, y) * g(x, y) \quad (\text{จากบทนิยาม 3.6})$$

$$= f(y, x) * g(y, x) \quad (\text{จาก } f \text{ และ } g \text{ เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตร})$$

$$= (f * g)(y, x) \quad (\text{จากบทนิยาม 3.6})$$

ดังนั้น $f * g$ เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตร

$$\text{พิจารณา } (f * g)(x * y, z) = f(x * y, z) * g(x * y, z) \quad (\text{จากบทนิยาม 3.6})$$

$$\begin{aligned}
&= (x * f(y, z)) * (x * g(y, z)) \quad (\text{จาก } f, g \in S(X)) \\
&= x * ((f(y, z)) * (g(y, z))) \quad (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติแจกแจงในตัว}) \\
&= x * ((f * g)(y, z)) \quad (\text{จากบทนิยาม 3.6})
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f * g$ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X □

บทตั้ง 3.8 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและให้ $f \in S(X)$ จะได้ว่า

1. $\bar{1} * f = f$
2. $f * \bar{1} = \bar{1}$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติการแจกแจงในตัวและให้ $f \in S(X)$

1. ให้ $(x, y) \in X \times X$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}
(\bar{1} * f)(x, y) &= \bar{1}(x, y) * f(x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \\
&= 1 * f(x, y) && (\text{จาก } \bar{1}(x, y) = 1) \\
&= f(x, y) && (\text{จาก (CI2)})
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\bar{1} * f = f$

2. ให้ $(x, y) \in X \times X$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}
(f * \bar{1})(x, y) &= f(x, y) * \bar{1}(x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \\
&= f(x, y) * 1 && (\text{จาก } \bar{1}(x, y) = 1) \\
&= 1 && (\text{จากบทตั้ง 2.36}) \\
&= \bar{1}(x, y) && (\text{จาก } \bar{1}(x, y) = 1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f * \bar{1} = \bar{1}$ □

บทตั้ง 3.9 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและให้ $f \in S(X)$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้จริง

1. $f(1, 1) = 1$
2. $x \leq f(x, 1)$ สำหรับทุก $x \in X$
3. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x \leq f(y, 1)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติการแจกแจงในตัวและให้ $f \in S(X)$

1. จะแสดงว่า $f(1, 1) = 1$

$$\begin{aligned}
\text{พิจารณา} \quad f(1, 1) &= f(f(1, 1) * 1, 1) && (\text{จากบทตั้ง 2.36; } f(1, 1) * 1 = 1) \\
&= f(1, 1) * f(1, 1) && (\text{จาก } f \text{ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตร})
\end{aligned}$$

$$= 1 \quad (\text{จาก (CI1)})$$

ดังนั้น $f(1, 1) = 1$

2. ให้ $x \in X$ จะแสดงว่า $x \leq f(x, 1)$

นั่นคือจะแสดงว่า $x * f(x, 1) = 1$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad x * f(x, 1) &= f(x * x, 1) && (\text{จาก } f \text{ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตร}) \\ &= f(1, 1) && (\text{จาก (CI1)}) \\ &= 1 && (\text{จากข้อ 1}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x \leq f(x, 1)$

3. ให้ $x, y \in X$ จะแสดงว่า ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x \leq f(y, 1)$

สมมติให้ $x \leq y$ จะได้ว่า $x * y = 1$

จะแสดงว่า $x \leq f(y, 1)$ นั่นคือจะแสดงว่า $x * f(y, 1) = 1$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad x * f(y, 1) &= f(x * y, 1) && (\text{จาก } f \text{ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตร}) \\ &= f(1, 1) && (\text{จาก } x * y = 1) \\ &= 1 && (\text{จากข้อ 1}) \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x \leq f(y, 1)$ □

จากบทตั้ง 3.9 ข้อ 2. และ 3. และจาก f เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตร จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x \leq f(1, x)$ สำหรับทุก $x \in X$
2. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x \leq f(1, y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัว กำหนดการดำเนินการ $*$ บน $S(X)$ ดังบทนิยาม 3.6 จะได้ว่า $(S(X), *, \bar{1})$ เป็นพีชคณิต CI

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัว ให้ $f, g, h \in S(X)$ และให้ $(x, y) \in X \times X$

1. จะแสดงว่า $f * f = \bar{1}$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad (f * f)(x, y) &= f(x, y) * f(x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \\ &= 1 && (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติ (CI1)}) \\ &= \bar{1}(x, y) && (\text{จาก } \bar{1}(x, y) = 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f * f = \bar{1}$ สำหรับทุก $f \in S(X)$ ได้ว่า (CI1) เป็นจริง

2. จะแสดงว่า $\bar{1} * f = f$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad (\bar{1} * f)(x, y) &= \bar{1}(x, y) * f(x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \\ &= 1 * f(x, y) && (\text{จาก } \bar{1}(x, y) = 1) \end{aligned}$$

$$= f(x, y) \quad (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติ (CI2)})$$

ดังนั้น $\bar{1} * f = f$ สำหรับทุก $f \in S(X)$ ได้ว่า (CI2) เป็นจริง

3. จะแสดงว่า $f * (g * h) = g * (f * h)$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } (f * (g * h))(x, y) &= f(x, y) * [(g * h)(x, y)] && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \\ &= f(x, y) * [g(x, y) * h(x, y)] && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \\ &= g(x, y) * [f(x, y) * h(x, y)] && (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติ (CI3)}) \\ &= g(x, y) * [(f * h)(x, y)] && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \\ &= (g * (f * h))(x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f * (g * h) = g * (f * h)$ สำหรับทุก $f, g, h \in S(X)$ นั่นคือ (CI3) เป็นจริง

จาก 1-3 สรุปได้ว่า $(S(X), *, \bar{1})$ เป็นพีชคณิต CI □

บทตั้ง 3.11 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติแจกแจงในตัว จะได้ว่า $S(X)$ มีสมบัติแจกแจงในตัว

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติแจกแจงในตัว

ให้ $f, g, h \in S(X)$ และให้ $(x, y) \in X \times X$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } [f * (g * h)](x * y) &= f(x, y) * [(g * h)(x, y)] && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \\ &= f(x, y) * [g(x, y) * h(x, y)] && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \\ &= [f(x, y) * g(x, y)] * [f(x, y) * h(x, y)] && (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติการแจกแจงในตัว}) \\ &= [(f * g)(x, y)] * [(f * h)(x, y)] && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \\ &= [(f * g) * (f * h)](x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.6}) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } [f * (g * h)](x * y) = [(f * g) * (f * h)](x, y)$$

$$\text{นั่นคือ } f * (g * h) = (f * g) * (f * h)$$

สรุปได้ว่า $S(X)$ จะมีสมบัติการแจกแจงในตัว □

บทนิยาม 3.12 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ $x, y \in X$ จะนิยาม $x \cup y$ โดย

$$x \cup y = (y * x) * x$$

ถ้า X มีสมบัติสลับที่แล้วจะได้ว่า $(y * x) * x = (x * y) * y$ นั่นคือ $x \cup y = y \cup x$

บทนิยาม 3.13 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ f_1, f_2 เป็นฟังก์ชันจาก $X \times X$ ไป X นิยาม

$$f_1 \cup f_2 : X \times X \rightarrow X \text{ ดังนี้}$$

$$(f_1 \cup f_2)(x, y) = f_1(x, y) \cup f_2(x, y)$$

สำหรับทุก $(x, y) \in X \times X$

ทฤษฎีบท 3.14 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ $f_1, f_2 \in S(X)$ ได้ว่า $f_1 \cup f_2 \in S(X)$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ $f_1, f_2 \in S(X)$

จะแสดงว่า $f_1 \cup f_2 \in S(X)$

1. จะแสดงว่า $f_1 \cup f_2$ เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรบน X

ให้ $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา } (f_1 \cup f_2)(x, y) &= f_1(x, y) \cup f_2(x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.12}) \\ &= f_1(y, x) \cup f_2(y, x) && (\text{จาก } f_1, f_2 \text{ เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตร}) \\ &= (f_1 \cup f_2)(y, x) && (\text{จากบทนิยาม 3.12}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_1 \cup f_2$ เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรบน X

2. จะแสดงว่า $f_1 \cup f_2$ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

ให้ $x, y, z \in X$

พิจารณา

$$\begin{aligned} (f_1 \cup f_2)(x * y, z) &= f_1(x * y, z) \cup f_2(x * y, z) && (\text{จากบทนิยาม 3.13}) \\ &= [f_2(x * y, z) * f_1(x * y, z)] * f_1(x * y, z) && (\text{จากบทนิยาม 3.12}) \\ &= [(x * f_2(y, z)) * (x * f_1(y, z))] * (x * f_1(y, z)) && (\text{จาก } f_1, f_2 \in S(X)) \\ &= [x * (f_2(y, z) * f_1(y, z))] * (x * f_1(y, z)) && (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติการแจกแจงในตัว}) \\ &= x * [(f_2(y, z) * f_1(y, z)) * f_1(y, z)] && (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติการแจกแจงในตัว}) \\ &= x * [f_1(y, z) \cup f_2(y, z)] && (\text{จากบทนิยาม 3.12}) \\ &= x * (f_1 \cup f_2)(y, z) && (\text{จากบทนิยาม 3.13}) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f_1 \cup f_2$ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

สรุปได้ว่า $f_1 \cup f_2 \in S(X)$ □

ทฤษฎีบท 3.15 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ $f \in S(X)$ จะได้ว่า

1. $f \cup \bar{1} = \bar{1}$
2. $\bar{1} \cup f = \bar{1}$
3. $f \cup f = f$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ $f \in S(X)$

ให้ $(x, y) \in X \times X$

1. จะแสดงว่า $f \cup \bar{1} = \bar{1}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา} \quad (f \cup \bar{1})(x, y) &= f(x, y) \cup \bar{1}(x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.13}) \\
 &= (\bar{1}(x, y) * f(x, y)) * f(x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.12}) \\
 &= (1 * f(x, y)) * f(x, y) && (\text{จาก } \bar{1}(x, y) = 1) \\
 &= f(x, y) * f(x, y) && (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติ (CI2)}) \\
 &= 1 && (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติ (CI1)}) \\
 &= \bar{1}(x, y) && (\text{จาก } \bar{1}(x, y) = 1)
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $(f \cup \bar{1})(x, y) = \bar{1}(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in X \times X$

ดังนั้น $f \cup \bar{1} = \bar{1}$

2. จะแสดงว่า $\bar{1} \cup f = \bar{1}$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา} \quad (\bar{1} \cup f)(x, y) &= \bar{1}(x, y) \cup f(x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.13}) \\
 &= (f(x, y) * \bar{1}(x, y)) * \bar{1}(x, y) && (\text{จากบทนิยาม 3.12}) \\
 &= (f(x, y) * 1) * 1 && (\text{จาก } \bar{1}(x, y) = 1) \\
 &= 1 * 1 && (\text{จากบทตั้ง 2.36}) \\
 &= 1 && (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติ (CI1)}) \\
 &= \bar{1}(x, y) && (\text{จาก } \bar{1}(x, y) = 1)
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $(\bar{1} \cup f)(x, y) = \bar{1}(x, y)$ สำหรับทุก $(x, y) \in X \times X$

ดังนั้น $\bar{1} \cup f = \bar{1}$

3. จะแสดงว่า $f \cup f = f$

จากทฤษฎีบท 3.15 ข้อ 2. ได้ว่า $\bar{1} \cup f = \bar{1} \neq f$ สำหรับทุก $f \in S(X) - \{\bar{1}\}$ ดังนั้น กรณีที่ $|S(X)| > 1$ ได้ว่า $(S(X), \cup, \bar{1})$ ไม่เป็นพีชคณิต CI เนื่องจากขาดสมบัติ (CI2)

3.2 เคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI (Kernels and set of fixed points of symmetric bi-multipliers on CI-algebras)

บทนิยาม 3.16 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X กำหนด **เคอร์เนล (kernel)** ของ f ดังนี้

$$\text{Ker}(f) = \{x \in X \mid f(x, 1) = 1\}$$

บทนิยาม 3.17 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X นิยาม

$$\text{Fix}(f) = \{x \in X \mid f(x, 1) = x\}$$

จะเรียก $\text{Fix}(f)$ ว่าเซตของจุดตรึง (set of fixed points) ของ f

ตัวอย่าง 3.18 ให้ $X = \{1, a, b\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน X ดังตารางต่อไปนี้

$*$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	1
b	1	a	1

จากตัวอย่าง 2.25 ได้ว่า X เป็นพีชคณิต CI

กำหนดให้ $f : X \times X \rightarrow X$ โดยที่

$$f(x, y) = \begin{cases} a & \text{ถ้า } (x, y) = (a, a) \\ 1 & \text{ถ้า } (x, y) \neq (a, a) \end{cases}$$

สำหรับทุก $(x, y) \in X \times X$

จากตัวอย่าง 3.3 จะได้ว่า f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

จาก $f(1, 1) = f(a, 1) = f(b, 1) = 1$

ได้ว่า $\text{Ker}(f) = \{x \in X \mid f(x, 1) = 1\} = \{1, a, b\}$

และ $\text{Fix}(f) = \{x \in X \mid f(x, 1) = x\} = \{1\}$

ทฤษฎีบท 3.19 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X จะได้ว่า $\text{Ker}(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตร

จากบทตั้ง 3.9 ข้อ 1. ได้ว่า $f(1, 1) = 1$ ดังนั้น $1 \in \text{Ker}(f)$ นั่นคือ $\text{Ker}(f)$ ไม่เป็นเซตว่าง

ให้ $x, y \in \text{Ker}(f)$ จะแสดงว่า $x * y \in \text{Ker}(f)$

จาก $x, y \in \text{Ker}(f)$ ได้ว่า $f(x, 1) = 1$ และ $f(y, 1) = 1$

พิจารณา $f(x * y, 1) = x * f(y, 1)$ (จาก f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X)

$$= x * 1 \quad (\text{จาก } f(y, 1) = 1)$$

$$= 1 \quad (\text{จากบทตั้ง 2.36})$$

จะได้ว่า $x * y \in \text{Ker}(f)$

ดังนั้น $\text{Ker}(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X □

ทฤษฎีบท 3.20 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตร
จะได้ว่า $\text{Fix}(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตร

จากบทตั้ง 3.9 ข้อ 1. ได้ว่า $f(1, 1) = 1$ ดังนั้น $1 \in \text{Fix}(f)$ นั่นคือ $\text{Fix}(f)$ ไม่เป็นเซตว่าง

ให้ $x, y \in \text{Fix}(f)$ จะแสดงว่า $x * y \in \text{Fix}(f)$

จาก $x, y \in \text{Fix}(f)$ ได้ว่า $f(x, 1) = x$ และ $f(y, 1) = y$

พิจารณา $f(x * y, 1) = x * f(y, 1)$ (จาก f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X)

$$= x * y \quad (\text{จาก } f(y, 1) = y)$$

จะได้ว่า $x * y \in \text{Fix}(f)$

ดังนั้น $\text{Fix}(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X □

ทฤษฎีบท 3.21 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและมีสมบัติสลับที่และให้ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X จะได้ว่า ถ้า $x \in \text{Ker}(f)$ และ $x \leq y$ แล้ว $y \in \text{Ker}(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและมีสมบัติสลับที่และให้ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

ให้ $x, y \in X$

สมมติให้ $x \in \text{Ker}(f)$ และ $x \leq y$ จะแสดงว่า $y \in \text{Ker}(f)$

จาก $x \in \text{Ker}(f)$ ได้ว่า $f(x, 1) = 1$

และจาก $x \leq y$ ได้ว่า $x * y = 1$

พิจารณา $f(y, 1) = f(1 * y, 1)$ (จาก (CI2))

$$= f((x * y) * y, 1) \quad (\text{จาก } x * y = 1)$$

$$= f((y * x) * x, 1) \quad (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติสลับที่})$$

$$= (y * x) * f(x, 1) \quad (\text{จาก } f \text{ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน } X)$$

$$= (y * x) * 1 \quad (\text{จาก } f(x, 1) = 1)$$

$$= 1 \quad (\text{จากบทตั้ง 2.36})$$

จะได้ว่า $y \in \text{Ker}(f)$

ดังนั้น ถ้า $x \in \text{Ker}(f)$ และ $x \leq y$ แล้ว $y \in \text{Ker}(f)$ □

ทฤษฎีบท 3.22 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติสลับที่และให้ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X จะได้ว่า ถ้า $x \in \text{Fix}(f)$ และ $x \leq y$ แล้ว $y \in \text{Fix}(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติสลับที่และให้ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X ให้ $x, y \in X$

สมมติให้ $x \in \text{Fix}(f)$ และ $x \leq y$ จะแสดงว่า $y \in \text{Fix}(f)$

จาก $x \in \text{Fix}(f)$ ได้ว่า $f(x, 1) = x$

และจาก $x \leq y$ ได้ว่า $x * y = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } f(y, 1) &= f(1 * y, 1) && (\text{จาก (CI2)}) \\
 &= f((x * y) * y, 1) && (\text{จาก } x * y = 1) \\
 &= f((y * x) * x, 1) && (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติสลับที่}) \\
 &= (y * x) * f(x, 1) && (\text{จาก } f \text{ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน } X) \\
 &= (y * x) * x && (\text{จาก } f(x, 1) = x) \\
 &= (x * y) * y && (\text{จาก } X \text{ มีสมบัติสลับที่}) \\
 &= 1 * y && (\text{จาก } x * y = 1) \\
 &= y && (\text{จาก (CI2)})
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $y \in \text{Fix}(f)$

ดังนั้น ถ้า $x \in \text{Fix}(f)$ และ $x \leq y$ แล้ว $y \in \text{Fix}(f)$ □

ทฤษฎีบท 3.23 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X จะได้ว่า ถ้า $x \in \text{Ker}(f)$ แล้ว $x \cup y \in \text{Ker}(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X ให้ $x, y \in X$

สมมติให้ $x \in \text{Ker}(f)$ จะแสดงว่า $x \cup y \in \text{Ker}(f)$

จาก $x \in \text{Ker}(f)$ ได้ว่า $f(x, 1) = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{พิจารณา } f(x \cup y, 1) &= f((y * x) * x, 1) && (\text{จากบทนิยาม 3.12}) \\
 &= (y * x) * f(x, 1) && (\text{จาก } f \text{ เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน } X) \\
 &= (y * x) * 1 && (\text{จาก } f(x, 1) = 1) \\
 &= 1 && (\text{จากบทตั้ง 2.36})
 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $x \cup y \in \text{Ker}(f)$

ดังนั้น ถ้า $x \in \text{Ker}(f)$ แล้ว $x \cup y \in \text{Ker}(f)$ □

ทฤษฎีบท 3.24 ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

จะได้ว่า ถ้า $x \in \text{Fix}(f)$ แล้ว $x \cup y \in \text{Fix}(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

ให้ $x, y \in X$

สมมติให้ $x \in \text{Fix}(f)$ จะแสดงว่า $x \cup y \in \text{Fix}(f)$

จาก $x \in \text{Fix}(f)$ ได้ว่า $f(x, 1) = x$

พิจารณา $f(x \cup y, 1) = f((y * x) * x, 1)$

(จากบทนิยาม 3.12)

$$= (y * x) * f(x, 1)$$

(จาก f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X)

$$= (y * x) * x$$

(จาก $f(x, 1) = x$)

$$= x \cup y$$

(จาก $x \cup y = (y * x) * x$)

จะได้ว่า $x \cup y \in \text{Fix}(f)$

ดังนั้น ถ้า $x \in \text{Fix}(f)$ แล้ว $x \cup y \in \text{Fix}(f)$ □

ถ้า X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติสลับที่แล้ว จะได้ว่า $x \cup y = y \cup x$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ดังนั้น จะได้ว่าบทแทรกต่อไปนี้เป็นจริง

บทแทรก 3.25 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและมีสมบัติสลับที่และให้ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

จะได้ว่า ถ้า $y \in \text{Ker}(f)$ แล้ว $x \cup y \in \text{Ker}(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทแทรก 3.26 ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีสมบัติสลับที่และ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X

จะได้ว่า ถ้า $y \in \text{Fix}(f)$ แล้ว $x \cup y \in \text{Fix}(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

3.3 ฟังก์ชันสาคีสถฐานบนพีชคณิต CI (Homomorphisms on CI-algebras)

บทนิยาม 3.27 ให้ $A = (A, *, 1_A)$ และ $B = (B, \otimes, 1_B)$ เป็นพีชคณิต CI จะเรียก $f : A \rightarrow B$ ว่าเป็นฟังก์ชันสาคีสถฐานของพีชคณิต CI (CI-homomorphism) ก็ต่อเมื่อ

$$f(x * y) = f(x) \otimes f(y)$$

สำหรับทุก $x, y \in A$

ตัวอย่าง 3.28 ให้ $A = \{0, x, y\}$ และ $B = \{1, a, b\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน A และ $\otimes$ บน B ดังตารางต่อไปนี้

$$A = \begin{array}{c|ccc} * & 0 & x & y \\ \hline 0 & 0 & x & y \\ x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{และ} \quad B = \begin{array}{c|ccc} \otimes & 1 & a & b \\ \hline 1 & 1 & a & b \\ a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & a & 1 \end{array}$$

จาก [1] และตัวอย่าง 2.25 จะได้ว่า $A = (A, *, 0)$ และ $B = (B, \otimes, 1)$ เป็นพีชคณิต CI

ให้ $f : A \rightarrow B$ กำหนดโดย $f(0) = 1, f(x) = a$ และ $f(y) = a$

จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานของพีชคณิต CI

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(0 * 0) &= f(0) = 1 = 1 \otimes 1 = f(0) \otimes f(0) \\ f(0 * x) &= f(x) = a = 1 \otimes a = f(0) \otimes f(x) \\ f(0 * y) &= f(y) = a = 1 \otimes a = f(0) \otimes f(y) \\ f(x * 0) &= f(0) = 1 = a \otimes 1 = f(x) \otimes f(0) \\ f(x * x) &= f(0) = 1 = a \otimes a = f(x) \otimes f(x) \\ f(x * y) &= f(0) = 1 = a \otimes a = f(x) \otimes f(y) \\ f(y * 0) &= f(0) = 1 = a \otimes 1 = f(y) \otimes f(0) \\ f(y * x) &= f(0) = 1 = a \otimes a = f(y) \otimes f(x) \\ f(y * y) &= f(0) = 1 = a \otimes a = f(y) \otimes f(y) \end{aligned}$$

จะได้ว่า $f(x * y) = f(x) \otimes f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in A$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานของพีชคณิต CI

บทตั้ง 3.29 ให้ $A = (A, *, 1_A)$ และ $B = (B, \otimes, 1_B)$ เป็นพีชคณิต CI และ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานของพีชคณิต CI จะได้ว่า $f(1_A) = 1_B$

พิสูจน์ ให้ $A = (A, *, 1_A)$ และ $B = (B, \otimes, 1_B)$ เป็นพีชคณิต CI และ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันสาคูพื้นฐานของพีชคณิต CI

พิจารณา $f(1_A) = f(1_A * 1_A)$ (จาก (CI1))

$$\begin{aligned}
 &= f(1_A) \otimes f(1_A) && \text{(จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสําคัญพื้นฐาน)} \\
 &= 1_B && \text{(จาก (CI1))}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(1_A) = 1_B$ □

ทฤษฎีบท 3.30 ให้ $A = (A, *, 1_A)$ และ $B = (B, \otimes, 1_B)$ เป็นพีชคณิต CI และ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันสําคัญพื้นฐานของพีชคณิต CI จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า C เป็นพีชคณิตย่อยของ A แล้ว $f(C)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ B
2. ถ้า D เป็นพีชคณิตย่อยของ B แล้ว $f^{-1}(D)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ A

พิสูจน์ ให้ $A = (A, *, 1_A)$ และ $B = (B, \otimes, 1_B)$ เป็นพีชคณิต CI

และ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันสําคัญพื้นฐานของพีชคณิต CI

1. ให้ C เป็นพีชคณิตย่อยของ A ดังนั้น $C \subseteq A$ และ C ไม่เป็นเซตว่าง

จาก C เป็นพีชคณิตย่อยของ A โดยบทตั้ง 2.29 ได้ว่า $1_A \in C$

จากบทตั้ง 3.29 ได้ว่า $f(1_A) = 1_B$

ดังนั้น $1_B = f(1_A) \in f(C)$

นั่นคือ $f(C)$ ไม่เป็นเซตว่าง

ให้ $x, y \in f(C)$

จะได้ว่า $x = f(c_1)$ และ $y = f(c_2)$ สำหรับบาง $c_1, c_2 \in C$

จะแสดงว่า $x \otimes y \in f(C)$

จาก f เป็นฟังก์ชันสําคัญพื้นฐานได้ว่า $x \otimes y = f(c_1) \otimes f(c_2) = f(c_1 * c_2)$

เนื่องจาก C เป็นพีชคณิตย่อยของ A ดังนั้น $c_1 * c_2 \in C$

ได้ว่า $x \otimes y = f(c_1 * c_2) \in f(C)$

ดังนั้น $f(C)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ B

2. ให้ D เป็นพีชคณิตย่อยของ B ดังนั้น $D \subseteq B$ และ D ไม่เป็นเซตว่าง

จาก D เป็นพีชคณิตย่อยของ B โดยบทตั้ง 2.29 ได้ว่า $1_B \in D$

จากบทตั้ง 3.29 ได้ว่า $f(1_A) = 1_B$

ได้ว่า $f(1_A) = 1_B \in D$ นั่นคือ $1_A \in f^{-1}(D)$

ดังนั้น $f^{-1}(D)$ ไม่เป็นเซตว่าง

ให้ $a, b \in f^{-1}(D)$

จะได้ว่า $f(a), f(b) \in D$

จะแสดงว่า $a * b \in f^{-1}(D)$

จาก f เป็นฟังก์ชันสําคัญพื้นฐานได้ว่า $f(a * b) = f(a) \otimes f(b)$

จาก D เป็นพีชคณิตย่อยของ B ได้ว่า $f(a) \otimes f(b) \in D$

ดังนั้น $f(a * b) \in D$ นั่นคือ $a * b \in f^{-1}(D)$

ดังนั้น $f^{-1}(D)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ A □

ทฤษฎีบท 3.31 ให้ $A = (A, *, 1_A)$, $B = (B, \otimes, 1_B)$ และ $C = (C, \oplus, 1_C)$ เป็นพีชคณิต CI ถ้า $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานของพีชคณิต CI แล้ว $g \circ f : A \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานของพีชคณิต CI

พิสูจน์ ให้ $A = (A, *, 1_A)$, $B = (B, \otimes, 1_B)$ และ $C = (C, \oplus, 1_C)$ เป็นพีชคณิต CI

สมมติให้ $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานของพีชคณิต CI

จะแสดงว่า $g \circ f : A \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานของพีชคณิต CI

ให้ $a, b \in A$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a * b) &= g(f(a * b)) \\ &= g(f(a) \otimes f(b)) \quad (\text{จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน}) \\ &= g(f(a)) \oplus g(f(b)) \quad (\text{จาก } g \text{ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน}) \\ &= (g \circ f)(a) \oplus (g \circ f)(b) \end{aligned}$$

ดังนั้น $g \circ f : A \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานของพีชคณิต CI □

บทนิยาม 3.32 ให้ $A = (A, *, 1_A)$ และ $B = (B, \otimes, 1_B)$ เป็นพีชคณิต CI และ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานของพีชคณิต CI กำหนด **เคอร์เนล (kernel)** ของ f ดังนี้

$$Ker(f) = \{x \in A \mid f(x) = 1_B\}$$

ตัวอย่าง 3.33 ให้ $A = \{0, x, y\}$ และ $B = \{1, a, b\}$ กำหนดการดำเนินการทวิภาค $*$ บน A และ $\otimes$ บน B ดังตารางต่อไปนี้

$$A = \begin{array}{c|ccc} * & 0 & x & y \\ \hline 0 & 0 & x & y \\ x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{และ} \quad B = \begin{array}{c|ccc} \otimes & 1 & a & b \\ \hline 1 & 1 & a & b \\ a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & a & 1 \end{array}$$

จาก [1] และตัวอย่าง 2.25 จะได้ว่า $A = (A, *, 0)$ และ $B = (B, \otimes, 1)$ เป็นพีชคณิต CI ตามลำดับ

ให้ $f : A \rightarrow B$ กำหนดโดย $f(0) = 1$, $f(x) = a$ และ $f(y) = a$

จากตัวอย่าง 3.28 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานของพีชคณิต CI

จาก $f(0) = 1$ ได้ว่า $\text{Ker}(f) = \{0\}$

ทฤษฎีบท 3.34 ให้ $A = (A, *, 1_A)$ และ $B = (B, \otimes, 1_B)$ เป็นพีชคณิต CI และ f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานของพีชคณิต CI จะได้ว่า $\text{Ker}(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ A

พิสูจน์ ให้ $A = (A, *, 1_A)$ และ $B = (B, \otimes, 1_B)$ เป็นพีชคณิต CI และ f เป็นฟังก์ชันสัทิสฐานของพีชคณิต CI

จากบทตั้ง 3.29 จะได้ว่า $f(1_A) = 1_B$

ดังนั้น $1_A \in \text{Ker}(f)$ นั่นคือ $\text{Ker}(f)$ ไม่เป็นเซตว่าง

ให้ $x, y \in \text{Ker}(f)$ จะได้ว่า $f(x) = 1_B$ และ $f(y) = 1_B$

จะแสดงว่า $x * y \in \text{Ker}(f)$

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad f(x * y) &= f(x) \otimes f(y) && (\text{จาก } f \text{ เป็นฟังก์ชันสัทิสฐาน}) \\ &= 1_B \otimes 1_B && (\text{จาก } x, y \in \text{Ker}(f)) \\ &= 1_B && (\text{จาก } B \text{ มีสมบัติ (CI1)}) \end{aligned}$$

นั่นคือ $x * y \in \text{Ker}(f)$

ดังนั้น $\text{Ker}(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ A

□

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

ในการค้นคว้าอิสระ เราศึกษาเกี่ยวกับบทยานิยามและสมบัติบางประการของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI โดยที่พีชคณิต CI มีบทยานิยามดังนี้

ให้ X เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน X และ $1 \in X$ จะเรียก $(X, *, 1)$ หรือ X ว่าเป็น**พีชคณิต CI** ถ้า X สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$(CI1) \quad x * x = 1$$

$$(CI2) \quad 1 * x = x$$

$$(CI3) \quad x * (y * z) = y * (x * z)$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

สำหรับตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI มีบทยานิยามดังนี้ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ $f : X \times X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันแบบสมมาตรกล่าวคือ $f(x, y) = f(y, x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะเรียก f ว่าเป็น**ตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI** เมื่อ f สอดคล้องกับ

$$f(x * y, z) = x * f(y, z)$$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

เราได้ศึกษาเกี่ยวกับแนวคิดและสมบัติบางประการของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI ซึ่งได้ผลการศึกษาดังนี้

ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและให้ $f \in S(X)$ โดยที่ $S(X)$ แทนเซตของตัวคูณคู่แบบสมมาตรทั้งหมดบน X จะได้ว่า

1. $f(1, 1) = 1$
2. $x \leq f(x, 1)$ สำหรับทุก $x \in X$
3. ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x \leq f(y, 1)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
4. ถ้า $\bar{1} : X \times X \rightarrow X$ กำหนดโดย $\bar{1}(x, y) = 1$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $\bar{1} \in S(X)$
5. ถ้า $f, g \in S(X)$ แล้ว $f * g \in S(X)$ เมื่อ $(f * g)(x, y) = f(x, y) * g(x, y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
6. $(S(X), *, \bar{1})$ เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัว

7. ถ้า $f_1, f_2 \in S(X)$ แล้ว $f_1 \cup f_2 \in S(X)$ เมื่อ $(f_1 \cup f_2)(x, y) = f_1(x, y) \cup f_2(x, y) = (f_2(x, y)) * f_1(x, y) * f_1(x, y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

นอกจากนี้เราได้ศึกษาบทนิยามและสมบัติบางประการของเคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI โดยที่บทนิยามของเคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI เป็นดังนี้

ให้ X เป็นพีชคณิต CI และ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X กำหนด **เคอร์เนลและเซตของจุดตรึง** ของ f ดังนี้

$$Ker(f) = \{x \in X \mid f(x, 1) = 1\}$$

และ

$$Fix(f) = \{x \in X \mid f(x, 1) = x\}$$

จะเรียก $Fix(f)$ ว่า**เซตของจุดตรึง (set of fixed points)** ของ f

สำหรับการศึกษาเกี่ยวกับสมบัติบางประการของเคอร์เนลและเซตของจุดตรึงของตัวคูณคู่แบบสมมาตรบนพีชคณิต CI ได้ผลการศึกษาดังนี้

ให้ X เป็นพีชคณิต CI ที่มีการแจกแจงในตัวและ f เป็นตัวคูณคู่แบบสมมาตรบน X จะได้ว่า

1. $Ker(f)$ และ $Fix(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ X
2. กรณีที่ X มีสมบัติสลับที่ จะได้ว่า

2.1 ถ้า $x \in Ker(f)$ และ $x \leq y$ แล้ว $y \in Ker(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

2.2 ถ้า $x \in Fix(f)$ และ $x \leq y$ แล้ว $y \in Fix(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

3. ถ้า $x \in Ker(f)$ แล้ว $x \cup y \in Ker(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เมื่อ $x \cup y = (y * x) * x$

4. ถ้า $x \in Fix(f)$ แล้ว $x \cup y \in Fix(f)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เมื่อ $x \cup y = (y * x) * x$

สุดท้ายนี้เราได้ศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับฟังก์ชันสาคีสถฐานบนพีชคณิต CI โดยที่บทนิยามของฟังก์ชันสาคีสถฐานบนพีชคณิต CI เป็นดังนี้

ให้ $A = (A, *, 1_A)$ และ $B = (B, \otimes, 1_B)$ เป็นพีชคณิต CI จะเรียก $f : A \rightarrow B$ ว่าเป็น**ฟังก์ชันสาคีสถฐานของพีชคณิต CI** ก็ต่อเมื่อ

$$f(x * y) = f(x) \otimes f(y)$$

สำหรับทุก $x, y \in A$

สำหรับการศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับฟังก์ชันสาคีสถฐานบนพีชคณิต CI ได้ผลการศึกษาดังนี้

ให้ $A = (A, *, 1_A)$, $B = (B, \otimes, 1_B)$ และ $C = (C, \oplus, 1_C)$ เป็นพีชคณิต CI ถ้า $f : A \rightarrow B$ และ $g : B \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันสาคีสถฐานของพีชคณิต CI จะได้ว่า

1. $f(1_A) = 1_B$
2. ถ้า C เป็นพีชคณิตย่อยของ A แล้ว $f(C)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ B
3. ถ้า D เป็นพีชคณิตย่อยของ B แล้ว $f^{-1}(D)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ A
4. $g \circ f : A \rightarrow C$ เป็นฟังก์ชันสําคัญพื้นฐานของพีชคณิต CI
5. $\text{Ker}(f)$ เป็นพีชคณิตย่อยของ A

บรรณานุกรม

- [1] Biao Long Meng, CI-algebras, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, 2009, 695-701.
- [2] Tamer Firat, Şule Ayar Özbal, Symmetric Bi-multipliers on d-algebras, Journal of Mathematical Sciences and Applications, 2015, Vol.3, No. 2, 22-24.
- [3] กัลยรัตน์ เกียวประเสริฐ, กระบวนวิชาการค้นคว้าอิสระ (206499) Multipliers in CI-algebras, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2564
- [4] ขวัญพร จันทน์สุวรรณ, กระบวนวิชาการ ค้นคว้า อิสระ (206499) Homomorphism of BF-algebras, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2564
- [5] ปรรธนา ใจ ผ่อง, แนวคิด หลัก มูล ของ คณิตศาสตร์, หน่วย พิมพ์ เอกสาร คณะ วิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
- [6] พิมพ์หทัย คำพลอย, กระบวนวิชาการค้นคว้าอิสระ (206499) Symmetric Bi-multipliers on BE-algebras, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยเชียงใหม่, 2565

ภาคผนวก



Symmetric Bi-multiplier On CI-algebra

Natnicha Bussabok

Advisor : Asst. Prof. Dr. Preeyanuch Honyam

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University



Abstract

In this independent study, we study definitions and some properties of CI-algebras. We also study the concept of symmetric bi-multipliers on CI-algebras and investigate some related properties. Moreover, we study definitions and some properties of kernels and sets of fixed points of symmetric bi-multipliers on CI-algebras.

Definition 1 Let X be a nonempty set with a binary operation $*$ and $1 \in X$.

Then $X = (X, *, 1)$ is a **CI-algebra** if X satisfies the following identities:

(CI1) $x * x = 1$,

(CI2) $1 * x = x$,

(CI3) $x * (y * z) = y * (x * z)$,

for all $x, y, z \in X$.

We define a relation $\leq$ on CI-algebra X by

$x \leq y$ if and only if $x * y = 1$ for all $x, y \in X$.

Definition 2 A nonempty subset S of a CI-algebra X is said to be a **subalgebra** of X if $x * y \in S$ for all $x, y \in X$.

Definition 3 A CI-algebra X is said to be **self-distributive** if

$$x * (y * z) = (x * y) * (x * z) \text{ for all } x, y, z \in X.$$

Definition 4 A CI-algebra X is said to be **commutative** if

$$(x * y) * y = (y * x) * x \text{ for all } x, y \in X.$$

Definition 5 Let X be a CI-algebra and let $f : X \times X \rightarrow X$. Then f is called **symmetric** if $f(x, y) = f(y, x)$ for all $x, y \in X$.

Definition 6 Let X be a CI-algebra and let $f : X \times X \rightarrow X$ be a symmetric mapping. Then f is called a **symmetric Bi-multiplier** on X if it satisfies

$$f(x * y, z) = x * f(y, z)$$

for all $x, y, z \in X$.

Example 7 Let $X = \{1, a, b\}$ with the binary operation $*$ defined by

$*$	1	a	b
1	1	a	b
a	1	1	1
b	1	a	1

Then X is a CI-algebra.

Define $f : X \times X \rightarrow X$ and $g : X \times X \rightarrow X$ by

$$f(x, y) = 1 \text{ and } g(x, y) = \begin{cases} a & \text{if } (x, y) = (a, a) \\ 1 & \text{if } (x, y) \neq (a, a) \end{cases}.$$

It is easy to check that f and g are symmetric bi-multipliers on X .

Let $S(X)$ be the collection of all symmetric bi-multipliers on X .

Let $\bar{1} : X \times X \rightarrow X$ define by $\bar{1}(x, y) = 1$ for all $(x, y) \in X \times X$.

Then $\bar{1}$ is a symmetric bi-multiplier on X , that means $\bar{1} \in S(X)$.

Definition 8 Let X be a self-distributive CI-algebra. Define a binary operation $*$ on $S(X)$ by

$$(f * g)(x, y) = f(x, y) * g(x, y)$$

for all $(x, y) \in X \times X$.

Theorem 9 Let X be a self-distributive CI-algebra. Then $(S(X), *, \bar{1})$ is a self-distributive CI-algebra.

Theorem 10 Let X be a self-distributive CI-algebra and let $f \in S(X)$. Then the following statements hold:

1. $f(1, 1) = 1$,
2. $x \leq f(x, 1)$ for all $x \in X$,
3. if $x \leq y$, then $x \leq f(y, 1)$ for all $x, y \in X$,

Definition 11 Let X be a CI-algebra and let $f \in S(X)$. Define

$$\text{Ker}(f) = \{x \in X \mid f(x, 1) = 1\}$$

and

$$\text{Fix}(f) = \{x \in X \mid f(x, 1) = x\}.$$

$\text{Ker}(f)$ and $\text{Fix}(f)$ are called **kernel** of f and the **set of fixed points** of f , respectively.

Theorem 12 Let X be a self-distributive CI-algebra and let $f \in S(X)$. Then the following statements hold:

1. $\text{Ker}(f)$ and $\text{Fix}(f)$ are subalgebras of X .
2. Let X be a commutative CI-algebra.
 - 2.1 If $x \in \text{Ker}(f)$ and $x \leq y$, then $y \in \text{Ker}(f)$.
 - 2.2 If $x \in \text{Fix}(f)$ and $x \leq y$, then $y \in \text{Fix}(f)$.
3. If $x \in \text{Ker}(f)$, then $x \cup y \in \text{Ker}(f)$ where $x \cup y = (y * x) * x$.
4. If $x \in \text{Fix}(f)$, then $x \cup y \in \text{Fix}(f)$ where $x \cup y = (y * x) * x$.

Reference

- [1] Biao Long Meng, CI-algebras, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, 2009, 695-701.
- [2] Tamer Firat, Şule Ayar Özbal, Symmetric Bi-multipliers on d-algebras, Journal of Mathematical Sciences and Applications, 2015, Vol.3, No. 2, 22-24.