

จำนวนการให้สีวงกลมที่ตัดกันซึ่งทุกบริเวณมีสีต่างกัน

(The number of colourings for intersecting circles where all regions have different colours)

นางสาวอินทิราภรณ์ เห่วซึ่งเจริญ

รหัส 630510532

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2566

จำนวนการให้สีวงกลมที่ตัดกันซึ่งทุกบริเวณมีสีต่างกัน

(The number of colourings for intersecting circles where all regions have different colours)

นางสาวอินทิราภรณ์ เห่วซึ่งเจริญ

630510532

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

จำนวนการให้สีวงกลมที่ตัดกันซึ่งทุกบริเวณมีสีต่างกัน

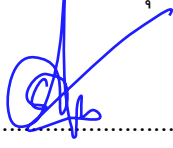
(The number of colourings for intersecting circles where all regions have different colours)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา

ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

  ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์)

  กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วรรณศิริ วรรณสิทธิ์)

วันที่ 8 มีนาคม พ.ศ. 2567

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการศึกษาการค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง จำนวนการให้สีวงกลมที่ตัดกันซึ่งทุกบริเวณมีสีต่างกัน

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์ ประธานกรรมการสอบและในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษา งานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วรรณศิริ วรรณสิทธิ์ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระ ที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้ข้อเสนอแนะ พิจารณา และตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม รวมถึงให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอ ตลอดจนการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

นางสาวอินทิราภรณ์ เทวซึ่งเจริญ

หัวข้อ (ภาษาไทย)	จำนวนการให้สีวงกลมที่ตัดกันซึ่งทุกบริเวณมีสีต่างกัน
(ภาษาอังกฤษ)	The number of colourings for intersecting circles where all regions have different colours
ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ	นางสาวอินทิราภรณ์ เหั่วซึ่งเจริญ รหัสนักศึกษา 630510532
ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์
ชื่อกรรมการสอบ	รองศาสตราจารย์ ดร.วรรณศิริ วรรณสิทธิ์

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้เป็นการศึกษาเพื่อหาจำนวนการให้สีวงกลม 2 วงที่ตัดกัน และวงกลม 3 วงที่ตัดกันซึ่งทำให้ทุกบริเวณมีสีต่างกัน จะพิจารณาแม่สีเดียวที่มีค่าความสว่างตั้งแต่ 0 ถึง 255 โดยค่าความสว่างสีของพื้นที่วงกลมที่ซ้อนทับกันคือความสว่างสีของวงกลม 2 วงรวมกัน จะหาจำนวนสมาชิกของเซตของชุดสีที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข โดยใช้หลักการเพิ่มเข้าตัดออกแล้วนำมาลบออกจากเอกภพสัมพัทธ์ ซึ่งจะได้ผลการศึกษาของจำนวนการให้สีวงกลม 2 วงที่ตัดกันซึ่งทำให้ทุกบริเวณมีสีต่างกัน และผลการศึกษาของจำนวนการให้สีวงกลม 3 วงที่ตัดกันซึ่งทำให้ทุกบริเวณมีสีต่างกัน

Abstract

This independent study finds the number of colourings for intersecting 2 circles and intersecting 3 circles where all regions have different colours. A single primary colour with the brightness value from 0 to 255 is considered. The colour brightness value of the overlapping circle area is the sum of the brightness values of the two circles. We find the size of the set of colourings that do not satisfy the above conditions using inclusion exclusion principle and subtract from the size of the universe. Our main results are the number of colourings for 2 intersecting circles where all regions have different colours and the number of colourings for 3 intersecting circles where all regions have different colours.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	1
บทที่ 2 ผลการศึกษา (Main results)	2
บทที่ 3 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	100
บรรณานุกรม	101
ภาคผนวก	102

บทที่ 1

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

บทนิยาม 1.1 : แม่สีของแสงสี คือ สีแดง สีเขียว และสีน้ำเงิน

บทนิยาม 1.2 : ค่าความสว่างของแม่สีของแสงสี เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 255 ค่าความสว่างสีเป็น 0 จะเป็นสีดำ ค่าความสว่างสีเป็น 255 จะเป็นสีของแม่สีนั้น

กำหนดให้ X เป็นเซตของบริเวณภายในวงกลม x

Y เป็นเซตของบริเวณภายในวงกลม y

Z เป็นเซตของบริเวณภายในวงกลม z

พิจารณาความสว่างสี

ให้ค่าความสว่างสีของ X เป็น R_x

ให้ค่าความสว่างสีของ Y เป็น R_y

ให้ค่าความสว่างสีของ Z เป็น R_z

บทนิยาม 1.3 : การผสมแสงสี เมื่อวงกลม x ซึ่งบริเวณภายในวงกลมที่มีค่าความสว่างสีเป็น R_x มาซ้อนทับกับวงกลม y ที่มีค่าความสว่างสีเป็น R_y บริเวณที่ซ้อนทับกันจะมีค่าความสว่างสีเป็น $R_x + R_y$ ถ้าค่าความสว่างรวมกันได้มากกว่า 255 เราจะกำหนดให้ค่าความสว่างสีนั้นเป็น 255

ทฤษฎีบท 1.4 : กำหนด $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ เป็นเซตจำกัดที่ $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับทุก $i \neq j$ แล้ว

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n|$$

ทฤษฎีบท 1.5 : กำหนด A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

ทฤษฎีบท 1.6 : กำหนด A, B และ C เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

ทฤษฎีบท 1.7 : กำหนด $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นพจน์ที่สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ค่าของ $a_{i+1} - a_i$ เป็นค่าคงตัวค่าหนึ่ง จะได้ว่าผลรวมของทุกพจน์ คือ $\left(\frac{n}{2}\right)(a_1 + a_n)$

บทที่ 2

ผลการศึกษา (Main results)

เราต้องการดูแม่สีแค่สีใดสีหนึ่งเพียงสีเดียวในการพิจารณาจำนวนการให้สีวงกลม 2 วงที่ตัดกันซึ่งทำให้ทุกบริเวณมีสีต่างกัน และ จำนวนการให้สีวงกลม 3 วงที่ตัดกันซึ่งทำให้ทุกบริเวณมีสีต่างกัน

ดังนั้น

กรณีวงกลม 2 วง สีของ $X - Y$ สีของ $Y - X$ และ สีของ $X \cap Y$ ต้องต่างกันทั้งหมด

กรณีวงกลม 3 วง สีของ $X - (Y \cup Z)$ สีของ $Y - (X \cup Z)$ สีของ $Z - (X \cup Y)$ สีของ $(X \cap Y) - Z$ สีของ $(Y \cap Z) - X$ สีของ $(X \cap Z) - Y$ และสีของ $X \cap Y \cap Z$ ต้องต่างกันทั้งหมด

จะเห็นได้ว่า

สำหรับวงกลม 2 วง x และ y

ค่าความสว่างสีของส่วน $X - Y$ เป็น R_x

ค่าความสว่างสีของส่วน $Y - X$ เป็น R_y

ค่าความสว่างสีของส่วน $X \cap Y$ เป็น $\min\{255, R_x + R_y\}$

สำหรับวงกลม 3 วง x, y และ z

ค่าความสว่างสีของส่วน $X - (Y \cup Z)$ เป็น R_x

ค่าความสว่างสีของส่วน $Y - (X \cup Z)$ เป็น R_y

ค่าความสว่างสีของส่วน $Z - (X \cup Y)$ เป็น R_z

ค่าความสว่างสีของส่วน $(X \cap Y) - Z$ เป็น $\min\{255, R_x + R_y\}$

ค่าความสว่างสีของส่วน $(Y \cap Z) - X$ เป็น $\min\{255, R_y + R_z\}$

ค่าความสว่างสีของส่วน $(X \cap Z) - Y$ เป็น $\min\{255, R_x + R_z\}$

ค่าความสว่างสีของส่วน $X \cap Y \cap Z$ เป็น $\min\{255, R_x + R_y + R_z\}$

ข้อสังเกต 2.1: สำหรับบริเวณที่ซ้อนทับกัน ถ้าบริเวณใดคำนวณค่า $R_x + R_y$, $R_y + R_z$, $R_x + R_z$ และ $R_x + R_y + R_z$ ได้มากกว่าหรือเท่ากับ 255 จะเป็นสีเดียวกัน

2.1. วงกลม 2 วง

จากค่าความสว่างสีของ $X - Y$, ของ $Y - X$ และ ของ $X \cap Y$ ต้องต่างกันทั้งหมด ทำให้ได้ผลลัพธ์
ดังนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.2 : สำหรับวงกลม 2 วง x และ y ค่า R_x และ R_y ไม่เป็น 0

บทพิสูจน์ พิจารณา $R_i, i = x, y$

ให้ $R_i = 0$ และ $j = x, y$ โดยที่ $j \neq i$

จะได้ว่า $R_i + R_j = 0 + R_j = R_j$

แสดงว่าส่วน $i \cap j$ เป็นสีเดียวกับส่วน j □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.3 : สำหรับวงกลม 2 วง x และ y ค่า R_x และ R_y ไม่เป็น 255

บทพิสูจน์ พิจารณา $R_i, i = x, y$

ให้ $R_i = 255$ และ $j = x, y$ โดยที่ $j \neq i$

จะได้ว่า $R_i + R_j = 255 + R_j \geq 255$

แสดงว่าค่าความสว่างของส่วน $i \cap j$ จะเป็น $\min\{255, R_i + R_j\} = 255$ ซึ่งเป็นสีเดียวกับส่วน i □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.4 : สำหรับวงกลม 2 วง x และ y มีชุดสี (R_x, R_y) จำนวน 64262 ชุดสี

บทพิสูจน์ R_x มีค่าตั้งแต่ $R_x = 1$ ถึง $R_x = 254$

R_y มีค่าตั้งแต่ $R_y = 1$ ถึง $R_y = 254$

ค่าความสว่างสีวงกลม x เป็นได้ตั้งแต่ 1 ถึง 254 และค่าความสว่างสีวงกลม x แต่ละค่าจับคู่กับค่าความสว่างสีวงกลม y ได้ทั้งหมด 253 วิธี เนื่องจากตัดกรณีที่ค่าความสว่างสีของวงกลม x และ y เท่ากัน เพราะเราสนใจวิธีให้สีที่ทุกส่วนมีสีต่างกัน

ดังนั้น วิธีที่สนใจ จะได้ทั้งหมด $254 \times 253 = 64262$ วิธี □

2.2. วงกลม 3 วง

จากค่าความสว่างสีของ $X - (Y \cup Z)$, ของ $Y - (X \cup Z)$, ของ $Z - (X \cup Y)$, ของ $(X \cap Y) - Z$, ของ $(Y \cap Z) - X$, ของ $(X \cap Z) - Y$ และ ของ $X \cap Y \cap Z$ ต้องต่างกันทั้งหมด ทำให้ได้ผลลัพธ์ดังนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 2.5 : สำหรับวงกลม 3 วง x, y และ z ค่า R_x, R_y และ R_z ไม่เป็น 0

บทพิสูจน์ พิจารณา $R_i, i = x, y, z$

ให้ $R_i = 0$ และ $j = x, y, z$ โดยที่ $j \neq i$

จะได้ว่า $R_i + R_j = 0 + R_j = R_j$

แสดงว่าส่วน $i \cap j$ เป็นสีเดียวกับส่วน j □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.6 : สำหรับวงกลม 3 วง x, y และ z ค่า R_x, R_y และ R_z ไม่เกิน 252

บทพิสูจน์ สมมติ R_x, R_y และ R_z ต่างกันทั้งหมด

สมมติ $R_x \geq 253$ หรือ $R_y \geq 253$ หรือ $R_z \geq 253$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $R_x \geq 253$

ค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้ของ R_y และ R_z เป็น 1 และ 2 เพราะ $R_x \neq R_y$

สมมติให้ $R_y = 1$ และ $R_z = 2$

ส่วน $(X \cap Z) - Y$ มีความเข้มสี $R_x + R_z \geq 253 + 2 = 255$

ดังนั้นค่าความสว่างสีของส่วน $(X \cap Z) - Y$ คือ $\min\{255, R_x + R_z\} = 255$

ส่วน $X \cap Y \cap Z$ มีความเข้มสี $R_x + R_y + R_z \geq 253 + 1 + 2 \geq 255$

ดังนั้นค่าความสว่างสีของส่วน $X \cap Y \cap Z$ คือ $\min\{255, R_x + R_y + R_z\} = 255$

สรุปได้ว่าส่วน $(X \cap Z) - Y$ และส่วน $X \cap Y \cap Z$ มีค่าความสว่างสีค่าเดียวกัน เกิดข้อขัดแย้ง

สรุปได้ว่า $R_x \leq 252$ และ $R_y \leq 252$ และ $R_z \leq 252$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.7 : สำหรับวงกลม 3 วง x, y และ z ค่า $R_x + R_y < 255, R_x + R_z < 255$ และ $R_y + R_z < 255$

บทพิสูจน์ สมมติ $R_x, R_y, R_z, R_x + R_y, R_x + R_z$ และ $R_y + R_z$ ต่างกันทั้งหมด

สมมติ $R_x + R_y \geq 255$ หรือ $R_x + R_z \geq 255$ หรือ $R_y + R_z \geq 255$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $R_x + R_y \geq 255$

ส่วน $(X \cap Y) - Z$ มีความเข้มสี $R_x + R_y \geq 255$

ดังนั้นค่าความสว่างสีของส่วน $(X \cap Y) - Z$ คือ $\min\{255, R_x + R_y\} = 255$

เนื่องจาก $R_z \geq 1$ ส่วน $X \cap Y \cap Z$ มีความเข้มสี $R_x + R_y + R_z \geq 255 + 1 \geq 255$

ดังนั้นค่าความสว่างสีของส่วน $X \cap Y \cap Z$ คือ $\min\{255, R_x + R_y + R_z\} = 255$

สรุปได้ว่าส่วน $(X \cap Y) - Z$ และส่วน $X \cap Y \cap Z$ มีค่าความสว่างสีค่าเดียวกัน เกิดข้อขัดแย้ง

สรุปได้ว่า $R_x + R_y < 255$ และ $R_x + R_z < 255$ และ $R_y + R_z < 255$ □

ให้ i เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $1 \leq i \leq 252$ กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์ (universe) $\mathcal{U}_i$ คือ เซตของชุดสี (R_x, R_y, R_z) ที่ $R_x = i, 1 \leq R_y, R_z \leq 252$ และ $R_x + R_y < 255$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.8 : สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ จะได้ว่า $|\mathcal{U}_i| = 8096508$

บทพิสูจน์ ให้เซต $\mathcal{U}_i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) | 1 \leq R_y, R_z \leq 252, R_x + R_y < 255, R_x = i\}$

จาก $R_x + R_y < 255$ และ $R_x = i$

จึงทำให้ได้ว่า $i + R_y < 255$

$$R_y < 255 - i$$

$$R_y \leq 254 - i$$

ดังนั้น $1 \leq R_y \leq \min\{252, 254 - i\}$

พิจารณาคู่ของ R_x และ R_y ทั้งหมด

เนื่องจาก $1 \leq R_y \leq \min\{252, 254 - i\}$ แบ่งได้ 2 กรณี ได้แก่

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1$ จะได้ $1 \leq R_y \leq 252$

ทำให้ได้ว่า จำนวนของ R_y สำหรับ $i = 1$ คือ $252 - 1 + 1 = 252$

จะได้ว่า จำนวนคู่ของ R_x และ R_y คือ 252 เมื่อ $i = 1$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 2, 3, 4, \dots, 252$ จะได้ $1 \leq R_y \leq 254 - i$

ทำให้ได้ว่า จำนวนของ R_y สำหรับ i ค่าหนึ่งคือ $(254 - i) - 1 + 1 = 254 - i$ เมื่อ $i =$

$2, 3, 4, \dots, 252$

จะได้ว่า จำนวนคู่ของ R_x และ R_y คือ $\sum_{i=2}^{252} (254 - i) = 252 + 251 + 250 + \dots + 2 = 31877$

เมื่อ $i = 2, 3, 4, \dots, 252$

ดังนั้น จำนวนคู่ของ R_x และ R_y จากทั้งสองกรณี คือ $252 + 31877 = 32129$

เนื่องจาก $1 \leq R_z \leq 252$

ทำให้ได้ว่า จำนวนของ R_z สำหรับคู่ของ R_x และ R_y คู่หนึ่งคือ $252 - 1 + 1 = 252$

เนื่องจากจำนวนคู่ของ R_x และ R_y คือ 32129 และ จำนวนของ R_z สำหรับ R_x และ R_y คู่ใดคู่

หนึ่ง คือ 252

ทำให้ $|\mathcal{U}_i| = 32129 \times 252 = 8096508$ □

ในการหาจำนวนการให้สีวงกลม 3 วงที่ตัดกันซึ่งทำให้ทุกบริเวณมีสีต่างกัน ชุดสี (R_x, R_y, R_z) ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข

1. ค่าความสว่างสี $R_x \neq R_y$
2. ค่าความสว่างสี $R_x \neq R_z$
3. ค่าความสว่างสี $R_y \neq R_z$

4. ค่าความสว่างสี $R_x + R_y \neq R_z$
5. ค่าความสว่างสี $R_x + R_z \neq R_y$
6. ค่าความสว่างสี $R_y + R_z \neq R_x$
7. ค่าความสว่างสี $R_x + R_z < 255$
8. ค่าความสว่างสี $R_y + R_z < 255$

สำหรับ $R_x = i$ กำหนดให้เซตของชุดสีที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าวคือ เซตของ $A_1^i, A_2^i, A_3^i, A_4^i, A_5^i, A_6^i, A_7^i$ และ A_8^i ตามลำดับ

จะได้ว่า เซต A_1^i คือ เซตของชุดสีใน $\mathcal{U}_i$ ที่ $R_x = R_y$

เซต A_2^i คือ เซตของชุดสีใน $\mathcal{U}_i$ ที่ $R_x = R_z$

เซต A_3^i คือ เซตของชุดสีใน $\mathcal{U}_i$ ที่ $R_y = R_z$

เซต A_4^i คือ เซตของชุดสีใน $\mathcal{U}_i$ ที่ $R_x + R_y = R_z$

เซต A_5^i คือ เซตของชุดสีใน $\mathcal{U}_i$ ที่ $R_x + R_z = R_y$

เซต A_6^i คือ เซตของชุดสีใน $\mathcal{U}_i$ ที่ $R_y + R_z = R_x$

เซต A_7^i คือ เซตของชุดสีใน $\mathcal{U}_i$ ที่ $R_x + R_z \geq 255$

เซต A_8^i คือ เซตของชุดสีใน $\mathcal{U}_i$ ที่ $R_y + R_z \geq 255$

จะทำให้ได้ว่า เซตของชุดสี (R_x, R_y, R_z) ที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขคือ $A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i$

ดังนั้น เซตของชุดสี (R_x, R_y, R_z) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขคือ $\mathcal{U}_i - (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i)$

วิธีการหาจำนวนสมาชิกใน $A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i$ โดยใช้หลักการเพิ่มเข้าตัดออก เริ่มจาก $|A_1^i \cup A_2^i| = |A_1^i| + |A_2^i| - |A_1^i \cap A_2^i|$

$$|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i| = |A_1^i \cup A_2^i| + |A_3^i| - |A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)|$$

$$|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| = |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i| + |A_4^i| - |A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)|$$

$$|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| = |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| + |A_5^i| - |A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)|$$

$$|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| + |A_6^i|$$

$$- |A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)|$$

$$\begin{aligned}
|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| \\
&- |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\
|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\
&+ |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)|
\end{aligned}$$

จากนั้นจึงหาจำนวนเซตของชุดสี่ที่ต้องการจาก $|\mathcal{U}_i - (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i)| = |\mathcal{U}_i| - |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ สำหรับ $i = R_x$ และหาผลรวมของจำนวนเซตของชุดสี่ทั้งหมดสำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 252$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.9 : สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต A_1^i คือ $\{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$ และ $|A_1^i| = 252$

บทพิสูจน์ ให้เซต A_1^i คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_y, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จะได้ว่า $1 \leq R_x, R_y, R_z \leq 252$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.7 จะได้ว่า $R_x + R_y < 255$

เนื่องจาก $R_x = R_y$

จึงทำให้ได้ว่า $i + i < 255$

$$2i < 255$$

$$i < \frac{255}{2}$$

$$i < 127.5$$

$$i \leq 127$$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 127$ และ $1 \leq R_y = i \leq 127$

ดังนั้น $A_1^i = \{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$

ทำให้ $|A_1^i| = 252$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.10 : สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_2^i คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$ และ $|A_2^i| = \min\{252, 254 - i\}$

บทพิสูจน์ ให้เซต A_2^i คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_z, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จะได้ว่า $1 \leq R_x, R_y, R_z \leq 252$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.7 จะได้ว่า $R_x + R_y < 255$

จึงทำให้ได้ว่า $i + R_y < 255$

$$R_y < 255 - i$$

$$\text{ดังนั้น } 1 \leq R_y \leq \min\{252, 254 - i\}$$

$$\text{ดังนั้น } A_2^i = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$$

$$\text{ทำให้ } |A_2^i| = \min\{252, 254 - i\}$$

□

ทฤษฎีบทประกอบ 2.11 : สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_3^i คือ $\{(i, j, j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$ และ $|A_3^i| = \min\{252, 254 - i\}$

บทพิสูจน์ ให้เซต A_3^i คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_y = R_z, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

$$\text{จากทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จะได้ว่า } 1 \leq R_x, R_y, R_z \leq 252$$

$$\text{และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.7 จะได้ว่า } R_x + R_y < 255$$

$$\text{จึงทำให้ได้ว่า } i + R_y < 255$$

$$R_y < 255 - i$$

$$\text{ดังนั้น } 1 \leq R_y \leq \min\{252, 254 - i\}$$

$$\text{เนื่องจาก } R_y = R_z$$

$$\text{จะได้ว่า } 1 \leq R_z \leq \min\{252, 254 - i\}$$

$$\text{ดังนั้น } A_3^i = \{(i, j, j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$$

$$\text{ทำให้ } |A_3^i| = \min\{252, 254 - i\}$$

□

ทฤษฎีบทประกอบ 2.12 : สำหรับ $1 \leq i \leq 251$ เซต A_4^i คือ $\{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}$ และ $|A_4^i| = 252 - i$

บทพิสูจน์ ให้เซต A_4^i คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_y = R_z, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

$$\text{จากทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จะได้ว่า } 1 \leq R_x, R_y, R_z \leq 252$$

$$\text{จาก } 1 \leq R_z \leq 252$$

$$\text{เนื่องจาก } R_x + R_y = R_z$$

$$\text{จะได้ว่า } 1 \leq R_x + R_y \leq 252$$

$$\text{พิจารณา } R_x + R_y \leq 252$$

$$R_y \leq 252 - i$$

$$\text{จะได้ว่า } 1 \leq R_y \leq 252 - i$$

ถ้า $R_x = 252$ ทำให้ได้ว่า $1 \leq R_y \leq 252 - 252 = 0$ เกิดข้อขัดแย้ง

จะได้ว่า $1 \leq R_x \leq 251$

ดังนั้น $A_4^i = \{(i, j, i+j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252-i\}$

ทำให้ $|A_4^i| = 252 - i$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.13 : สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต A_5^i คือ $\{(i, j, j-i) | j = i+1, i+2, i+3, \dots, 252\}$

และ $|A_5^i| = 252 - i$

บทพิสูจน์ ให้เซต A_5^i คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_z = R_y, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จะได้ว่า $1 \leq R_x, R_y, R_z \leq 252$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.7 จะได้ว่า $R_x + R_y < 255$

เนื่องจาก $R_y = R_x + R_z$

จะได้ว่า $R_y = i+1, i+2, i+3, \dots, 252$

ดังนั้น เราสามารถเขียน R_y ในรูป $R_y = 1 + D, D = 1, 2, 3, \dots, 252 - i$

เนื่องจาก $R_x + R_y < 255$

จึงทำให้ได้ว่า $i + i + D < 255$

$$2i + D < 255$$

$$2i < 255 - D$$

$$i < \frac{255-D}{2}$$

$$i < \frac{255-1}{2} \text{ เนื่องจาก } \frac{255-D}{2} \text{ มีค่าสูงสุดเมื่อ } D = 1$$

$$i < \frac{254}{2}$$

$$i < 127$$

$$i \leq 126$$

ดังนั้น $1 \leq R_x = i \leq 126$ และ $i+1 \leq R_y \leq 252$

เนื่องจาก $R_y = R_x + R_z$

จาก $i+1 \leq R_y \leq 252$

$$i+1-i \leq R_y = R_x \leq 252-i$$

จะได้ว่า $1 \leq R_z \leq 252-i$ ดังนั้น $1 \leq R_z \leq 252$ ตามต้องการ

ดังนั้น $A_5^i = \{(i, j, j-i) | j = i+1, i+2, i+3, \dots, 252\}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 126$

ทำให้ $|A_5^i| = 252 - i$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.14 : สำหรับ $2 \leq i \leq 252$ เซต A_6^i คือ $\{(i, j, i-j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{126, i-1\}\}$ และ $|A_6^i| = \min\{126, i-1\}$

บทพิสูจน์ ให้เซต A_6^i คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_y + R_z = R_x, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จะได้ว่า $1 \leq R_x, R_y, R_z \leq 252$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.7 จะได้ว่า $R_x + R_y < 255$

เนื่องจาก $R_x = R_y + R_z$

จะได้ว่า $R_x = R_y + 1, R_y + 2, R_y + 3, \dots, 252$

ดังนั้น เราสามารถเขียน R_x ในรูป $R_x = R_y + D, D = 1, 2, 3, \dots, 252 - R_y$

เนื่องจาก $R_x + R_y < 255$

จึงทำให้ได้ว่า $R_y + D + R_y < 255$

$$2R_y + D < 255$$

$$2R_y < 255 - D$$

$$R_y < \frac{255-D}{2}$$

$$R_y < \frac{255-1}{2} \text{ เนื่องจาก } \frac{255-D}{2} \text{ มีค่าสูงสุดเมื่อ } D = 1$$

$$R_y < \frac{254}{2}$$

$$R_y < 127$$

$$R_y \leq 126$$

ดังนั้น $1 \leq R_y \leq 126$ และ $2 \leq R_x \leq 252$

เนื่องจาก $R_y + R_z = R_x$

จาก $R_y + 1 \leq R_x \leq 252$

$$R_y + 1 - R_y \leq R_x - R_y \leq 252 - R_y$$

$$1 \leq R_x - R_y \leq 252 - R_y$$

จะได้ว่า $1 \leq R_z \leq 252 - R_y$

จาก $1 \leq R_x - R_y$

$$R_y \leq R_x - 1$$

$$R_y \leq i - 1$$

จึงทำให้ได้ว่า $1 \leq R_y \leq i - 1$

จะได้ว่า $1 \leq R_y \leq \min\{126, i - 1\}$

ดังนั้น $A_6^i = \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{126, i - 1\}\}$ สำหรับ $i = 2, 3, 4, \dots, 252$

ทำให้ $|A_6^i| = \min\{126, i - 1\}$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.15 : สำหรับ $3 \leq i \leq 252$ เซต A_7^i คือ $\{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$ และ $|A_7^i| = (254 - i)(i - 2)$

บทพิสูจน์ ให้เซต A_7^i คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จะได้ว่า $1 \leq R_x, R_y, R_z \leq 252$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.7 จะได้ว่า $R_x + R_y < 255$

เนื่องจาก $R_x + R_z \geq 255$

จึงทำให้ได้ว่า $R_z \geq 255 - R_x$

$$R_z \geq 255 - i$$

จะได้ว่า $255 - i \leq R_z \leq 252$

พิจารณา $255 - i \leq 252$

$$255 - 252 \leq i$$

$$3 \leq i$$

เนื่องจาก $1 \leq R_x = i \leq 252$ จะได้ว่า $3 \leq R_x = i \leq 252$

เนื่องจาก $R_x + R_y < 255$

จึงทำให้ได้ว่า $i + R_y < 255$

$$R_y < 255 - i$$

$$R_y \leq 254 - i$$

จะได้ว่า $1 \leq R_y \leq 254 - i, i = 3, 4, 5, \dots, 252$

เนื่องจาก $255 - i \leq R_z \leq 252$

จำนวนของค่า R_z คือ $252 - (255 - i) + 1 = i - 2$ สำหรับคู่ของ $R_x = i$ และ $R_y = j$ คู่หนึ่ง

เมื่อ $i = 3, 4, 5, \dots, 252$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i$

ดังนั้น $A_7^i = \{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$ สำหรับ $i =$

$3, 4, 5, \dots, 252$

เนื่องจากจำนวนของ R_y ที่แตกต่างกัน คือ $254 - i$ และจำนวนของ R_z สำหรับ $|R_y|$ ตัวใดตัวหนึ่งคือ $i - 2$

$$\text{ทำให้ } |A_7^i| = (254 - i)(i - 2), i = 3, 4, 5, \dots, 252 \quad \square$$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.16 : สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_8^i คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\} \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}$, $|A_8^i|$ สำหรับ $i = 1$ คือ 31375 และ $|A_8^i|$ สำหรับ $i = 2, 3, 4, \dots, 252$ คือ $\frac{(252-i)(253-i)}{2}$

บทพิสูจน์ ให้เซต A_8^i คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_y + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.6 จะได้ว่า $1 \leq R_x, R_y, R_z \leq 252$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.7 จะได้ว่า $R_x + R_y < 255$

จึงทำให้ได้ว่า $i + R_y < 255$

$$R_y < 255 - i$$

$$R_y \leq 254 - i$$

ดังนั้น $1 \leq R_y \leq \min\{252, 254 - i\}$

เนื่องจาก $R_y + R_z \geq 255$

จึงทำให้ได้ว่า $R_z \geq 255 - R_y$

ดังนั้น $255 - R_y \leq R_z \leq 252$

จำนวน R_z สำหรับ $R_y = j$ ค่าหนึ่งคือ $252 - (255 - j) + 1 = j - 2$

จะได้ว่า $j - 2 > 0$

$$j > 2$$

$$j \geq 3$$

ทำให้ได้ว่า จำนวนของ R_z สำหรับ j ค่าหนึ่งคือ $j - 2$ เมื่อ $j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\}$

ดังนั้น $A_8^i = \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\} \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}$

จำนวนของค่า R_z ที่เป็นไปได้ สำหรับ j ค่าหนึ่งคือ $j - 2$

$$\text{จะได้ } |A_8^i| = \sum_{j=3}^{\min\{252, 254-i\}} (j - 2) \text{ แบ่งได้ 2 กรณี ได้แก่}$$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1$ จะได้จำนวนของ R_z สำหรับ j ค่าหนึ่งคือ $j - 2$ เมื่อ $j = 3, 4, 5, \dots, 252$

$$\text{จะได้ว่า } |A_8^1| = \sum_{j=3}^{252} (j - 2) = 1 + 2 + 3 + \dots + 250 = 31375$$

ดังนั้น $|A_8^i|$ สำหรับ $i = 1$ คือ 31375

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 2, 3, 4, \dots, 252$ จะได้จำนวนของ R_z สำหรับ j ค่าหนึ่งคือ $j - 2$ เมื่อ $j = 3, 4, 5, \dots, 254 - i$

$$\text{จะได้ว่า } |A_8^i| = \sum_{j=3}^{254-i} (j - 2) = 1 + 2 + 3 + \dots + 252 - i$$

ใช้ทฤษฎีบท 1.7 โดย $a_1 = 1, a_n = 252 - i$ และ $n = 252 - i$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 252 - i &= \left(\frac{n}{2}\right) (a_1 + a_n) \\ &= \left(\frac{252-i}{2}\right) [1 + (252 - i)] \\ &= \frac{(252-i)(253-i)}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_8^i|$ สำหรับ $i = 2, 3, 4, \dots, 252$ คือ $\frac{(252-i)(253-i)}{2}$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.17 : สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต $A_1^i \cap A_2^i$ คือ $\{(i, i, i)\}$, $|A_1^i \cap A_2^i| = 1$ และสำหรับ $128 \leq i \leq 252$ เซต $A_1^i \cap A_2^i$ คือ $\emptyset$, $|A_1^i \cap A_2^i| = 0$

บทพิสูจน์ ให้เซต $A_1^i \cap A_2^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_y = R_z, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.9 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต A_1^i คือ $\{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$ และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.10 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_2^i คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 127, R_y = i = j$ และ $R_z = k = i$

เนื่องจาก $i = j = k$ จึงได้ว่า $1 \leq i = j = k \leq 127$

ดังนั้น $A_1^i \cap A_2^i = \{(i, i, i)\}, i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $A_1^i \cap A_2^i = \emptyset, i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ทำให้ $|A_1^i \cap A_2^i| = 1, i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $|A_1^i \cap A_2^i| = 0, i = 128, 129, 130, \dots, 252$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.18 : $|A_1^i \cup A_2^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ คือ $251 + \min\{252, 254 - i\}$ และ $|A_1^i \cup A_2^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 252$ คือ $254 - i$

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.9 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต A_1^i คือ $\{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$ และ $|A_1^i| = 252$

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.10 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_2^i คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$ และ $|A_2^i| = \min\{252, 254 - i\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.17 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต $A_1^i \cap A_2^i$ คือ $\{(i, i, i)\}$ และ $|A_1^i \cap A_2^i| = 1$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i| = 252, |A_2^i| = \min\{252, 254 - i\}$ และ $|A_1^i \cap A_2^i| = 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i| &= |A_1^i| + |A_2^i| - |A_1^i \cap A_2^i| \\ &= 252 + \min\{252, 254 - i\} - 1 \\ &= 251 + \min\{252, 254 - i\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ คือ $251 + \min\{252, 254 - i\}$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 252$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i| = 0, |A_2^i| = 254 - i$ และ $|A_1^i \cap A_2^i| = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i| &= |A_1^i| + |A_2^i| - |A_1^i \cap A_2^i| \\ &= 0 + 254 - i - 0 \\ &= 254 - i \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 252$ คือ $254 - i$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.19 : สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต $A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)$ คือ $\{(i, i, i)\}$ และ $|A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)| = 1$

บทพิสูจน์ พิจารณาเซต $A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)$ ในรูป $(A_1^i \cap A_3^i) \cup (A_2^i \cap A_3^i)$

ให้เซต $A_1^i \cap A_3^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_y = R_z, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.9 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต A_1^i คือ $\{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$ และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.11 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_3^i คือ $\{(i, j, j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 127, R_y = i = j$ และ $R_z = k = j$

เนื่องจาก $i = j = k$ จึงได้ว่า $1 \leq i = j = k \leq 127$

ดังนั้น $A_1^i \cap A_3^i = \{(i, i, i)\}, i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $A_1^i \cap A_3^i = \emptyset, i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ทำให้ $|A_1^i \cap A_3^i| = 1, i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $|A_1^i \cap A_3^i| = 0, i = 128, 129, 130, \dots, 252$

และให้เซต $A_2^i \cap A_3^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_y = R_z, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.10 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_2^i คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.11 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_3^i คือ $\{(i, j, j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 252$, $R_y = j$ และ $R_z = i = j$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $1 \leq i = j \leq 252$

ดังนั้น $A_2^i \cap A_3^i = \{(i, i, i)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 252$

ทำให้ $|A_2^i \cap A_3^i| = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, 252$

พิจารณาเซต $(A_1^i \cap A_3^i) \cup (A_2^i \cap A_3^i)$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i) &= (A_1^i \cap A_3^i) \cup (A_2^i \cap A_3^i) \\ &= \{(i, i, i)\} \cup \{(i, i, i)\} \\ &= \{(i, i, i)\} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i) &= (A_1^i \cap A_3^i) \cup (A_2^i \cap A_3^i) \\ &= \emptyset \cup \{(i, i, i)\} \\ &= \{(i, i, i)\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i) = \{(i, i, i)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 252$

ทำให้ $|A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)| = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, 252$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.20 : $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ คือ $250 + 2\min\{252, 254 - i\}$

และ $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 252$ คือ $507 - 2i$

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.18 จะได้ว่า $|A_1^i \cup A_2^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ คือ $251 + \min\{252, 254 - i\}$ และ $|A_1^i \cup A_2^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 252$ คือ $254 - i$

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.11 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_3^i คือ $\{(i, j, j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$ และ $|A_3^i| = \min\{252, 254 - i\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.19 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต $A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)$ คือ $\{(i, i, i)\}$ และ $|A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)| = 1$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i| = 251 + \min\{252, 254 - i\}$, $|A_3^i| = \min\{252, 254 - i\}$ และ $|A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)| = 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i| &= |A_1^i \cup A_2^i| + |A_3^i| - |A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)| \\ &= 251 + \min\{252, 254 - i\} + \min\{252, 254 - i\} - 1 \\ &= 250 + 2\min\{252, 254 - i\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ คือ $250 + 2\min\{252, 254 - i\}$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 252$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i| = 254 - i$, $|A_3^i| = 254 - i$ และ $|A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)| = 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i| &= |A_1^i \cup A_2^i| + |A_3^i| - |A_3^i \cap (A_1^i \cup A_2^i)| \\ &= 254 - i + 254 - i - 1 \\ &= 507 - 2i \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 252$ คือ $507 - 2i$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.21 : สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต $A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)$ คือ $\{(i, i, 2i)\}$, $|A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| = 1$ และสำหรับ $128 \leq i \leq 252$ เซต $A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)$ คือ $\emptyset$, $|A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| = 0$

บทพิสูจน์ พิจารณาเซต $A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)$ ในรูป $(A_1^i \cap A_4^i) \cup (A_2^i \cap A_4^i) \cup (A_3^i \cap A_4^i)$

ให้เซต $A_1^i \cap A_4^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_y, R_x + R_y = R_z, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.9 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต A_1^i คือ $\{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$ และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.12 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 251$ เซต A_4^i คือ $\{(i, j, i+j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}$

$$\text{จะได้ว่า } 1 \leq R_x = i \leq 127, R_y = i = j \text{ และ } R_z = k = i + j$$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $k = 2i$

ดังนั้น $A_1^i \cap A_4^i = \{(i, i, 2i)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $A_1^i \cap A_4^i = \emptyset$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ทำให้ $|A_1^i \cap A_4^i| = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $|A_1^i \cap A_4^i| = 0$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ให้เซต $A_2^i \cap A_4^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_z, R_x + R_y = R_z, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.10 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_2^i คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.12 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 251$ เซต A_4^i คือ $\{(i, j, i+j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252-i\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 251$, $R_y = j$ และ $R_z = i = i+j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i \neq i+j$ เสมอ

ดังนั้น $A_2^i \cap A_4^i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3, \dots, 251$ และ $A_2^i \cap A_4^i = \emptyset$, $i = 252$

ทำให้ $|A_2^i \cap A_4^i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, 251$ และ $|A_2^i \cap A_4^i| = 0$, $i = 252$

และให้เซต $A_3^i \cap A_4^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_y = R_z, R_x + R_y = R_z, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.11 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_3^i คือ $\{(i, j, j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254-i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.12 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 251$ เซต A_4^i คือ $\{(i, j, i+j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252-i\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 251$, $R_y = j$ และ $R_z = j = i+j$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq i+j$ เสมอ

ดังนั้น $A_3^i \cap A_4^i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3, \dots, 251$ และ $A_3^i \cap A_4^i = \emptyset$, $i = 252$

ทำให้ $|A_3^i \cap A_4^i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, 251$ และ $|A_3^i \cap A_4^i| = 0$, $i = 252$

พิจารณาเซต $(A_1^i \cap A_4^i) \cup (A_2^i \cap A_4^i) \cup (A_3^i \cap A_4^i)$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i) &= (A_1^i \cap A_4^i) \cup (A_2^i \cap A_4^i) \cup (A_3^i \cap A_4^i) \\ &= \{(i, i, 2i)\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \{(i, i, 2i)\} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i) &= (A_1^i \cap A_4^i) \cup (A_2^i \cap A_4^i) \cup (A_3^i \cap A_4^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

กรณีที่ 3 สำหรับ $i = 252$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i) &= (A_1^i \cap A_4^i) \cup (A_2^i \cap A_4^i) \cup (A_3^i \cap A_4^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \end{aligned}$$

$$= \emptyset$$

ดังนั้น $A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i) = \{(i, i, 2i)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i) = \emptyset$,
 $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ทำให้ $|A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $|A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| = 0$,
 $i = 128, 129, 130, \dots, 252$ $\square$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.22 :

1. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ คือ $501 - i + 2\min\{252, 254 - i\}$
2. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ คือ $759 - 3i$
3. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 3

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.20 จะได้ว่า $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ คือ $250 + 2\min\{252, 254 - i\}$ และ $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 252$ คือ $507 - 2i$

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.12 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 251$ เซต A_4^i คือ $\{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}$ และ $|A_4^i| = 252 - i$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.21 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต $A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)$ คือ $\{(i, i, 2i)\}$, $|A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| = 1$ และสำหรับ $128 \leq i \leq 252$ เซต $A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)$ คือ $\emptyset$, $|A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| = 0$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i| = 250 + 2\min\{252, 254 - i\}$, $|A_4^i| = 252 - i$ และ $|A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| = 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i| + |A_4^i| - |A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| \\ &= 250 + 2\min\{252, 254 - i\} + 252 - i - 1 \\ &= 501 - i + 2\min\{252, 254 - i\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ คือ $501 - i + 2\min\{252, 254 - i\}$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i| = 507 - 2i$, $|A_4^i| = 252 - i$ และ $|A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i| + |A_4^i| - |A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| \\ &= 507 - 2i + 252 - i - 0 \end{aligned}$$

$$= 759 - 3i$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ คือ $759 - 3i$

กรณีที่ 3 สำหรับ $i = 252$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i| = 507 - 2i = 3$, $|A_4^i| = 0$ และ $|A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i| + |A_4^i| - |A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| \\ &= 3 + 0 - 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 3 □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.23: สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต $A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)$ คือ $\{(i, 2i, i)\}$, $|A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| = 1$ และ สำหรับ $127 \leq i \leq 252$ เซต $A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)$ คือ $\emptyset$, $|A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| = 0$

บทพิสูจน์ พิจารณาเซต $A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)$ ในรูป $(A_1^i \cap A_5^i) \cup (A_2^i \cap A_5^i) \cup (A_3^i \cap A_5^i) \cup (A_4^i \cap A_5^i)$

ให้เซต $A_1^i \cap A_5^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_y, R_x + R_z = R_y, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.9 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต A_1^i คือ $\{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$ และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.13 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต A_5^i คือ $\{(i, j, j - i) | j = i + 1, i + 2, i + 3, \dots, 252\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 126$, $R_y = i = j$ และ $R_z = k = j - i$

เนื่องจาก $j = i + 1, i + 2, i + 3, \dots, 252$ จึงได้ว่า $j \neq i$ เสมอ

ดังนั้น $A_1^i \cap A_5^i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ และ $A_1^i \cap A_5^i = \emptyset$, $i = 127$ และ $A_1^i \cap A_5^i = \emptyset$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ทำให้ $|A_1^i \cap A_5^i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ และ $|A_1^i \cap A_5^i| = 0$, $i = 127$ และ $|A_1^i \cap A_5^i| = 0$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ให้เซต $A_2^i \cap A_5^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_z, R_x + R_z = R_y, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.10 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_2^i คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.13 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต A_5^i คือ $\{(i, j, j-i) | j = i+1, i+2, i+3, \dots, 252\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 126$, $R_y = j$ และ $R_z = i = j - i$

เนื่องจาก $j - i = i$ จึงได้ว่า $j = 2i$

ดังนั้น $A_2^i \cap A_5^i = \{(i, 2i, i)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ และ $A_2^i \cap A_5^i = \emptyset$, $i = 127, 128, 139, \dots, 252$

ทำให้ $|A_2^i \cap A_5^i| = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ และ $|A_2^i \cap A_5^i| = 0$, $i = 127, 128, 139, \dots, 252$

ให้เซต $A_3^i \cap A_5^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_y = R_z, R_x + R_z = R_y, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.11 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_3^i คือ $\{(i, j, j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.13 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต A_5^i คือ $\{(i, j, j-i) | j = i+1, i+2, i+3, \dots, 252\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 126$, $R_y = j$ และ $R_z = j = j - i$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq j - i$ เสมอ

ดังนั้น $A_3^i \cap A_5^i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ และ $A_3^i \cap A_5^i = \emptyset$, $i = 127, 128, 139, \dots, 252$

ทำให้ $|A_3^i \cap A_5^i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ และ $|A_3^i \cap A_5^i| = 0$, $i = 127, 128, 139, \dots, 252$

และให้เซต $A_4^i \cap A_5^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_y = R_z, R_x + R_z = R_y, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.12 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 251$ เซต A_4^i คือ $\{(i, j, i+j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.13 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต A_5^i คือ $\{(i, j, j-i) | j = i+1, i+2, i+3, \dots, 252\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 126$, $R_y = j$ และ $R_z = i + j = j - i$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $i + j \neq j - i$ เสมอ

ดังนั้น $A_4^i \cap A_5^i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ และ $A_4^i \cap A_5^i = \emptyset$, $i = 127, 128, 139, \dots, 251$ และ $A_4^i \cap A_5^i = \emptyset$, $i = 252$

ทำให้ $|A_4^i \cap A_5^i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ และ $|A_4^i \cap A_5^i| = 0$, $i = 127, 128, 139, \dots, 251$ และ $|A_4^i \cap A_5^i| = 0$, $i = 252$

พิจารณาเซต $(A_1^i \cap A_5^i) \cup (A_2^i \cap A_5^i) \cup (A_3^i \cap A_5^i) \cup (A_4^i \cap A_5^i)$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 126$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i) &= (A_1^i \cap A_5^i) \cup (A_2^i \cap A_5^i) \cup (A_3^i \cap A_5^i) \cup (A_4^i \cap A_5^i) \\ &= \emptyset \cup \{(i, 2i, i)\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \{(i, 2i, i)\} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 127$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i) &= (A_1^i \cap A_5^i) \cup (A_2^i \cap A_5^i) \cup (A_3^i \cap A_5^i) \cup (A_4^i \cap A_5^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

กรณีที่ 3 สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i) &= (A_1^i \cap A_5^i) \cup (A_2^i \cap A_5^i) \cup (A_3^i \cap A_5^i) \cup (A_4^i \cap A_5^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

กรณีที่ 4 สำหรับ $i = 252$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i) &= (A_1^i \cap A_5^i) \cup (A_2^i \cap A_5^i) \cup (A_3^i \cap A_5^i) \cup (A_4^i \cap A_5^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

ดังนั้น $A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i) = \{(i, i, 2i)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ และ $A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i) = \emptyset$, $i = 127, 128, 129, \dots, 252$

ทำให้ $|A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ และ $|A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| = 0$, $i = 127, 128, 129, \dots, 252$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.24 :

1. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ คือ $752 - 2i + 2\min\{252, 254 - i\}$
2. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 628
3. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ คือ $759 - 3i$
4. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 3

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.22 จะได้ว่า

1. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ คือ $501 - i + 2\min\{252, 254 - i\}$
2. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ คือ $759 - 3i$
3. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 3

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.13 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต A_5^i คือ $\{(i, j, j - i) | j = i + 1, i + 2, i + 3, \dots, 252\}$ และ $|A_5^i| = 252 - i$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.23 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต $A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)$ คือ $\{(i, 2i, i)\}$, $|A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| = 1$ และ สำหรับ $127 \leq i \leq 252$ เซต $A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)$ คือ $\emptyset$, $|A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| = 0$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| = 501 - i + 2\min\{252, 254 - i\}$, $|A_5^i| = 252 - i$ และ $|A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| = 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| + |A_5^i| - |A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| \\ &= 501 - i + 2\min\{252, 254 - i\} + 252 - i - 1 \\ &= 752 - 2i + 2\min\{252, 254 - i\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ คือ $752 - 2i + 2\min\{252, 254 - i\}$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 127$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| = 501 - i + 2\min\{252, 254 - i\} = 628$, $|A_5^i| = 0$ และ $|A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| + |A_5^i| - |A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| \\ &= 628 + 0 - 0 \\ &= 628 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 628

กรณีที่ 3 สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| = 759 - 3i$, $|A_5^i| = 0$ และ $|A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| + |A_5^i| - |A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| \\ &= 759 - 3i + 0 - 0 \\ &= 759 - 3i \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ คือ $759 - 3i$

กรณีที่ 4 สำหรับ $i = 252$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| = 3$, $|A_4^i| = 0$ และ $|A_4^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i)| = 0$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i| + |A_5^i| - |A_5^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i)| \\ &= 3 + 0 - 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 3 □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.25 : เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 1, 3, 5, \dots, 251$ เซต $A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)$ คือ $\emptyset$, $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 0$ และ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 252$ เซต $A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)$ คือ $\{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\}$, $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 1$

บทพิสูจน์ พิจารณาเซต $A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)$ ในรูป $(A_1^i \cap A_6^i) \cup (A_2^i \cap A_6^i) \cup (A_3^i \cap A_6^i) \cup (A_4^i \cap A_6^i) \cup (A_5^i \cap A_6^i)$

ให้เซต $A_1^i \cap A_6^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_y, R_y + R_z = R_x, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.9 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต A_1^i คือ $\{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$ และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.14 จะได้ว่า สำหรับ $2 \leq i \leq 252$ เซต A_6^i คือ $\{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 126\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 127$, $R_y = i = j$ และ $R_z = k = i - j$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $R_z = 0$ แต่ R_z อยู่ระหว่าง 1 ถึง 252

ดังนั้น $A_1^i \cap A_6^i = \emptyset$, $i = 1$ และ $A_1^i \cap A_6^i = \emptyset$, $i = 2, 3, 4, \dots, 127$ และ $A_1^i \cap A_6^i = \emptyset$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ทำให้ $|A_1^i \cap A_6^i| = 0$, $i = 1$ และ $|A_1^i \cap A_6^i| = 0$, $i = 2, 3, 4, \dots, 127$ และ $|A_1^i \cap A_6^i| = 0$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ให้เซต $A_2^i \cap A_6^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_z, R_y + R_z = R_x, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.10 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_2^i คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.14 จะได้ว่า สำหรับ $2 \leq i \leq 252$ เซต A_6^i คือ $\{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 126\}$

จะได้ว่า $2 \leq R_x = i \leq 252$, $R_y = j$ และ $R_z = i - j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i - j \neq i$ เสมอ

ดังนั้น $A_2^i \cap A_6^i = \emptyset$, $i = 1$ และ $A_2^i \cap A_6^i = \emptyset$, $i = 2, 3, 4, \dots, 252$

ทำให้ $|A_2^i \cap A_6^i| = 0$, $i = 1$ และ $|A_2^i \cap A_6^i| = 0$, $i = 2, 3, 4, \dots, 252$

ให้เซต $A_3^i \cap A_6^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_y = R_z, R_y + R_z = R_x, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.11 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_3^i คือ $\{(i, j, j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.14 จะได้ว่า สำหรับ $2 \leq i \leq 252$ เซต A_6^i คือ $\{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 126\}$

จะได้ว่า $2 \leq R_x = i \leq 252$, $R_y = j$ และ $R_z = j = i - j$

เนื่องจาก $i - j = j$ จึงได้ว่า $j = \frac{i}{2}$

กรณีที่ 1 $A_3^i \cap A_6^i = \{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\}$, เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 252$

กรณีที่ 2 $A_3^i \cap A_6^i = \emptyset$, เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 251$

ดังนั้น $A_3^i \cap A_6^i = \emptyset$, $i = 1$ และ $A_3^i \cap A_6^i = \{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 252$ และ $A_3^i \cap A_6^i = \emptyset$, เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 251$

ทำให้ $|A_3^i \cap A_6^i| = 0$, $i = 1$ และ $|A_3^i \cap A_6^i| = 1$, เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 252$ และ $|A_3^i \cap A_6^i| = 0$, เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 251$

ให้เซต $A_4^i \cap A_6^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_y = R_z, R_y + R_z = R_x, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.12 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 251$ เซต A_4^i คือ $\{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.14 จะได้ว่า สำหรับ $2 \leq i \leq 252$ เซต A_6^i คือ $\{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 126\}$

จะได้ว่า $2 \leq R_x = i \leq 251$, $R_y = j$ และ $R_z = i + j = i - j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i + j \neq i - j$ เสมอ

ดังนั้น $A_4^i \cap A_6^i = \emptyset$, $i = 1$ และ $A_4^i \cap A_6^i = \emptyset$, $i = 2, 3, 4, \dots, 251$ และ $A_4^i \cap A_6^i = \emptyset$,
 $i = 252$

ทำให้ $|A_4^i \cap A_6^i| = 0$, $i = 1$ และ $|A_4^i \cap A_6^i| = 0$, $i = 2, 3, 4, \dots, 251$ และ $|A_4^i \cap A_6^i| = 0$,
 $i = 252$

และให้เซต $A_5^i \cap A_6^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_z = R_y, R_y + R_z = R_x, R_x = i\}$ จะ
พิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.13 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต A_5^i คือ $\{(i, j, j - i) | j =$
 $i + 1, i + 2, i + 3, \dots, 252\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.14 จะได้ว่า สำหรับ $2 \leq i \leq 252$ เซต A_6^i คือ $\{(i, j, i - j) | j =$
 $1, 2, 3, \dots, 126\}$

จะได้ว่า $2 \leq R_x = i \leq 126$, $R_y = j$ และ $R_z = i - j = j - i$

เนื่องจาก $i - j = j - i$ จึงได้ว่า $i = j$

จะได้ว่า $R_z = 0$ แต่ R_z อยู่ระหว่าง 1 ถึง 252

ดังนั้น $A_5^i \cap A_6^i = \emptyset$, $i = 1$ และ $A_5^i \cap A_6^i = \emptyset$, $i = 2, 3, 4, \dots, 126$ และ $A_5^i \cap A_6^i = \emptyset$,
 $i = 127, 128, 129, \dots, 252$

ทำให้ $|A_5^i \cap A_6^i| = 0$, $i = 1$ และ $|A_5^i \cap A_6^i| = 0$, $i = 2, 3, 4, \dots, 126$ และ $|A_5^i \cap A_6^i| = 0$,
 $i = 127, 128, 129, \dots, 252$

พิจารณาเซต $(A_1^i \cap A_6^i) \cup (A_2^i \cap A_6^i) \cup (A_3^i \cap A_6^i) \cup (A_4^i \cap A_6^i) \cup (A_5^i \cap A_6^i)$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i) &= (A_1^i \cap A_6^i) \cup (A_2^i \cap A_6^i) \cup (A_3^i \cap A_6^i) \cup \\ &\quad (A_4^i \cap A_6^i) \cup (A_5^i \cap A_6^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 126$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i) &= (A_1^i \cap A_6^i) \cup (A_2^i \cap A_6^i) \cup (A_3^i \cap A_6^i) \cup \\ &\quad (A_4^i \cap A_6^i) \cup (A_5^i \cap A_6^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\} \end{aligned}$$

กรณีที 3 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 125$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i) &= (A_1^i \cap A_6^i) \cup (A_2^i \cap A_6^i) \cup (A_3^i \cap A_6^i) \cup \\ &\quad (A_4^i \cap A_6^i) \cup (A_5^i \cap A_6^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

กรณีที 4 สำหรับ $i = 127$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i) &= (A_1^i \cap A_6^i) \cup (A_2^i \cap A_6^i) \cup (A_3^i \cap A_6^i) \cup \\ &\quad (A_4^i \cap A_6^i) \cup (A_5^i \cap A_6^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

กรณีที 5 สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 250$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i) &= (A_1^i \cap A_6^i) \cup (A_2^i \cap A_6^i) \cup (A_3^i \cap A_6^i) \cup \\ &\quad (A_4^i \cap A_6^i) \cup (A_5^i \cap A_6^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\} \end{aligned}$$

กรณีที 6 สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 251$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i) &= (A_1^i \cap A_6^i) \cup (A_2^i \cap A_6^i) \cup (A_3^i \cap A_6^i) \cup \\ &\quad (A_4^i \cap A_6^i) \cup (A_5^i \cap A_6^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

กรณีที 7 สำหรับ $i = 252$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i) &= (A_1^i \cap A_6^i) \cup (A_2^i \cap A_6^i) \cup (A_3^i \cap A_6^i) \cup \\ &\quad (A_4^i \cap A_6^i) \cup (A_5^i \cap A_6^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i) = \emptyset$, เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 1, 3, 5, \dots, 251$
และ $A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i) = \{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\}$, เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 252$

ทำให้ $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 0$, เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 1, 3, 5, \dots, 251$

และ $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 1$, เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 252$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.26 :

1. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ สำหรับ $i = 1$ คือ 1254
2. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 126$ คือ $1258 - 3i$
3. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 125$ คือ $1259 - 3i$
4. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 754
5. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 250$ คือ $884 - 3i$
6. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 251$ คือ $885 - 3i$
7. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 128

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.24 จะได้ว่า

1. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 126$ คือ $752 - 2i + 2\min\{252, 254 - i\}$
2. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 628
3. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ คือ $759 - 3i$
4. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 3

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.14 จะได้ว่า สำหรับ $2 \leq i \leq 252$ เซต A_6^i คือ $\{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 126\}$ และ $|A_6^i| = \min\{126, i - 1\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.25 จะได้ว่า เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 1, 3, 5, \dots, 251$ เซต $A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)$ คือ $\emptyset$, $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 0$ และ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 252$ เซต $A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)$ คือ $\{(i, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})\}$, $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 1$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| = 752 - 2i + 2\min\{252, 254 - i\} = 752 - 2 + 2(252) = 1254$, $|A_6^i| = 0$ และ $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 0$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| + |A_6^i| - |A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| \\ &= 1254 + 0 - 0 \\ &= 1254 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ สำหรับ $i = 1$ คือ 1254

กรณีที่ 2 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 126$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| = 752 - 2i + 2(254 - i) = 1260 - 4i$, $|A_6^i| = i - 1$ และ $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 1$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| + |A_6^i| - |A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| \\ &= 1260 - 4i + i - 1 - 1 \\ &= 1258 - 3i \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 126$ คือ $1258 - 3i$

กรณีที่ 3 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 125$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| = 752 - 2i + 2(254 - i)$, $|A_6^i| = i - 1$ และ $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 0$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| + |A_6^i| - |A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| \\ &= 1260 - 4i + i - 1 - 0 \\ &= 1259 - 3i \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 125$ คือ $1259 - 3i$

กรณีที่ 4 สำหรับ $i = 127$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| = 628$, $|A_6^i| = i - 1 = 126$ และ $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 0$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| + |A_6^i| - |A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| \\ &= 628 + 126 - 0 \end{aligned}$$

$$= 754$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 754

กรณีที 5 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 250$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| = 759 - 3i$, $|A_6^i| = 126$ และ $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 1$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| + |A_6^i| - |A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| \\ &= 759 - 3i + 126 - 1 \\ &= 884 - 3i \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 250$ คือ $884 - 3i$

กรณีที 6 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 251$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| = 759 - 3i$, $|A_6^i| = 126$ และ $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 0$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| + |A_6^i| - |A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| \\ &= 759 - 3i + 126 - 0 \\ &= 885 - 3i \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 251$ คือ $885 - 3i$

กรณีที 7 สำหรับ $i = 252$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| = 3$, $|A_6^i| = 126$ และ $|A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| = 1$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i| + |A_6^i| - |A_6^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i)| \\ &= 3 + 126 - 1 \\ &= 128 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 128 □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.27 :

1. สำหรับ $i = 1, 2$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\emptyset$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 0$

2. สำหรับ $i = 3, 4, 5, \dots, 84$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i - 4$
3. สำหรับ $i = 85, 86, 87, \dots, 126$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i - 46$
4. สำหรับ $i = 127$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 250$
5. สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 169$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, i-j) | j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 251$
6. สำหรับ $i = 170, 171, 172, \dots, 251$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, i-j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 760 - 3i$
7. สำหรับ $i = 252$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i-j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 4$

บทพิสูจน์ พิจารณาเซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ ในรูป $(A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_3^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_5^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i)$

ให้เซต $A_1^i \cap A_7^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_y, R_x + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.9 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต A_1^i คือ $\{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$ และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.15 จะได้ว่า สำหรับ $3 \leq i \leq 252$ เซต A_7^i คือ $\{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $3 \leq R_x = i \leq 127, R_y = i = j$ และ $R_z = k, 255 - i \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $3 \leq i = j \leq 127$

และเนื่องจาก $255 - i \leq k \leq 252$

จึงได้ว่า มี k ที่แตกต่างกันทั้งหมด $252 - (255 - i) + 1 = i - 2$ ค่า

ดังนั้น $A_1^i \cap A_7^i = \emptyset$, $i = 1, 2$ และ $A_1^i \cap A_7^i = \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\}$, $i = 3, 4, 5, \dots, 127$ และ $A_1^i \cap A_7^i = \emptyset$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ทำให้ $|A_1^i \cap A_7^i| = 0$, $i = 1, 2$ และ $|A_1^i \cap A_7^i| = i - 2$, $i = 3, 4, 5, \dots, 127$ และ $|A_1^i \cap A_7^i| = 0$, $i = 128, 129, 130, \dots, 251$

ให้เซต $A_2^i \cap A_7^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_z, R_x + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.10 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_2^i คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.15 จะได้ว่า สำหรับ $3 \leq i \leq 252$ เซต A_7^i คือ $\{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $3 \leq R_x = i \leq 252$, $R_y = j$, $j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}$ และ $R_z = i = k$, $255 - i \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - i \leq i = k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - i \leq i$

$$2i \geq 255$$

$$i \geq \frac{255}{2}$$

$$i \geq 127.5$$

$$i \geq 128$$

ทำให้ได้ว่า $\min\{252, 254 - i\} = 254 - i$

และเนื่องจาก $1 \leq j \leq 254 - i$

จึงได้ว่า มี j ที่แตกต่างกันทั้งหมด $254 - i$ ค่า

ดังนั้น $A_2^i \cap A_7^i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $A_2^i \cap A_7^i = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ทำให้ $|A_2^i \cap A_7^i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $|A_2^i \cap A_7^i| = 254 - i$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ให้เซต $A_3^i \cap A_7^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_y = R_z, R_x + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.11 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_3^i คือ $\{(i, j, j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.15 จะได้ว่า สำหรับ $3 \leq i \leq 252$ เซต A_7^i คือ $\{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $3 \leq R_x = i \leq 252$, $R_y = j, j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}$ และ $R_z = j = k, 255 - i \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - i \leq j = k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - i \leq j \leq \min\{252, 254 - i\} \leq 254 - i$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $A_3^i \cap A_7^i = \emptyset, i = 1, 2, 3, \dots, 252$

ทำให้ $|A_3^i \cap A_7^i| = 0, i = 1, 2, 3, \dots, 252$

ให้เซต $A_4^i \cap A_7^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_y = R_z, R_x + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.12 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 251$ เซต A_4^i คือ $\{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.15 จะได้ว่า สำหรับ $3 \leq i \leq 252$ เซต A_7^i คือ $\{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $3 \leq R_x = i \leq 251$, $R_y = j, j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i$ และ $R_z = i + j = k, 255 - i \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - i \leq i + j = k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - i \leq i + j$

$$255 - 2i \leq j$$

ทำให้ได้ว่า $j = \max\{1, 255 - 2i\}, \dots, 252 - i$

ดังนั้น $A_4^i \cap A_7^i = \emptyset, i = 1, 2, 252$ และ $A_4^i \cap A_7^i = \{(i, j, i + j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\}, i = 3, 4, 5, \dots, 127$ และ $A_4^i \cap A_7^i = \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}, i = 128, 129, 130, \dots, 251$

ทำให้ $|A_4^i \cap A_7^i| = 0, i = 1, 2, 252$ และ $|A_4^i \cap A_7^i| = 252 - i - (255 - 2i) + 1 = i - 2, i = 3, 4, 5, \dots, 127$ และ $|A_4^i \cap A_7^i| = 252 - i - 1 + 1 = 252 - i, i = 128, 129, 130, \dots, 251$

ให้เซต $A_5^i \cap A_7^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_z = R_y, R_x + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.13 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต A_5^i คือ $\{(i, j, j - i) | j = i + 1, i + 2, i + 3, \dots, 252\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.15 จะได้ว่า สำหรับ $3 \leq i \leq 252$ เซต A_7^i คือ $\{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $3 \leq R_x = i \leq 126$, $R_y = j$, $j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i$ และ $R_z = j - i = k$, $255 - i \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - i \leq j - i = k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - i \leq j - i$

$$255 \leq j$$

ทำให้ได้ว่า $255 \leq j \leq \min\{252, 254 - i\}$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $A_5^i \cap A_7^i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3, \dots, 252$

ทำให้ $|A_5^i \cap A_7^i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, 252$

และให้เซต $A_6^i \cap A_7^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_y + R_z = R_x, R_x + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.14 จะได้ว่า สำหรับ $2 \leq i \leq 252$ เซต A_6^i คือ $\{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{126, i - 1\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.15 จะได้ว่า สำหรับ $3 \leq i \leq 252$ เซต A_7^i คือ $\{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $3 \leq R_x = i \leq 252$, $R_y = j$, $j = 1, 2, 3, \dots, \min\{126, i - 1, 254 - i\}$ และ $R_z = i - j = k$, $255 - i \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - i \leq i - j = k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - i \leq i - j$

$$2i \geq 255 + j$$

$$i \geq \frac{255+j}{2}$$

$$i \geq \frac{255+1}{2} \text{ เนื่องจาก } j \text{ มีค่าน้อยสุด คือ } 1$$

$$i \geq 128$$

ทำให้ได้ว่า $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

$$\text{จาก } i \geq \frac{255+j}{2}$$

$$2i \geq 255 + j$$

$$j \leq 2i - 255$$

ทำให้ $j = 1, 2, 3, \dots, \min\{126, i - 1, 2i - 255, 254 - i\}$

สมมติให้ $\min\{126, i - 1, 2i - 255, 254 - i\} = i - 1$

พิจารณา $i - 1 \leq 2i - 255$

$$254 \leq i \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

พิจารณา $i - 1 \leq 254 - i$

$$2i \leq 255$$

$$i \leq 127.5$$

$$i \leq 127 \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

พิจารณา $i - 1 \leq 126$

$$i \leq 127 \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

ดังนั้น $\min\{126, i - 1, 2i - 255, 254 - i\} = \min\{126, 2i - 255, 254 - i\}$

ทำให้ $j = 1, 2, 3, \dots, \min\{126, 2i - 255, 254 - i\}$

สมมติให้ $\min\{126, 2i - 255, 254 - i\} = 126$

พิจารณา $126 \leq 2i - 255$

$$381 \leq 2i$$

$$190.5 \leq i$$

$$191 \leq i$$

และพิจารณา $126 \leq 254 - i$

$$i \leq 128 \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

ดังนั้น $\min\{126, 2i - 255, 254 - i\} = \min\{2i - 255, 254 - i\}$

จึงได้ว่า $j = 1, 2, 3, \dots, \min\{2i - 255, 254 - i\}$

พิจารณา $2i - 255 \leq 254 - i$

$$3i \leq 509$$

$$i \leq 169.66$$

$$i \leq 169$$

จึงได้ว่า $j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255$ เมื่อ $i = 128, 129, 130, \dots, 169$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i$ เมื่อ $i = 170, 171, 172, \dots, 252$

ดังนั้น $A_6^i \cap A_7^i = \emptyset, i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $A_6^i \cap A_7^i = \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 2i -$

255}, $i = 128, 129, 130, \dots, 169$ และ $A_6^i \cap A_7^i = \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$, $i = 170, 171, 172, \dots, 252$

ทำให้ $|A_6^i \cap A_7^i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, 127$ และ $|A_6^i \cap A_7^i| = 2i - 255 - 1 + 1 = 2i - 255$, $i = 128, 129, 130, \dots, 169$ และ $|A_6^i \cap A_7^i| = 254 - i - 1 + 1 = 254 - i$, $i = 170, 171, 172, \dots, 252$

พิจารณาเซต $(A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_3^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_5^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i)$
กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) \\ &= (A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_3^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_5^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 3, 4, 5, 6, \dots, 127$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) \\ &= (A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_3^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_5^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i) \\ &= \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, i + j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\ &= \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\} \end{aligned}$$

กรณีที่ 3 สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 169$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) \\ &= (A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_3^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_5^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i) \\ &= \emptyset \cup \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255\} \\ &= \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255\} \end{aligned}$$

กรณีที่ 4 สำหรับ $i = 170, 171, 172, \dots, 251$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) \\ &= (A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_3^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_5^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i) \\ &= \emptyset \cup \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \end{aligned}$$

$$= \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$$

กรณีที 5 สำหรับ $i = 252$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) \\ &= (A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_3^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_5^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i) \\ &= \emptyset \cup \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \end{aligned}$$

$$= \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$$

ดังนั้น $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = \emptyset$, สำหรับ $i = 1, 2$ และ $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\}$, สำหรับ $i = 3, 4, 5, \dots, 127$ และ $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255\}$, สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 169$ และ $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$, สำหรับ $i = 170, 171, 172, \dots, 251$ และ $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$, สำหรับ $i = 252$

$$\text{พิจารณา } |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)|$$

$$\text{กรณีที่ 1 สำหรับ } i = 1, 2 \text{ จะได้ว่า } A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = \emptyset$$

$$\text{ดังนั้น } |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 0$$

$$\text{กรณีที่ 2 สำหรับ } i = 3, 4, 5, \dots, 127 \text{ จะได้ว่า } A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\}$$

$$\text{จาก } A_1^i \cap A_7^i = \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \text{ และ } A_4^i \cap A_7^i = \{(i, j, i + j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\}$$

$$\text{ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย } |A_1^i \cap A_7^i| = i - 2, |A_4^i \cap A_7^i| = i - 2 \text{ และ}$$

$$\text{พิจารณา } (A_1^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } 3 \leq R_x = i \leq 127, R_y = j, j = 255 - 2i, \dots, 252 - i \text{ และ } R_z = k = i + j, 255 - i \leq k \leq 252$$

$$\text{เนื่องจาก } i = j \text{ จึงได้ว่า } 3 \leq R_x = i = j \leq 127$$

และเนื่องจาก $k = i + j = 2i$

จึงได้ว่า $255 - i \leq k = 2i \leq 252$

$$255 - i \leq 2i$$

$$255 \leq 3i$$

$$85 \leq i$$

และ $2i \leq 252$

$$i \leq 126$$

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) = \emptyset$, $i = 3, 4, 5, \dots, 84, 127$ และ $(A_1^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) = \{(i, i, 2i)\}$, $i = 85, 86, 87, \dots, 126$

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)| = 0$, $i = 3, 4, 5, \dots, 84, 127$ และ $|(A_1^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)| = 126 - 85 + 1 = 42$, $i = 85, 86, 87, \dots, 126$

สำหรับ $i = 3, 4, 5, \dots, 84$

$$\text{พิจารณา } A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = (A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i)| &= |(A_1^i \cap A_7^i)| + |(A_4^i \cap A_7^i)| - |(A_1^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)| \\ &= (i - 2) + (i - 2) - 0 \\ &= 2i - 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i - 4$, สำหรับ $i = 3, 4, 5, \dots, 84$

สำหรับ $i = 85, 86, 87, \dots, 126$

$$\text{พิจารณา } A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = (A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i)| &= |(A_1^i \cap A_7^i)| + |(A_4^i \cap A_7^i)| - |(A_1^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)| \\ &= (i - 2) + (i - 2) - 42 \\ &= 2i - 46 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i - 46$ สำหรับ $i = 85, 86, 87, \dots, 126$

และสำหรับ $i = 127$

$$\text{พิจารณา } A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = (A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i)$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i)| &= |(A_1^i \cap A_7^i)| + |(A_4^i \cap A_7^i)| - |(A_1^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)| \\ &= (127 - 2) + (127 - 2) - 0 \\ &= 250 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 250$ สำหรับ $i = 127$

กรณีที 3 สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 169$ จะได้ว่า $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255\}$

จาก $A_2^i \cap A_7^i = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$ และ $A_4^i \cap A_7^i = \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}$ และ $A_6^i \cap A_7^i = \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255\}$

ใช้ทฤษฎีบท 1.6 โดย $|A_2^i \cap A_7^i| = 254 - i$, $|A_4^i \cap A_7^i| = 252 - i$ และ $|A_6^i \cap A_7^i| = 2i - 255$

พิจารณา $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)$

จะได้ว่า $128 \leq R_x = i \leq 169$, $R_y = j$, $j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i$ และ $R_z = i = i + j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i \neq i + j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) = \emptyset$, $i = 128, 129, 130, \dots, 169$

ทำให้ $|(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)| = 0$, $i = 128, 129, 130, \dots, 169$

พิจารณา $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)$

จะได้ว่า $128 \leq R_x = i \leq 169$, $R_y = j$, $j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255$ และ $R_z = i = i - j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i \neq i - j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i) = \emptyset$, $i = 128, 129, 130, \dots, 169$

ทำให้ $|(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| = 0$, $i = 128, 129, 130, \dots, 169$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)$

จะได้ว่า $128 \leq R_x = i \leq 169$, $R_y = j$, $j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255$ และ $R_z = i + j = i - j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i + j \neq i - j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i) = \emptyset$, $i = 128, 129, 130, \dots, 169$

ทำให้ $|(A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| = 0$, $i = 128, 129, 130, \dots, 169$

พิจารณา $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)$

จะได้ว่า $128 \leq R_x = i \leq 169$, $R_y = j$, $j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255$ และ $R_z = i = i + j = i - j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i \neq i + j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i) = \emptyset$, $i = 128, 129, 130, \dots, 169$

ทำให้ $|(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| = 0$, $i = 128, 129, 130, \dots, 169$

พิจารณา $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = (A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i)$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } |(A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i)| \\
& = |(A_2^i \cap A_7^i)| + |(A_4^i \cap A_7^i)| + |(A_6^i \cap A_7^i)| - |(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)| - |(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| \\
& \quad - |(A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| + |(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| \\
& = (254 - i) + (252 - i) + (2i - 255) - 0 - 0 - 0 + 0 \\
& = 251
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 251$, สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 169$
 กรณีที่ 4 สำหรับ $i = 170, 171, 172, \dots, 251$ จะได้ว่า $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$

จาก $A_2^i \cap A_7^i = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$ และ $A_4^i \cap A_7^i = \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}$ และ $A_6^i \cap A_7^i = \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$

ใช้ทฤษฎีบท 1.6 โดย $|A_2^i \cap A_7^i| = 254 - i$, $|A_4^i \cap A_7^i| = 252 - i$ และ $|A_6^i \cap A_7^i| = 254 - i$

พิจารณา $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)$

จะได้ว่า $170 \leq R_x = i \leq 251$, $R_y = j, j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i$ และ $R_z = i = i + j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i \neq i + j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) = \emptyset, i = 170, 171, 172, \dots, 251$

ทำให้ $|(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)| = 0, i = 170, 171, 172, \dots, 251$

พิจารณา $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)$

จะได้ว่า $170 \leq R_x = i \leq 251$, $R_y = j, j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i$ และ $R_z = i = i - j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i \neq i - j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i) = \emptyset, i = 170, 171, 172, \dots, 251$

ทำให้ $|(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| = 0, i = 170, 171, 172, \dots, 251$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)$

จะได้ว่า $170 \leq R_x = i \leq 251$, $R_y = j, j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i$ และ $R_z = i + j = i - j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i + j \neq i - j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i) = \emptyset, i = 170, 171, 172, \dots, 251$

ทำให้ $|(A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| = 0, i = 170, 171, 172, \dots, 251$

พิจารณา $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)$

จะได้ว่า $170 \leq R_x = i \leq 251$, $R_y = j$, $j = 1, 2, 3, \dots, 252-i$ และ $R_z = i = i+j = i-j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i \neq i+j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i) = \emptyset$, $i = 170, 171, 172, \dots, 251$

ทำให้ $|(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| = 0$, $i = 170, 171, 172, \dots, 251$

พิจารณา $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = (A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i)$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |(A_2^i \cap A_7^i) \cup (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i)| \\ &= |(A_2^i \cap A_7^i)| + |(A_4^i \cap A_7^i)| + |(A_6^i \cap A_7^i)| - |(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i)| - |(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| \\ & \quad - |(A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| + |(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| \\ &= (254-i) + (252-i) + (254-i) - 0 - 0 - 0 + 0 \\ &= 760 - 3i \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 760 - 3i$, สำหรับ $i = 170, 171, 172, \dots, 251$

กรณีที่ 5 สำหรับ $i = 252$ จะได้ว่า $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254-i\} \cup \{(i, j, i-j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254-i\}$

จาก $A_2^i \cap A_7^i = \{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254-i\}$ และ $A_6^i \cap A_7^i = \{(i, j, i-j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254-i\}$

ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_2^i \cap A_7^i| = 254 - 252 = 2$, $|A_4^i \cap A_7^i| = 254 - 252 = 2$ และ

พิจารณา $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)$

จะได้ว่า $i = 252$, $R_y = j$, $j = 1, 2$ และ $R_z = i = i-j$

เนื่องจาก $j > 0$ จึงได้ว่า $i \neq i-j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i) = \emptyset$, $i = 252$

ทำให้ $|(A_2^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| = 0$, $i = 252$

พิจารณา $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i) = (A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i)$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |(A_4^i \cap A_7^i) \cup (A_6^i \cap A_7^i)| = |(A_4^i \cap A_7^i)| + |(A_6^i \cap A_7^i)| - |(A_4^i \cap A_7^i) \cap (A_6^i \cap A_7^i)| \\ &= 2 + 2 - 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 4$, สำหรับ $i = 252$

ทำให้ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 0$, สำหรับ $i = 1, 2$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i-4$, สำหรับ $i = 3, 4, 5, \dots, 84$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i-46$,

สำหรับ $i = 85, 86, 87, \dots, 126$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 250$, สำหรับ $i = 127$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 251$, สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 169$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 760 - 3i$, สำหรับ $i = 170, 171, 172, \dots, 251$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 4$, สำหรับ $i = 252$ $\square$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.28 :

1. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 1$ คือ 1254
2. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 2$ คือ 1252
3. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 83$ คือ $-i^2 + 251i + 755$
4. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$ คือ $-i^2 + 251i + 754$
5. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$ คือ $-i^2 + 251i + 797$
6. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$ คือ $-i^2 + 251i + 796$
7. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 16379
8. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 168$ คือ $-i^2 + 253i + 125$
9. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 169$ คือ $-i^2 + 253i + 126$
10. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 170, 172, 174, \dots, 250$ คือ $-i^2 + 256i - 384$
11. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 171, 173, 175, \dots, 251$ คือ $-i^2 + 256i - 383$

12. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 624

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.26 จะได้ว่า

1. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ สำหรับ $i = 1$ คือ 1254
2. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 2, 4, 6, \dots, 126$ คือ $1258 - 3i$
3. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 125$ คือ $1259 - 3i$
4. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 754
5. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 250$ คือ $884 - 3i$
6. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 251$ คือ $885 - 3i$
7. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 128

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.15 จะได้ว่า สำหรับ $3 \leq i \leq 252$ เซต A_7^i คือ $\{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$ และ $|A_7^i| = (254 - i)(i - 2)$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.27 จะได้ว่า

1. สำหรับ $i = 1, 2$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\emptyset$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 0$
2. สำหรับ $i = 3, 4, 5, \dots, 84$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i - 4$
3. สำหรับ $i = 85, 86, 87, \dots, 126$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i - 46$
4. สำหรับ $i = 127$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 255 - 2i, \dots, 252 - i\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 250$

5. สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 169$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 2i - 255\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 251$
6. สำหรับ $i = 170, 171, 172, \dots, 251$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 760 - 3i$
7. สำหรับ $i = 252$ เซต $A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)$ คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i\}$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 4$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 1254$, $|A_7^i| = 0$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 0$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= 1254 + 0 - 0 \\ &= 1254 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 1$ คือ 1254

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 2$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 1258 - 3(2) = 1252$, $|A_7^i| = 0$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 0$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= 1252 + 0 - 0 \\ &= 1252 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 2$ คือ 1252

กรณีที่ 3 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 83$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 1259 - 3i$, $|A_7^i| = (254 - i)(i - 2)$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i - 4$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= (1259 - 3i) + (254 - i)(i - 2) - (2i - 4) \end{aligned}$$

$$= -i^2 + 251i + 755$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 83$ คือ $-i^2 + 251i + 755$

กรณีที่ 4 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 1258 - 3i$, $|A_7^i| = (254 - i)(i - 2)$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i - 4$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= (1258 - 3i) + (254 - i)(i - 2) - (2i - 4) \\ &= -i^2 + 251i + 754 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$ คือ $-i^2 + 251i + 754$

กรณีที่ 5 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 1259 - 3i$, $|A_7^i| = (254 - i)(i - 2)$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i - 46$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= (1259 - 3i) + (254 - i)(i - 2) - (2i - 46) \\ &= -i^2 + 251i + 797 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$ คือ $-i^2 + 251i + 797$

กรณีที่ 6 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 1258 - 3i$, $|A_7^i| = (254 - i)(i - 2)$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 2i - 46$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= (1258 - 3i) + (254 - i)(i - 2) - (2i - 46) \\ &= -i^2 + 251i + 796 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

คือ $-i^2 + 251i + 796$

กรณีที่ 7 สำหรับ $i = 127$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 754$, $|A_7^i| = (254 - 127)(127 - 2) = 15875$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 250$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= 754 + 15875 - 250 \\ &= 16379 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 16379

กรณีที่ 8 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 168$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 884 - 3i$, $|A_7^i| = (254 - i)(i - 2)$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 251$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= (884 - 3i) + (254 - i)(i - 2) - 251 \\ &= -i^2 + 253i + 125 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 168$ คือ $-i^2 + 253i + 125$

กรณีที่ 9 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 169$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 885 - 3i$, $|A_7^i| = (254 - i)(i - 2)$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 251$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= (885 - 3i) + (254 - i)(i - 2) - 251 \\ &= -i^2 + 253i + 126 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 169$ คือ $-i^2 + 253i + 126$

กรณีที่ 10 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 170, 172, 174, \dots, 250$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 884 - 3i$, $|A_7^i| = (254 - i)(i - 2)$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| =$

$$760 - 3i$$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= (884 - 3i) + (254 - i)(i - 2) - (760 - 3i) \\ &= -i^2 + 256i - 384 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 170, 172, 174, \dots, 250$ คือ $-i^2 + 256i - 384$

กรณีที่ 11 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 171, 173, 175, \dots, 251$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 885 - 3i$, $|A_7^i| = (254 - i)(i - 2)$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 760 - 3i$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= (885 - 3i) + (254 - i)(i - 2) - (760 - 3i) \\ &= -i^2 + 256i - 383 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 171, 173, 175, \dots, 251$ คือ $-i^2 + 256i - 383$

กรณีที่ 12 สำหรับ $i = 252$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| = 128$, $|A_7^i| = (254 - 252)(252 - 2) = 500$ และ $|A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| = 4$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i| + |A_7^i| - |A_7^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i)| \\ &= 128 + 500 - 4 \\ &= 624 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 624 □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.29 :

1. สำหรับ $i = 1$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 127, 128, 129, \dots, 251\} \cup \{(i, j, j - i) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 378$

2. สำหรับ $i = 2$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 127, 128, 129, \dots, 250\} \cup \{(i, j, j-i) | j = 129, 130, 131, \dots, 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 373$
3. สำหรับ $i = 3$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k)\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 251\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 126, 127, 128, \dots, 249\} \cup \{(i, j, j-i) | j = 129, 130, 131, \dots, 251\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 251 \text{ และ } k = 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 619$
4. สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255-i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254-i\} \cup \{(i, j, i+j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, j-i) | j = \frac{256+i}{2}, \dots, 254-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+505i-252}{2}$
5. สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255-i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254-i\} \cup \{(i, j, i+j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, j-i) | j = \frac{255+i}{2}, \dots, 254-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+505i-250}{2}$
6. สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255-i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254-i\} \cup \{(i, j, i+j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+511i-760}{2}$
7. สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255-i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254-i\} \cup \{(i, j, i+j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+511i-760}{2}$

8. สำหรับ $i = 127$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 128 \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 64, 65, 66, \dots, 125\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 126 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, 127, k) | 128 \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 7875$
9. สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 248$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, j, i+j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$
10. สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 249$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, j, i+j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$
11. สำหรับ $i = 250, 251$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$
12. สำหรับ $i = 252$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\emptyset$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 0$

บทพิสูจน์ พิจารณาเซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ ในรูป $(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้เซต $A_1^i \cap A_8^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_y, R_y + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.9 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 127$ เซต A_1^i คือ $\{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$ และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.16 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_8^i คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254-i\} \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 127, R_y = i = j$ และ $R_z = k, 255-j \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $3 \leq i = j \leq 127$ และ $255-i \leq k \leq 252$

ทำให้ได้ว่า มี k ที่แตกต่างกันทั้งหมด $252 - (255-i) + 1 = i-2$ ค่า

ดังนั้น $A_1^i \cap A_8^i = \emptyset, i = 1, 2$ และ $A_1^i \cap A_8^i = \{(i, i, k) | 255-i \leq k \leq 252\}, i = 3, 4, 5, \dots, 127$ และ $A_1^i \cap A_8^i = \emptyset, i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ทำให้ $|A_1^i \cap A_8^i| = 0$, $i = 1, 2$ และ $|A_1^i \cap A_8^i| = i - 2$, $i = 3, 4, 5, \dots, 127$ และ $|A_1^i \cap A_8^i| = 0$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ให้เซต $A_2^i \cap A_8^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x = R_z, R_y + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.10 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_2^i คือ $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.16 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_8^i คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\}$ และ $255 - j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 252$, $R_y = j$, $j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\}$ และ $R_z = i = k$, $255 - j \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - j \leq i = k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - j \leq i$

$$255 - i \leq j$$

ทำให้ได้ว่า $j = 255 - i, \dots, \min\{252, 254 - i\}$

พิจารณา $255 - i \leq \min\{252, 254 - i\} \leq 254 - i$

จะได้ว่า $255 - i \leq 254 - i$

$$255 \leq 254 \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

ดังนั้น $A_2^i \cap A_8^i = \emptyset$, $i = 1, 2, 3, \dots, 252$

ทำให้ $|A_2^i \cap A_8^i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, 252$

ให้เซต $A_3^i \cap A_8^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_y = R_z, R_y + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.11 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_3^i คือ $\{(i, j, j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{252, 254 - i\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.16 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_8^i คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\}$ และ $255 - j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 252$, $R_y = j$, $j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\}$ และ $R_z = j = k$, $255 - j \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - j \leq j = k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - j \leq j$

$$255 \leq 2j$$

$$127.5 \leq j$$

$$128 \leq j$$

ทำให้ได้ว่า $j = 128, 129, 130, \dots, \min\{252, 254 - i\}$

พิจารณา $128 \leq 254 - i$

$$i \leq 126$$

ทำให้ $i = 1, 2, 3, \dots, 126$

ดังนั้น $A_3^i \cap A_8^i = \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\}$, $i = 1$ และ $A_3^i \cap A_8^i = \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\}$, $i = 2, 3, 4, \dots, 126$ และ $A_3^i \cap A_8^i = \emptyset$, $i = 127, 128, 129, \dots, 252$

ทำให้ $|A_3^i \cap A_8^i| = 252 - 128 + 1 = 125$, $i = 1$ และ $|A_3^i \cap A_8^i| = (254 - i) - 128 + 1 = 127 - i$, $i = 2, 3, 4, \dots, 126$ และ $|A_3^i \cap A_8^i| = 0$, $i = 127, 128, 129, \dots, 252$

ให้เซต $A_4^i \cap A_8^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_y = R_z, R_y + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.12 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 251$ เซต A_4^i คือ $\{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.16 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_8^i คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\}$ และ $255 - j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 251$, $R_y = j, j = 3, 4, 5, \dots, 252 - i$ และ $R_z = i + j = k, 255 - j \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - j \leq i + j = k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - j \leq i + j$

$$255 - i \leq 2j$$

$$\frac{255 - i}{2} \leq j$$

จึงได้ว่า ถ้า i เป็นจำนวนคี่ $j = \frac{255 - i}{2}, \dots, 252 - i$ และถ้า i เป็นจำนวนคู่ $j = \frac{256 - i}{2}, \dots, 252 - i$

พิจารณา $\frac{255 - i}{2} \leq 252 - i$

$$255 - i \leq 504 - 2i$$

$$i \leq 249$$

ทำให้ได้ว่า $i = 1, 2, 3, \dots, 249$

ดังนั้น $A_4^i \cap A_8^i = \{(i, j, i+j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252-i\}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ $i = 1, 3, 5, \dots, 249$
 และ $A_4^i \cap A_8^i = \{(i, j, i+j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252-i\}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ $i = 2, 4, 6, \dots, 248$ และ
 $A_4^i \cap A_8^i = \emptyset, i = 250, 251, 252$

ทำให้ $|A_4^i \cap A_8^i| = (252-i) - (\frac{255-i}{2}) + 1 = \frac{251-i}{2}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ $i = 1, 3, 5, \dots, 249$
 และ $|A_4^i \cap A_8^i| = (252-i) - (\frac{256-i}{2}) + 1 = \frac{250-i}{2}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ $i = 2, 4, 6, \dots, 248$ และ
 $|A_4^i \cap A_8^i| = 0, i = 250, 251, 252$

ให้เซต $A_5^i \cap A_8^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_z = R_y, R_y + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.13 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 126$ เซต A_5^i คือ $\{(i, j, j-i) | j = i+1, i+2, i+3, \dots, 252\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.16 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_8^i คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254-i\}$ และ $255-j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $1 \leq R_x = i \leq 126, R_y = j, j = i+1, i+2, i+3, \dots, \min\{252, 254-i\}$ และ
 $R_z = j-i = k, 255-j \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255-j \leq j-i = k \leq 252$

จึงได้ว่า $255-j \leq j-i$

$$255+i \leq 2j$$

$$\frac{255+i}{2} \leq j$$

จาก $j-i \leq 252$

จะได้ว่า $j \leq 252+i$

ทำให้ได้ว่า $j = \max\{i+1, \frac{255+i}{2}\}, \dots, \min\{252+i, 252, 254-i\}$

พิจารณา $i+1 = \frac{2i+2}{2}$

$$= \frac{2i+2}{2} + \frac{253-253}{2}$$

$$= \frac{255+i}{2} + \frac{i-253}{2}$$

เนื่องจาก i ที่มีค่ามากที่สุด คือ 252 ซึ่ง $\frac{i-253}{2} < 0$

ทำให้ $i+1 \leq \frac{255+i}{2}$

$$\text{ดังนั้น } \max\{i+1, \frac{255+i}{2}\} = \frac{255+i}{2}$$

$$\text{พิจารณา } 252+i \leq 252$$

$$i \leq 0 \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

$$\text{ดังนั้น } \min\{252+i, 252, 254-i\} = \min\{252, 254-i\}$$

$$\text{จึงได้ว่า } j = \frac{255+i}{2}, \dots, \min\{252, 254-i\}$$

$$\text{ทำให้ได้ว่า ถ้า } i \text{ เป็นจำนวนคี่ } j = \frac{255+i}{2}, \dots, \min\{252, 254-i\} \text{ และ ถ้า } i \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

$$j = \frac{256+i}{2}, \dots, \min\{252, 254-i\}$$

$$\text{เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

$$\text{พิจารณา } \frac{255+i}{2} \leq 254-i$$

$$255+i \leq 508-2i$$

$$3i \leq 253$$

$$i \leq 84.33$$

$$i \leq 84$$

$$\text{จะได้ว่า } i = 1, 3, 5, \dots, 83$$

$$\text{เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

$$\text{พิจารณา } \frac{256+i}{2} \leq 254-i$$

$$256+i \leq 508-2i$$

$$3i \leq 252$$

$$i \leq 84$$

$$\text{จะได้ว่า } i = 2, 4, 6, \dots, 84$$

$$\text{ดังนั้น } A_5^i \cap A_8^i = \{(i, j, j-i) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\} \text{ สำหรับ } i = 1 \text{ และ } A_5^i \cap A_8^i = \{(i, j, j-i) | j = \frac{255+i}{2}, \dots, 254-i\} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคี่ สำหรับ } i = 3, 5, 7, \dots, 83 \text{ และ}$$

$$A_5^i \cap A_8^i = \{(i, j, j-i) | j = \frac{256+i}{2}, \dots, 254-i\} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคู่ สำหรับ } i = 2, 4, 6, \dots, 84 \text{ และ}$$

$$A_5^i \cap A_8^i = \emptyset \text{ สำหรับ } i = 85, 86, 87, \dots, 252$$

$$\text{ทำให้ } |A_5^i \cap A_8^i| = 252-128+1 = 128 \text{ สำหรับ } i = 1 \text{ และ } |A_5^i \cap A_8^i| = (254-i) - (\frac{255+i}{2}) + 1 = \frac{255-3i}{2} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคี่ สำหรับ } i = 3, 5, 7, \dots, 83 \text{ และ } |A_5^i \cap A_8^i| = (254-i) - (\frac{256+i}{2}) + 1 = \frac{254-3i}{2} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคู่ สำหรับ } i = 2, 4, 6, \dots, 84 \text{ และ } |A_5^i \cap A_8^i| = 0, i = 85, 86, 87, \dots, 252$$

$$\text{ให้เซต } A_6^i \cap A_8^i \text{ คือ } \{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_y + R_z = R_x, R_y + R_z \geq 255, R_x = i\} \text{ จะ}$$

พิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.14 จะได้ว่า สำหรับ $2 \leq i \leq 252$ เซต A_6^i คือ $\{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min\{126, i - 1\}\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.16 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_8^i คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\}$ และ $255 - j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $2 \leq R_x = i \leq 252, R_y = j, j = 3, 4, 5, \dots, \min\{126, i - 1, 254 - i\}$ และ $R_z = i - j = k, 255 - j \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - j \leq i - j = k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - j \leq i - j$

$255 \leq i$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $A_6^i \cap A_8^i = \emptyset, i = 1, 2, 3, \dots, 252$

ทำให้ $|A_6^i \cap A_8^i| = 0, i = 1, 2, 3, \dots, 252$

ให้เซต $A_7^i \cap A_8^i$ คือ $\{(R_x, R_y, R_z) \in \mathcal{U}_i | R_x + R_z \geq 255, R_y + R_z \geq 255, R_x = i\}$ จะพิจารณาขอบเขตของค่า R_x, R_y, R_z

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.15 จะได้ว่า สำหรับ $3 \leq i \leq 252$ เซต A_7^i คือ $\{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i$ และ $255 - i \leq k \leq 252\}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.16 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_8^i คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\}$ และ $255 - j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $3 \leq R_x = i \leq 252, R_y = j, j = 3, 4, 5, \dots, 254 - i$ และ $R_z = k, \max\{255 - j, 255 - i\} \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $\max\{255 - j, 255 - i\} \leq k \leq 252$

พิจารณา $255 - j > 255 - i$

$i > j$

ทำให้ $255 - j \leq k \leq 252$ สำหรับ $i > j$ และ $255 - i \leq k \leq 252$ สำหรับ $i \leq j$

ดังนั้น $\max\{255 - j, 255 - i\} \leq k \leq 252$ แบ่งได้สองกรณี ได้แก่

กรณีที่ 1 สำหรับ $i > j$

จะได้ว่า $3 \leq R_x = i \leq 252, R_y = j, j = 3, 4, 5, \dots, \min\{i - 1, 254 - i\}$ และ $R_z = k, 255 - j \leq k \leq 252$

พิจารณา $i > j$

จึงได้ว่า $i > 3$ เนื่องจาก j มีค่าน้อยที่สุด คือ 3

ทำให้ได้ว่า $i = 4, 5, 6, \dots, 252$

พิจารณา $i - 1 < 254 - i$

$$2i < 255$$

$$i < 127.5$$

$$i \leq 127$$

แสดงว่า $\min\{i - 1, 254 - i\} = i - 1$ เมื่อ $i = 4, 5, 6, \dots, 127$ และ $\min\{i - 1, 254 - i\} = 254 - i$ เมื่อ $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

พิจารณา $3 \leq 254 - i$

$$i \leq 251$$

ทำให้ได้ว่า $j = 3, 4, 5, \dots, i - 1$ สำหรับ $i = 4, 5, 6, \dots, 127$ และ $j = 3, 4, 5, \dots, 254 - i$ สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$

และจำนวนค่า k ที่เป็นไปได้ สำหรับ j ค่าหนึ่งคือ $252 - (255 - j) + 1 = j - 2$

สำหรับ $i = 4, 5, 6, \dots, 127$ จะได้ว่า มี k ที่แตกต่างกันทั้งหมด $\sum_{j=3}^{i-1} (j - 2) = 1 + 2 + 3 + \dots + i - 3$ ค่า

ใช้ทฤษฎีบท 1.7 โดย $a_1 = 1, a_n = i - 3$ และ $n = i - 3$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + i - 3 &= \left(\frac{n}{2}\right) (a_1 + a_n) \\ &= \left(\frac{i-3}{2}\right) [1 + (i - 3)] \\ &= \frac{(i-3)(i-2)}{2} \end{aligned}$$

สำหรับ $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ จะได้ว่า มี k ที่แตกต่างกันทั้งหมด $\sum_{j=3}^{254-i} (j - 2) = 1 + 2 + 3 + \dots + 252 - i$ ค่า

ใช้ทฤษฎีบท 1.7 โดย $a_1 = 1, a_n = 252 - i$ และ $n = 252 - i$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 252 - i &= \left(\frac{n}{2}\right) (a_1 + a_n) \\ &= \left(\frac{252-i}{2}\right) [1 + (252 - i)] \\ &= \frac{(252-i)(253-i)}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $A_7^i \cap A_8^i = \emptyset, i = 1, 2, 3$ และ $A_7^i \cap A_8^i = \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}, i = 4, 5, 6, \dots, 127$ และ $A_7^i \cap A_8^i = \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}, i = 128, 129, 130, \dots, 251$

$255 - j \leq k \leq 252\}$, $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ และ $A_7^i \cap A_8^i = \emptyset$, $i = 252$

ทำให้ $|A_7^i \cap A_8^i| = 0$, $i = 1, 2, 3$ และ $|A_7^i \cap A_8^i| = \frac{(i-3)(i-2)}{2}$, $i = 4, 5, 6, \dots, 127$ และ $|A_7^i \cap A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$, $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ และ $|A_7^i \cap A_8^i| = 0$, $i = 252$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i \leq j$

จะได้ว่า $3 \leq R_x = i \leq 252$, $R_y = j$, $j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i$ และ $R_z = k$, $255-i \leq k \leq 252$

พิจารณา $i \leq 254 - i$

$$2i \leq 254$$

$$i \leq 127$$

ทำให้ได้ว่า $j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i$ สำหรับ $i = 3, 4, 5, \dots, 127$

จึงได้ว่า มี j ที่แตกต่างกันทั้งหมด $(254-i) - i + 1 = 255 - 2i$ ค่า

และมี k ที่แตกต่างกันทั้งหมด $252 - (255-i) + 1 = i - 2$ ค่า

ดังนั้น $A_7^i \cap A_8^i = \emptyset$, $i = 1, 2$ และ $A_7^i \cap A_8^i = \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$, $i = 3, 4, 5, \dots, 127$ และ $A_7^i \cap A_8^i = \emptyset$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

ทำให้ $|A_7^i \cap A_8^i| = 0$, $i = 1, 2$ และ $|A_7^i \cap A_8^i| = (255-2i)(i-2)$, $i = 3, 4, 5, \dots, 127$ และ $|A_7^i \cap A_8^i| = 0$, $i = 128, 129, 130, \dots, 252$

จากทั้งสองกรณี

ดังนั้น $A_7^i \cap A_8^i = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, $i = 1, 2$ และ $A_7^i \cap A_8^i = \emptyset \cup \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} = \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 251 \text{ และ } k = 252\}$, $i = 3$ และ $A_7^i \cap A_8^i = \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$, $i = 4, 5, 6, \dots, 127$ และ $A_7^i \cap A_8^i = \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \cup \emptyset = \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$, $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ และ $A_7^i \cap A_8^i = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, $i = 252$

ทำให้ $|A_7^i \cap A_8^i| = 0 + 0 = 0$, $i = 1, 2$ และ $|A_7^i \cap A_8^i| = 0 + (255-2(3))(3-2) = 249$, $i = 3$ และ $|A_7^i \cap A_8^i| = \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255-2i)(i-2)$, $i = 4, 5, 6, \dots, 127$ และ $|A_7^i \cap A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2} + 0 = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$, $i = 128, 129, 130, \dots, 251$ และ $|A_7^i \cap A_8^i| = 0 + 0 = 0$, $i = 252$

พิจารณาเซต $(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
&= (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 127, 128, 129, \dots, \\
&251\} \cup \{(i, j, j-i) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\
&= \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 127, 128, 129, \dots, 251\} \\
&\cup \{(i, j, j-i) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที 2 สำหรับ $i = 2$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
&= (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, j) | j = 127, 128, 129, \dots, 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 127, 128, 129, \dots, \\
&250\} \cup \{(i, j, j-i) | j = 129, 130, 131, \dots, 252\} \cup \emptyset \cup \emptyset \\
&= \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 127, 128, 129, \dots, 250\} \cup \\
&\{(i, j, j-i) | j = 129, 130, 131, \dots, 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที 3 สำหรับ $i = 3$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
&= (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
&= \{(i, i, 252)\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 251\} \cup \{(i, j, i+j) | j = \\
&126, 127, 128, \dots, 249\} \cup \{(i, j, j-i) | j = 129, 130, 131, \dots, 251\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 251 \\
&\text{และ } k = 252\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(i, i, k)\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 251\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 126, 127, 128, \\
&\dots, 249\} \cup \{(i, j, j-i) | j = 129, 130, 131, \dots, 251\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 251 \text{ และ } k = 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที 4 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
&= (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
&= \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup \\
&\{(i, j, i+j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, j-i) | j = \frac{256+i}{2}, \dots, 254 - i\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, k) | j = \\
&3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254 - i \text{ และ } \\
&255 - i \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup \\
&\{(i, j, i + j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, j - i) | j = \frac{256+i}{2}, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, k) | j = \\
&3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ} \\
&255 - i \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที 5 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
&= (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
&= \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup \\
&\{(i, j, i + j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, j - i) | j = \frac{255+i}{2}, \dots, 254 - i\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, k) | j = \\
&3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ} \\
&255 - i \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup \\
&\{(i, j, i + j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, j - i) | j = \frac{255+i}{2}, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, k) | j = \\
&3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ} \\
&255 - i \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที 6 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
&= (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
&= \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup \\
&\{(i, j, i + j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252 - i\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq \\
&252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup \\
&\{(i, j, i + j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq \\
&252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที 7 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
&= (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
&= \{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \emptyset \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{(i, j, i+j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \\
& \cup \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} \\
& = \{(i, i, k) | 255-i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254-i\} \cup \\
& \{(i, j, i+j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \\
& \cup \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที่ 8 สำหรับ $i = 127$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
& = (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
& = \{(i, i, k) | 128 \leq k \leq 252\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, i+j) | j = 64, 65, 66, \dots, 125\} \cup \\
& \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 126 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, 127, k) | 128 \leq k \leq 252\} \\
& = \{(i, i, k) | 128 \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i+j) | j = 64, 65, 66, \dots, 125\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 126 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \\
& \cup \{(i, 127, k) | 128 \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที่ 9 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 248$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
& = (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
& = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, i+j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \\
& = \{(i, j, i+j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที่ 10 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 249$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
& = (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
& = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, i+j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} \\
& = \{(i, j, i+j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที่ 11 สำหรับ $i = 250, 251$

$$\text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$$

$$\begin{aligned}
&= (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \\
&= \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}
\end{aligned}$$

กรณีที่ 12 สำหรับ $i = 252$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) \\
&= (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_2^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_6^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \\
&= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

พิจารณา $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)|$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1$

$$\text{จะได้ } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i)$$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 1, R_y = j, j = 128, 129, 130, \dots, 251 \text{ และ } R_z = j = i + j$$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq i + j$ เสมอ

$$\text{ดังนั้น } (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 1$$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 1, R_y = j, j = 128, 129, 130, \dots, 252 \text{ และ } R_z = j = j - i$$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq j - i$ เสมอ

$$\text{ดังนั้น } (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 1$$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 1, R_y = j, j = 128, 129, 130, \dots, 251 \text{ และ } R_z = i + j = j - i$$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $i + j \neq j - i$ เสมอ

$$\text{ดังนั้น } (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 1$$

เนื่องจาก $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset, (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset$ และ $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) =$

$\emptyset$ ใช้ทฤษฎีบท 1.4 โดย $|A_3^i \cap A_8^i| = 125, |A_4^i \cap A_8^i| = \frac{251-1}{2} = 125$ และ $|A_5^i \cap A_8^i| = 128$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า } |(A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i)| &= |A_3^i \cap A_8^i| + |A_4^i \cap A_8^i| + |A_5^i \cap A_8^i| \\
&= 125 + 125 + 128 \\
&= 378
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 378 \text{ สำหรับ } i = 1$$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 2$

$$\text{จะได้ } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i)$$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 2, R_y = j, j = 128, 129, 130, \dots, 250 \text{ และ } R_z = j = i + j$$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq i + j$ เสมอ

$$\text{ดังนั้น } (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 2$$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 2, R_y = j, j = 129, 130, 131, \dots, 252 \text{ และ } R_z = j = j - i$$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq j - i$ เสมอ

$$\text{ดังนั้น } (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 2$$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 2, R_y = j, j = 129, 130, 131, \dots, 250 \text{ และ } R_z = i + j = j - i$$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $i + j \neq j - i$ เสมอ

$$\text{ดังนั้น } (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 2$$

$$\begin{aligned}
&\text{เนื่องจาก } (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset, (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset \text{ และ } (A_4^i \cap A_8^i) \cap \\
&(A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset \text{ ใช้ทฤษฎีบท 1.4 โดย } |A_3^i \cap A_8^i| = 127 - 2 = 125, |A_4^i \cap A_8^i| = \frac{250-2}{2} = 124 \text{ และ} \\
&|A_5^i \cap A_8^i| = \frac{254-3(2)}{2} = 124
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า } |(A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i)| &= |A_3^i \cap A_8^i| + |A_4^i \cap A_8^i| + |A_5^i \cap A_8^i| \\
&= 125 + 124 + 124 \\
&= 373
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 373 \text{ สำหรับ } i = 2$$

กรณีที 3 สำหรับ $i = 3$

$$\text{จะได้ } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\text{พิจารณา } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i)$$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 3, R_y = i = j \text{ และ } R_z = j = 252$$

เนื่องจาก $i = j = 3$ แต่ $j = 252$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 3$$

$$\text{พิจารณา } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 3, R_y = i = j \text{ และ } R_z = i + j = 252$$

เนื่องจาก $i = j = 3$ จึงได้ว่า $i + j = 3 + 3 = 6 \neq 252$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 3$$

$$\text{พิจารณา } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 3, R_y = i = j \text{ และ } R_z = j - i = 252$$

เนื่องจาก $i = j = 3$ จึงได้ว่า $j - i = 3 - 3 = 0 \neq 252$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 3$$

$$\text{พิจารณา } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 3, R_y = i = j \text{ และ } R_z = 252$$

$$\text{ดังนั้น } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \{(3, 3, 252)\}, i = 3$$

$$\text{ทำให้ } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = 1, i = 3$$

$$\text{พิจารณา } (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 3, R_y = j, j = 128, 129, 130, \dots, 249 \text{ และ } R_z = j = i + j$$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq i + j$ เสมอ

$$\text{ดังนั้น } (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 3$$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_x = i = 3, R_y = j, j = 129, 130, 131, \dots, 251$ และ $R_z = j = j - i$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq j - i$ เสมอ

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 3$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_x = i = 3, R_y = j, j = 128, 129, 130, \dots, 251$ และ $R_z = j = 252$

เนื่องจาก $j = 128, 129, 130, \dots, 251$ จึงได้ว่า $j \neq 252$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 3$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_x = i = 3, R_y = j, j = 129, 130, 131, \dots, 249$ และ $R_z = i + j = j - i$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $i + j \neq j - i$ เสมอ

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 3$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_x = i = 3, R_y = j, j = 126, 127, 128, \dots, 249$ และ $R_z = i + j = 252$

เนื่องจาก $i = 3$ จึงได้ว่า $i + j = 3 + j = 252$

$$j = 249$$

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \{(3, 249, 252)\}, i = 3$

ทำให้ $|(A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = 1, i = 3$

พิจารณา $(A_5^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

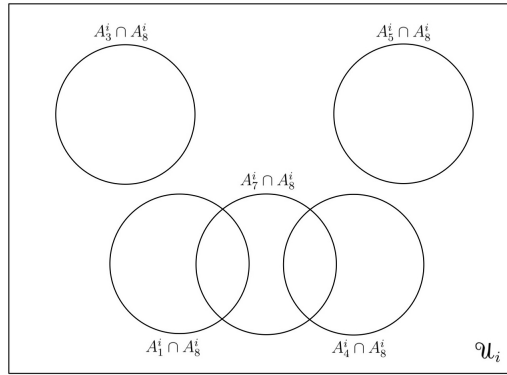
ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_5^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_x = i = 3, R_y = j, j = 129, 130, 131, \dots, 251$ และ $R_z = j - i = 252$

เนื่องจาก $i = 3$ จึงได้ว่า $j - i = j - 3 = 252$

$$j = 255 \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

ดังนั้น $(A_5^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \emptyset, i = 3$



พิจารณา $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)|$

ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cap A_8^i| = 3 - 2 = 1$, $|A_7^i \cap A_8^i| = 249$ และ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| &= |A_1^i \cap A_8^i| + |A_7^i \cap A_8^i| - |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| \\ &= 1 + 249 - 1 \\ &= 249 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = 249$, $i = 3$

พิจารณา $|((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = |(A_7^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = 1$

ดังนั้น $|((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = 1$, $i = 3$

และ พิจารณา $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)|$

ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = 249$, $|A_4^i \cap A_8^i| = \frac{251-3}{2} = 124$ และ $|((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| &= |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| + |A_4^i \cap A_8^i| - |((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| \\ &= 249 + 124 - 1 \\ &= 372 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| = 372$, $i = 3$

เนื่องจาก $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset$, $(A_3^i \cap A_8^i) \cap ((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)) = \emptyset$ และ $(A_5^i \cap A_8^i) \cap ((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)) = \emptyset$ ใช้ทฤษฎีบท 1.4 โดย $|A_3^i \cap A_8^i| = 127 - 3 = 124$, $|A_5^i \cap A_8^i| = \frac{255-3(3)}{2} = 123$ และ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| = 372$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| &= |A_3^i \cap A_8^i| + |A_5^i \cap A_8^i| + |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| \end{aligned}$$

$$= 124 + 123 + 372$$

$$= 619$$

ดังนั้น $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 619$ สำหรับ $i = 3$

กรณีที่ 4 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

$$\begin{aligned} &\text{จะได้ } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup \\ &(A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \end{aligned}$$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 4, 6, 8, \dots, 84$ และ $R_y = i = j, j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$

เนื่องจาก $i = 4, 6, 8, \dots, 84$ แต่ $i = j, j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$

ทำให้ $i \neq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_y = i = j, j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252 - i$ และ $R_z = k = i + j, 255 - i \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $k = 2i$

จาก $255 - i \leq k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - i \leq 2i \leq 252$

พิจารณา $255 - i \leq 2i$

$$255 \leq 3i$$

$85 \leq i$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_y = i = j, j = \frac{256+i}{2}, \dots, 254 - i$ และ $R_z = j - i, 255 - i \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $j - i = 0$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = i = j, j = 3, 4, 5, \dots, i-1$

เนื่องจาก $i = j$ และ $j = 3, 4, 5, \dots, i-1$

จะได้ว่า $j \leq i-1 < i$

ทำให้ $i \neq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 4, 6, 8, \dots, 84, R_y = i = j, j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i$ และ $R_z = k, 255-i \leq k \leq 252\}$

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} = \{(i, i, k) | 255-i \leq k \leq 252\}$

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}| = 252 - (255-i) + 1 = i-2$

จากทั้งสองกรณี

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cup A_8^i)| = 0 + i - 2 = i - 2$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_z = j = i + j$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq i + j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_z = j = j - i$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq j - i$ เสมอ

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 4, 6, 8, \dots, 84$ และ $R_y = j$

จาก $j = 3, 4, 5, \dots, i-1$ สำหรับ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

พิจารณา $i-1$

เนื่องจาก i ที่มีค่ามากที่สุดคือ 84 ทำให้ $i-1 = 83$

แต่ $j = 128, 129, 130, \dots, 254-i$ สำหรับ $(A_3^i \cap A_8^i)$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = j, j = 128, 129, 130, \dots, 254-i$ และ $R_z = j = k, 255-i \leq k \leq 252$

จาก $255-i \leq j = k \leq 252$

พิจารณา $255-i \leq j$

เนื่องจาก j ที่มีค่ามากที่สุดคือ $254-i$

จะได้ว่า $255-i \leq j \leq 254-i$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} = \emptyset$

จากทั้งสองกรณี

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_z = i + j = j - i$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $i + j \neq j - i$ เสมอ

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq$

$$k \leq 252\}$$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 4, 6, 8, \dots, 84, R_y = j, j = \frac{256-i}{2}, \dots, \min\{i-1, 252-i\} = i-1$

$$\text{พิจารณา } \frac{256-i}{2} \leq i-1$$

$$256-i \leq 2i-2$$

$$258 \leq 3i$$

$$86 \leq i \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

$$\text{ดังนั้น } (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i$
และ $255-i \leq k \leq 252\}$

$$\text{จะได้ว่า } R_y = j, j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252-i, R_z = i+j = k, 255-i \leq k \leq 252$$

$$\text{จาก } 255-i \leq i+j = k \leq 252$$

$$\text{พิจารณา } 255-i \leq i+j$$

$$255-2i \leq j$$

$$\text{จึงได้ว่า } j = \max\{\frac{256-i}{2}, 255-2i\}, \dots, 252-i$$

เนื่องจาก $i \leq 84$

$$3i \leq 252$$

$$256-i \leq 256+252-4i$$

$$256-i \leq 508-4i$$

$$\frac{256-i}{2} \leq 254-2i < 255-2i$$

$$\text{จึงได้ว่า } \max\{\frac{256-i}{2}, 255-2i\} = 255-2i$$

$$\text{ทำให้ } j = 255-2i, \dots, 252-i$$

$$\text{พิจารณา } 255-2i \leq 252-i$$

$$3 \leq i$$

$$\text{ดังนั้น } (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} = \\ \{(i, j, i+j) | j = 255-2i, \dots, 252-i\}$$

$$\text{จึงได้ว่า มี } j \text{ ที่แตกต่างกันทั้งหมด สำหรับ } i \text{ ค่าหนึ่งคือ } 252-i-(255-2i)+1 = i-2$$

$$\text{ทำให้ } |(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}| = i-2$$

จากทั้งสองกรณี

ทำให้ $|(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 0 + i - 2 = i - 2$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

พิจารณา $(A_5^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_5^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_5^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = j, j = \frac{256+i}{2}, \dots, \min\{i-1, 254-i\} = i-1$

พิจารณา $\frac{256+i}{2} \leq i-1$

$$256 + i \leq 2i - 2$$

$258 \leq i$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_5^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_5^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_z = j - i = k, 255 - i \leq k \leq 252$

จาก $255 - i \leq j - i = k \leq 252$

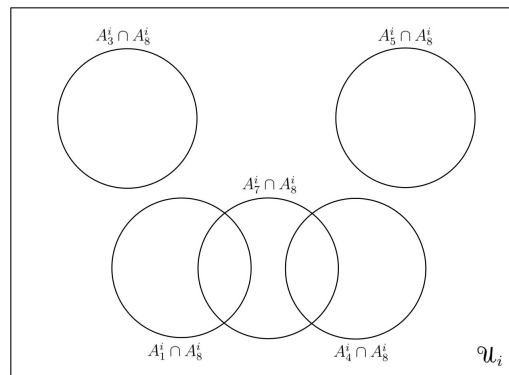
พิจารณา $255 - i \leq j - i$

$255 \leq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_5^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} = \emptyset$

จากทั้งสองกรณี

ดังนั้น $(A_5^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$



พิจารณา $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)|$

ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cap A_8^i| = i - 2, |A_7^i \cap A_8^i| = \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2)$ และ

$$|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = i - 2$$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| &= |A_1^i \cap A_8^i| + |A_7^i \cap A_8^i| - |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| \\
&= i - 2 + \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2) - (i - 2) \\
&= \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

$$\text{และ พิจารณา } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)|$$

$$\begin{aligned}
&\text{ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2), |A_4^i \cap A_8^i| = \\
&\frac{250-i}{2} \text{ และ } |((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = i - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| \\
&= |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| + |A_4^i \cap A_8^i| - |((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| \\
&= \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2) + \frac{250-i}{2} - (i - 2) \\
&= \frac{-3i^2 + 510i - 760}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| = \frac{-3i^2 + 510i - 760}{2}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

จากแผนภาพจะได้ว่า $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset$, $(A_3^i \cap A_8^i) \cap ((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)) = \emptyset$ และ $(A_5^i \cap A_8^i) \cap ((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)) = \emptyset$

$$\begin{aligned}
&\text{ใช้ทฤษฎีบท 1.4 โดย } |A_3^i \cap A_8^i| = 127 - i, |A_5^i \cap A_8^i| = \frac{254-3i}{2} \text{ และ } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| = \\
&\frac{-3i^2 + 510i - 760}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| \\
&= |A_3^i \cap A_8^i| + |A_5^i \cap A_8^i| + |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| \\
&= 127 - i + \frac{254-3i}{2} + \left(\frac{-3i^2 + 510i - 760}{2} \right) \\
&= \frac{-3i^2 + 505i - 252}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2 + 505i - 252}{2}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$

กรณีที 5 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup \\
&(A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)
\end{aligned}$$

$$\text{พิจารณา } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i)$$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 5, 7, 9, \dots, 83$ และ $R_y = i = j, j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$

เนื่องจาก $i = 5, 7, 9, \dots, 83$ แต่ $i = j, j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$

ทำให้ $i \neq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 5, 7, 9, \dots, 83, R_y = i = j, j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252 - i$ และ $R_z = k =$

$$i + j, 255 - i \leq k \leq 252$$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $k = 2i$

$$\text{จาก } 255 - i \leq k \leq 252$$

$$\text{จึงได้ว่า } 255 - i \leq 2i \leq 252$$

$$\text{พิจารณา } 255 - i \leq 2i$$

$$255 \leq 3i$$

$$85 \leq i \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_y = i = j, j = \frac{255+i}{2}, \dots, 254 - i$ และ $R_z = j - i, 255 - i \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $j - i = 0$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq$

$$k \leq 252\}$$

จะได้ว่า $R_y = i = j, j = 3, 4, 5, \dots, i-1$

เนื่องจาก $i = j$ และ $j = 3, 4, 5, \dots, i-1$

จะได้ว่า $j \leq i-1 < i$

ทำให้ $i \neq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2 \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 5, 7, 9, \dots, 83, R_y = i = j, j = i, i+1, i+2 \dots, 254-i$ และ $R_z = k, 255-i \leq k \leq 252$

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2 \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \{(i, j, k) | 255-i \leq k \leq 252\}$

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2 \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}| = 252 - (255-i) + 1 = i-2$

จากทั้งสองกรณี

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cup A_8^i)| = 0 + i - 2 = i - 2$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_z = j = i + j$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq i + j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_z = j = j - i$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq j - i$ เสมอ

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 4, 6, 8, \dots, 84$ และ $R_y = j$

จาก $j = 3, 4, 5, \dots, i-1$ สำหรับ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

พิจารณา $i - 1$

เนื่องจาก i ที่มีค่ามากที่สุดคือ 83 ทำให้ $i - 1 = 82$

แต่ $j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$ สำหรับ $(A_3^i \cap A_8^i)$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} = \emptyset$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = j, j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$ และ $R_z = j = k, 255 - i \leq k \leq 252$

จาก $255 - i \leq j = k \leq 252$

พิจารณา $255 - i \leq j$

เนื่องจาก j ที่มีค่ามากที่สุดคือ $254 - i$

จะได้ว่า $255 - i \leq j \leq 254 - i$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\} = \emptyset$

จากทั้งสองกรณี

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_z = i + j = j - i$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $i + j \neq j - i$ เสมอ

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = j, j = \frac{255-i}{2}, \dots, \min\{i - 1, 252 - i\} = i - 1$

พิจารณา $\frac{255-i}{2} \leq i - 1$

$$255 - i \leq 2i - 2$$

$$257 \leq 3i$$

$$86 \leq i \text{ เกิดข้อขัดแย้ง}$$

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = j, j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252-i, R_z = i+j = k, 255-i \leq k \leq 252$

จาก $255-i \leq i+j = k \leq 252$

พิจารณา $255-i \leq i+j$

$$255-2i \leq j$$

จึงได้ว่า $j = \max\{\frac{255-i}{2}, 255-2i\}, \dots, 252-i$

เนื่องจาก $i \leq 83$

$$3i \leq 249$$

$$255-i \leq 255+249-4i$$

$$255-i \leq 504-4i$$

$$\frac{255-i}{2} \leq 252-2i < 255-2i$$

จึงได้ว่า $\max\{\frac{255-i}{2}, 255-2i\} = 255-2i$

ทำให้ $j = 255-2i, \dots, 252-i$

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} = \{(i, j, i+j) | j = 255-2i, \dots, 252-i\}$

จึงได้ว่า มี j ที่แตกต่างกันทั้งหมด สำหรับ i ค่าหนึ่งคือ $252-i - (255-2i) + 1 = i-2$

ทำให้ $|(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}| = i-2$
จากทั้งสองกรณี

ทำให้ $|(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 0+i-2 = i-2$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

พิจารณา $(A_5^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_5^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_5^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = j, j = \frac{255+i}{2}, \dots, \min\{i-1, 254-i\} = i-1$

พิจารณา $\frac{255+i}{2} \leq i-1$

$$255+i \leq 2i-2$$

$257 \leq i$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_5^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} = \emptyset$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_5^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_z = j - i = k$, $255 - i \leq k \leq 252$

จาก $255 - i \leq j - i = k \leq 252$

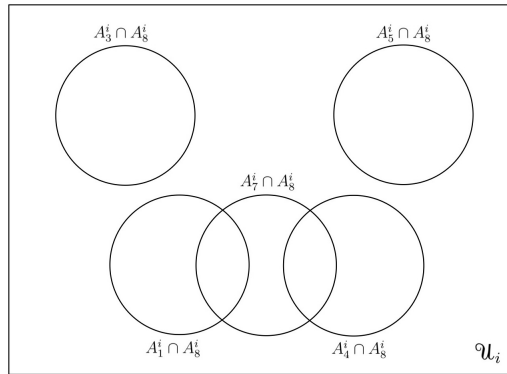
พิจารณา $255 - i \leq j - i$

$255 \leq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_5^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} = \emptyset$

จากทั้งสองกรณี

ดังนั้น $(A_5^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$



พิจารณา $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)|$

ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cap A_8^i| = i - 2$, $|A_7^i \cap A_8^i| = \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2)$ และ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = i - 2$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| &= |A_1^i \cap A_8^i| + |A_7^i \cap A_8^i| - |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| \\ &= i - 2 + \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2) - (i - 2) \\ &= \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2)$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

และ พิจารณา $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)|$

ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2)$, $|A_4^i \cap A_8^i| = \frac{251-i}{2}$ และ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = i - 2$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| \\
& = |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| + |A_4^i \cap A_8^i| - |((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| \\
& = \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255-2i)(i-2) + \frac{251-i}{2} - (i-2) \\
& = \frac{-3i^2+510i-759}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| = \frac{-3i^2+510i-759}{2}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

จากแผนภาพจะได้ว่า $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_5^i \cap A_8^i) = \emptyset$, $(A_3^i \cap A_8^i) \cap ((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)) = \emptyset$ และ $(A_5^i \cap A_8^i) \cap ((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)) = \emptyset$

ใช้ทฤษฎีบท 1.4 โดย $|A_3^i \cap A_8^i| = 127 - i$, $|A_5^i \cap A_8^i| = \frac{255-3i}{2}$ และ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| = \frac{-3i^2+510i-759}{2}$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_5^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| \\
& = |A_3^i \cap A_8^i| + |A_5^i \cap A_8^i| + |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| \\
& = 127 - i + \frac{255-3i}{2} + \left(\frac{-3i^2+510i-759}{2}\right) \\
& = \frac{-3i^2+505i-250}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+505i-250}{2}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$

กรณีที่ 6 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

$$A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)$$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i)$$

จะได้ว่า $R_x = i$, $i = 85, 87, 89, \dots, 125$ และ $R_y = i = j$, $j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$

เนื่องจาก $i = 85, 87, 89, \dots, 125$ แต่ $i = j$, $j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$

ทำให้ $i \neq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$$

จะได้ว่า $R_x = i$, $i = 85, 87, 89, \dots, 125$, $R_y = i = j$, $j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252 - i$ และ

$$R_z = k = i + j, 255 - i \leq k \leq 252$$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $k = 2i$

จาก $255 - i \leq k \leq 252$

จึงได้ว่า $255 - i \leq 2i \leq 252$

พิจารณา $255 - i \leq 2i$

$$255 \leq 3i$$

$$85 \leq i$$

และพิจารณา $2i \leq 252$

$$i \leq 126$$

จากเงื่อนไขของค่า R_z จะได้ว่า $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \{(i, i, 2i)\}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = 1$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = i = j, j = 3, 4, 5, \dots, i-1$

เนื่องจาก $i = j$ และ $j = 3, 4, 5, \dots, i-1$

จะได้ว่า $j \leq i-1 < i$

ทำให้ $i \neq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 85, 87, 89, \dots, 125, R_y = i = j, j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i$ และ $R_z = k, 255-i \leq k \leq 252\}$

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} = \{(i, i, k) | 255-i \leq k \leq 252\}$

จึงได้ว่ามี k ที่แตกต่างกันทั้งหมด สำหรับ i ค่าหนึ่งคือ $252 - (255 - i) + 1 = i - 2$

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}| = i - 2$

จากทั้งสองกรณี

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cup A_8^i)| = 0 + i - 2 = i - 2$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_z = j = i + j$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq i + j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 85, 87, 89, \dots, 125$ และ $R_y = j$

จาก $j = 3, 4, 5, \dots, i-1$ สำหรับ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

พิจารณา $i-1$

เนื่องจาก i ที่มีค่ามากที่สุดคือ 125 ทำให้ $i-1 = 124$

แต่ $j = 128, 129, 130, \dots, 254-i$ สำหรับ $(A_3^i \cap A_8^i)$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = j, j = 128, 129, 130, \dots, 254-i$ และ $R_z = j = k, 255-i \leq k \leq 252$

จาก $255-i \leq j = k \leq 252$

พิจารณา $255-i \leq j$

จะได้ว่า $255-i \leq j \leq 254-i$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} = \emptyset$

จากทั้งสองกรณี

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 85, 87, 89, \dots, 125, R_y = j, j = \frac{255-i}{2}, \dots, \min\{i-1, 252-i\} = i-1$

พิจารณา $\frac{255-i}{2} \leq i-1$

$$255-i \leq 2i-2$$

$$257 \leq 3i$$

$$86 \leq i$$

จากเงื่อนไขของค่า R_y จะได้ว่า $i = 87, 89, 91, \dots, 125$

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$ เมื่อ $i = 85$ และ $(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \{(i, j, i+j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, i-1\}$ เมื่อ $i = 87, 89, 91, \dots, 125$

จึงได้ว่า $|(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}| = 0$ เมื่อ $i = 85$ และ $|(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}| = i-1 - (\frac{255-i}{2}) + 1 = \frac{3i-255}{2}$ เมื่อ $i = 87, 89, 91, \dots, 125$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 85, 87, 89, \dots, 125, R_y = j, j = i, i+1, i+2, \dots, 252-i, R_z = i+j = k, 255-i \leq k \leq 252$

จาก $255-i \leq i+j = k \leq 252$

พิจารณา $255-i \leq i+j$

$$255-2i \leq j$$

จึงได้ว่า $j = \max\{i, 255-2i\}, \dots, 252-i$

เนื่องจาก $i \geq 85$

$$3i \geq 255$$

$$i \geq 255-2i$$

จึงได้ว่า $\max\{i, 255-2i\} = i$

ทำให้ $j = i, i + 1, i + 2, \dots, 252 - i$

พิจารณา $i \leq 252 - i$

$$2i \leq 252$$

$$i \leq 126$$

จากเงื่อนไขของค่า R_z จะได้ว่า $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

$$\begin{aligned} & \text{ดังนั้น } (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\} = \\ & \{(i, j, i + j) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 252 - i\} \end{aligned}$$

จึงได้ว่า มี j ที่แตกต่างกันทั้งหมด สำหรับ i ค่าหนึ่งคือ $252 - i - i + 1 = 253 - 2i$

$$\begin{aligned} & \text{ทำให้ } |(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}| = \\ & 253 - 2i \end{aligned}$$

จากทั้งสองกรณี

$$\begin{aligned} & \text{ทำให้ } |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 0 + 253 - 2i = 253 - 2i \text{ สำหรับ } i = 85 \text{ และ } |(A_4^i \cap \\ & A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{3i-255}{2} + 253 - 2i = \frac{251-i}{2} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคี่ สำหรับ } i = 87, 89, 91, \dots, 125 \end{aligned}$$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in ((A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \{(i, i, 2i)\} \cap (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\begin{aligned} & \text{พิจารณา } (R_x, R_y, R_z) \in \{(i, i, 2i)\} \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } \\ & 255 - i \leq k \leq 252\} \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i, i = 85, 87, 89, \dots, 125, R_y = i = j, R_z = 2i = k, 255 - i \leq k \leq 252$$

$$\text{จาก } 255 - i \leq 2i = k \leq 252$$

$$\text{พิจารณา } 255 - i \leq 2i$$

$$255 \leq 3i$$

$$85 \leq i$$

$$\text{และพิจารณา } 2i \leq 252$$

$$i \leq 126$$

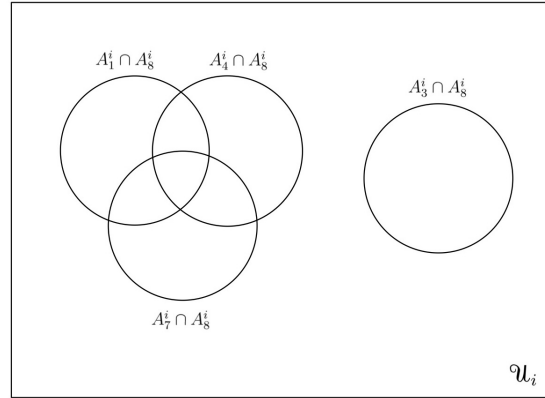
จากเงื่อนไขของค่า R_z จะได้ว่า $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

$$\begin{aligned} & \text{ดังนั้น } \{(i, i, 2i)\} \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\} = \\ & \{(i, i, 2i)\} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคี่ สำหรับ } i = 85, 87, 89, \dots, 125 \end{aligned}$$

$$\text{ทำให้ } |\{(i, i, 2i)\} \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}| = 1$$

เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$

ดังนั้น $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 1$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$



พิจารณา $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)|$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 85$

ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cap A_8^i| = 85 - 2 = 83$, $|A_4^i \cap A_8^i| = \frac{251-85}{2} = 83$, $|A_7^i \cap A_8^i| = \frac{(85-3)(85-2)}{2} + (255 - 2(85))(85 - 2) = 3403 + 7055 = 10458$, $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = 1$, $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 85 - 2 = 83$, $|(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 253 - 2(85) = 83$ และ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 1$

$$\begin{aligned}
 & \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| \\
 &= |A_1^i \cap A_8^i| + |A_4^i \cap A_8^i| + |A_7^i \cap A_8^i| - |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| - |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| \\
 & \quad - |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| + |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| \\
 &= 83 + 83 + 10458 - 1 - 83 - 83 + 1 \\
 &= 10458
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = 10458$ สำหรับ $i = 85$

กรณีที่ 2 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 87, 89, 91, \dots, 125$

ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cap A_8^i| = i - 2$, $|A_4^i \cap A_8^i| = \frac{251-i}{2}$, $|A_7^i \cap A_8^i| = \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i-2)$, $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = 1$, $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = i - 2$, $|(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{251-i}{2}$ และ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 1$

จะได้ว่า $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)|$

$$\begin{aligned}
&= |A_1^i \cap A_8^i| + |A_4^i \cap A_8^i| + |A_7^i \cap A_8^i| - |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| - |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| \\
&\quad - |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| + |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| \\
&= i - 2 + \frac{251-i}{2} + \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255 - 2i)(i - 2) - 1 - (i - 2) - \left(\frac{251-i}{2}\right) + 1 \\
&= \frac{-3i^2+513i-1014}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{-3i^2+513i-1014}{2}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 87, 89, 91, \dots, 125$

จากแผนภาพจะได้ว่า $((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_3^i \cap A_8^i) = \emptyset$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 85$

ใช้ทฤษฎีบท 1.4 โดย $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = 10458$ และ $|A_3^i \cap A_8^i| = 127 - 85 = 42$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } |((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cup (A_3^i \cap A_8^i)| \\
&= |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| + |A_3^i \cap A_8^i| \\
&= 10458 + 42 \\
&= 10500
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 10500$ สำหรับ $i = 85$

กรณีที่ 2 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 87, 89, 91, \dots, 125$

ใช้ทฤษฎีบท 1.4 โดย $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{-3i^2+513i-1014}{2}$ และ $|A_3^i \cap A_8^i| = 127 - i$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } |((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cup (A_3^i \cap A_8^i)| \\
&= |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| + |A_3^i \cap A_8^i| \\
&= \frac{-3i^2+513i-1014}{2} + 127 - i \\
&= \frac{-3i^2+511i-760}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+511i-760}{2}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 87, 89, 91, \dots, 125$

กรณีที่ 7 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

$$A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_3^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)$$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i)$$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 86, 88, 90, \dots, 126$ และ $R_y = i = j, j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$

เนื่องจาก $i = 86, 88, 90, \dots, 126$ แต่ $i = j, j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$

ทำให้ $i \neq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_3^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 86, 88, 90, \dots, 126, R_y = i = j, j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252 - i$ และ

$$R_z = k = i + j, 255 - i \leq k \leq 252$$

เนื่องจาก $i = j$ จึงได้ว่า $k = 2i$

$$\text{จาก } 255 - i \leq k \leq 252$$

$$\text{จึงได้ว่า } 255 - i \leq 2i \leq 252$$

$$\text{พิจารณา } 255 - i \leq 2i$$

$$255 \leq 3i$$

$$85 \leq i$$

$$\text{และพิจารณา } 2i \leq 252$$

$$i \leq 126$$

จากเงื่อนไขของค่า R_z จะได้ว่า $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \{(i, i, 2i)\}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = 1$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

$$\text{จะได้ว่า } R_y = i = j, j = 3, 4, 5, \dots, i-1$$

เนื่องจาก $i = j$ และ $j = 3, 4, 5, \dots, i-1$

$$\text{จะได้ว่า } j \leq i-1 < i$$

ทำให้ $i \neq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$$

กรณีที 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2 \dots, 254-i$
และ $255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 86, 88, 90, \dots, 126, R_y = i = j, j = i, i+1, i+2 \dots, 254-i$ และ
 $R_z = k, 255-i \leq k \leq 252\}$

ดังนั้น $(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2 \dots, 254-i$ และ $255-i \leq k \leq 252\} =$
 $\{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2 \dots, 254-i$ และ $255-i \leq k \leq 252\}$

จึงได้ว่ามี k ที่แตกต่างกันทั้งหมด สำหรับ i ค่าหนึ่งคือ $252 - (255 - i) + 1 = i - 2$

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2 \dots, 254-i$ และ $255-i \leq k \leq 252\}| = i - 2$
จากทั้งสองกรณี

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cup A_8^i)| = 0 + i - 2 = i - 2$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i =$
 $86, 88, 90, \dots, 126$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_z = j = i + j$

เนื่องจาก $i > 0$ จึงได้ว่า $j \neq i + j$ เสมอ

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

พิจารณา $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1$ และ $255-j \leq$
 $k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i, i = 86, 88, 90, \dots, 126$ และ $R_y = j$

จาก $j = 3, 4, 5, \dots, i-1$ สำหรับ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1$ และ $255-j \leq k \leq 252\}$

พิจารณา $i - 1$

เนื่องจาก i ที่มีค่ามากที่สุดคือ 126 ทำให้ $i - 1 = 125$

แต่ $j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$ สำหรับ $(A_3^i \cap A_8^i)$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1$ และ $255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2 \dots, 254-i$
และ $255-i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = j, j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i$ และ $R_z = j = k, 255 - i \leq k \leq 252$

จาก $255 - i \leq j = k \leq 252$

พิจารณา $255 - i \leq j$

จะได้ว่า $255 - i \leq j \leq 254 - i$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\} = \emptyset$

จากทั้งสองกรณี

ดังนั้น $(A_3^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = j, j = \frac{256-i}{2}, \dots, \min\{i - 1, 252 - i\} = i - 1$

พิจารณา $\frac{256-i}{2} \leq i - 1$

$$256 - i \leq 2i - 2$$

$$258 \leq 3i$$

$$86 \leq i$$

จากเงื่อนไขของค่า R_y จะได้ว่า $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} = \{(i, j, i + j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, i - 1\}$

จึงได้ว่า $|(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}| = i - 1 - (\frac{256-i}{2}) + 1 = \frac{3i-256}{2}$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_y = j, j = i, i + 1, i + 2, \dots, 252 - i, R_z = i + j = k, 255 - i \leq k \leq 252$

จาก $255 - i \leq i + j = k \leq 252$

พิจารณา $255 - i \leq i + j$

$$255 - 2i \leq j$$

จึงได้ว่า $j = \max\{i, 255 - 2i\}, \dots, 252 - i$

เนื่องจาก $i \geq 86$

$$3i \geq 258$$

$$i \geq 258 - 2i > 255 - 2i$$

จึงได้ว่า $\max\{i, 255 - 2i\} = i$

ทำให้ $j = i, i + 1, i + 2, \dots, 252 - i$

พิจารณา $i \leq 252 - i$

$$2i \leq 252$$

$$i \leq 126$$

จากเงื่อนไขของค่า R_z จะได้ว่า $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

$$\begin{aligned} & \text{ดังนั้น } (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\} = \\ & \{(i, j, i + j) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 252 - i\} \end{aligned}$$

จึงได้ว่า มี j ที่แตกต่างกันทั้งหมด สำหรับ i ค่าหนึ่งคือ $252 - i - i + 1 = 253 - 2i$

$$\begin{aligned} & \text{ทำให้ } |(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}| = \\ & 253 - 2i \end{aligned}$$

จากทั้งสองกรณี

$$\begin{aligned} & \text{ทำให้ } |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{3i-256}{2} + 253 - 2i = \frac{250-i}{2} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคู่ สำหรับ} \\ & i = 86, 88, 90, \dots, 126 \end{aligned}$$

พิจารณา $(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in ((A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \{(i, i, 2i)\} \cap (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\begin{aligned} & \text{พิจารณา } (R_x, R_y, R_z) \in \{(i, i, 2i)\} \cap \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq \\ & k \leq 252\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } R_x = i, i = 86, 88, 90, \dots, 126, R_y = i = j, j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i, \\ & R_z = 2i = k, 255 - i \leq k \leq 252 \end{aligned}$$

$$\text{จาก } 255 - i \leq 2i = k \leq 252$$

$$\text{พิจารณา } 255 - i \leq 2i$$

$$255 \leq 3i$$

$$85 \leq i$$

$$\text{และพิจารณา } 2i \leq 252$$

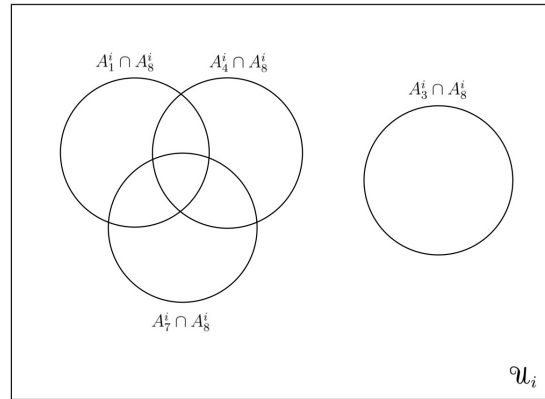
$$i \leq 126$$

จากเงื่อนไขของค่า R_z จะได้ว่า $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

$$\text{ดังนั้น } \{(i, i, 2i)\} \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\} = \{(i, i, 2i)\}$$

$$\text{ทำให้ } |\{(i, i, 2i)\} \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-i \leq k \leq 252\}| = 1$$

$$\text{ดังนั้น } |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 1 \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคู่ สำหรับ } i = 86, 88, 90, \dots, 126$$



$$\text{พิจารณา } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)|$$

$$\text{ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย } |A_1^i \cap A_8^i| = i-2, |A_4^i \cap A_8^i| = \frac{250-i}{2}, |A_7^i \cap A_8^i| = \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255-2i)(i-2),$$

$$|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = 1, |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = i-2, |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{250-i}{2}$$

$$\text{และ } |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 1$$

$$\text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)|$$

$$= |A_1^i \cap A_8^i| + |A_4^i \cap A_8^i| + |A_7^i \cap A_8^i| - |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| - |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)|$$

$$- |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| + |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)|$$

$$= i-2 + \frac{250-i}{2} + \frac{(i-3)(i-2)}{2} + (255-2i)(i-2) - 1 - (i-2) - \left(\frac{250-i}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{-3i^2+513i-1014}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{-3i^2+513i-1014}{2} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนคู่ สำหรับ } i = 86, 88, 90, \dots, 126$$

$$\text{จากแผนภาพจะได้ว่า } ((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_3^i \cap A_8^i) = \emptyset$$

$$\text{ใช้ทฤษฎีบท 1.4 โดย } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{-3i^2+513i-1014}{2} \text{ และ } |A_3^i \cap A_8^i| = 127-i$$

$$\begin{aligned}
& \text{จะได้ว่า } |((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cup (A_3^i \cap A_8^i)| \\
& = |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| + |A_3^i \cap A_8^i| \\
& = \frac{-3i^2+513i-1014}{2} + 127 - i \\
& = \frac{-3i^2+511i-760}{2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+511i-760}{2}$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่
สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$

กรณีที่ 8 สำหรับ $i = 127$

$$\text{จะได้ } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\text{พิจารณา } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 127 \text{ และ } R_y = i = j, j = 64, 65, 66, \dots, 125$$

$$\text{เนื่องจาก } i = 127 \text{ แต่ } i = j = 64, 65, 66, \dots, 125$$

ทำให้ $i \neq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_4^i \cap A_8^i) = \emptyset \text{ สำหรับ } i = 127$$

$$\text{พิจารณา } (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 127 \text{ และ } R_y = i = j, j = 3, 4, 5, \dots, 126$$

$$\text{เนื่องจาก } i = j \text{ และ } j = 3, 4, 5, \dots, 126$$

ทำให้ $i \neq j$ เกิดข้อขัดแย้ง

$$\text{ดังนั้น } (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i-1 \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \emptyset$$

$$\text{กรณีที่ 2 พิจารณา } (R_x, R_y, R_z) \in (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, 127, k) | 128 \leq k \leq 252\}$$

$$\text{จะได้ว่า } R_x = i = 127, R_y = i = 127 \text{ และ } R_z = k, 128 \leq k \leq 252\}$$

$$\text{ดังนั้น } (A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\} = \{(127, 127, k) | 255-i \leq k \leq 252\}$$

$$\text{จึงได้ว่า มี } k \text{ ที่แตกต่างกันทั้งหมด คือ } 252 - 128 + 1 = 125$$

$$\text{ทำให้ } |(A_1^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = i, i+1, i+2, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}| = 125$$

จากทั้งสองกรณี

ทำให้ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cup A_8^i)| = 0 + 125 = 125$ สำหรับ $i = 127$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

กรณีที่ 1 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 126 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i = 127, R_y = j, j = 64, 65, 66, \dots, 125$ และ $R_z = i + j = k, 255 - j \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - j \leq i + j = k \leq 252$

พิจารณา $255 - j \leq i + j$

$$255 - i \leq 2j$$

$$\frac{255-i}{2} \leq j$$

จึงได้ว่า $j = \frac{255-i}{2} = \frac{255-127}{2} = 64, \dots, 125$

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 126 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} = \{(i, j, i + j) | j = 64, 65, 66, \dots, 125\}$

ทำให้ $|(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 126 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}| = 125 - 64 + 1 = 62$

กรณีที่ 2 พิจารณา $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, 127, k) | 128 \leq k \leq 252\}$

จะได้ว่า $R_x = i = 127$ และ $R_y = j$

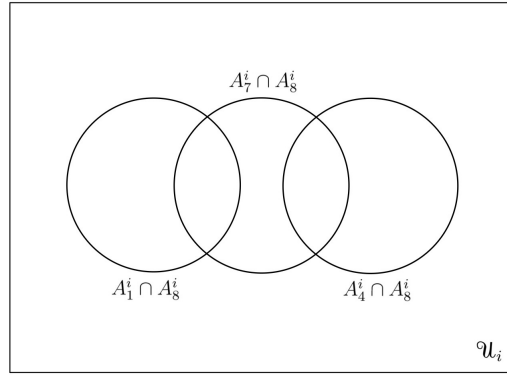
จาก $j = 127$ สำหรับ $\{(i, 127, k) | 128 \leq k \leq 252\}$

แต่ $j = 64, 65, 66, \dots, 125$ สำหรับ $(A_4^i \cap A_8^i)$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(A_4^i \cap A_8^i) \cap \{(i, 127, k) | 128 \leq k \leq 252\} = \emptyset$

จากทั้งสองกรณี

ทำให้ $|(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 62 + 0 = 62$ สำหรับ $i = 127$



พิจารณา $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)|$

ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cap A_8^i| = 127 - 2 = 125$, $|A_7^i \cap A_8^i| = 7750 + (255 - 2(127))(127 - 2) = 7875$ และ $|(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 125$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| &= |A_1^i \cap A_8^i| + |A_7^i \cap A_8^i| - |(A_1^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| \\ &= 125 + 7875 - 125 \\ &= 7875 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = 7875$ สำหรับ $i = 127$

และ พิจารณา $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)|$

ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| = 7875$, $|A_4^i \cap A_8^i| = 62$ และ $|((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| = |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = 62$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i) \cup (A_4^i \cap A_8^i)| &= |(A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| + |A_4^i \cap A_8^i| - |((A_1^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)) \cap (A_4^i \cap A_8^i)| \\ &= 7875 + 62 - 62 \\ &= 7875 \end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 7875$ สำหรับ $i = 127$

กรณีที่ 9 เมื่อ i เป็นจำนวนเต็มคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 248$

$$\text{จะได้ } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)$$

พิจารณา $(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

ให้ $(R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$

จะได้ว่า $R_y = j$, $j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252 - i$ และ $R_z = i + j = k$, $255 - j \leq k \leq 252$

เนื่องจาก $255 - j \leq i + j = k \leq 252$

พิจารณา $255 - j \leq i + j$

$$255 - i \leq 2j$$

$$\frac{255-i}{2} \leq j$$

$$\text{จึงได้ว่า } j = \max\{\frac{255-i}{2}, \frac{256-i}{2}\} = \frac{256-i}{2}$$

$$\text{ทำให้ } j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252 - i$$

$$\text{พิจารณา } \frac{256-i}{2} \leq 252 - i$$

$$256 - i \leq 504 - 2i$$

$$i \leq 248$$

$$\text{ดังนั้น } (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \{(i, j, k) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252 - i\}$$

$$\text{จึงได้ว่า มี } j \text{ ที่แตกต่างกันทั้งหมด สำหรับ } i \text{ ค่าหนึ่งคือ } 252 - i - (\frac{256-i}{2}) + 1 = \frac{250-i}{2}$$

$$\text{ทำให้ } |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{250-i}{2} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ สำหรับ } i = 128, 130, 132, \dots, 248$$

$$\text{ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย } |(A_4^i \cap A_8^i)| = \frac{250-i}{2}, |(A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2} \text{ และ } |(A_4^i \cap A_8^i) \cap$$

$$(A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{250-i}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| &= |A_4^i \cup A_8^i| + |A_7^i \cup A_8^i| - |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| \\ &= \frac{250-i}{2} + \frac{(252-i)(253-i)}{2} - \left(\frac{250-i}{2}\right) \\ &= \frac{(252-i)(253-i)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}$$

$$\text{สำหรับ } i = 128, 130, 132, \dots, 248$$

$$\text{กรณีที่ 10 เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ สำหรับ } i = 129, 131, 133, \dots, 249$$

$$\text{จะได้ } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\text{พิจารณา } (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\text{ให้ } (R_x, R_y, R_z) \in (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\text{จะได้ว่า } R_y = j, j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252 - i \text{ และ } R_z = i + j = k, 255 - j \leq k \leq 252$$

$$\text{เนื่องจาก } 255 - j \leq i + j = k \leq 252$$

$$\text{พิจารณา } 255 - j \leq i + j$$

$$255 - i \leq 2j$$

$$\frac{255-i}{2} \leq j$$

$$\text{ทำให้ } j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252 - i$$

$$\text{พิจารณา } \frac{255-i}{2} \leq 252 - i$$

$$255 - i \leq 504 - 2i$$

$$i \leq 249$$

$$\text{ดังนั้น } (A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i) = \{(i, j, i+j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252-i\}$$

$$\text{จึงได้ว่า มี } j \text{ ที่แตกต่างกันทั้งหมด สำหรับ } i \text{ ค่าหนึ่งคือ } 252 - i - (\frac{255-i}{2}) + 1 = \frac{251-i}{2}$$

$$\text{ทำให้ } |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{251-i}{2} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ สำหรับ } i = 129, 131, 133, \dots, 249$$

$$\text{ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย } |(A_4^i \cap A_8^i)| = \frac{251-i}{2}, |(A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2} \text{ และ } |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| = \frac{251-i}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } |(A_4^i \cap A_8^i) \cup (A_7^i \cap A_8^i)| &= |A_4^i \cap A_8^i| + |A_7^i \cap A_8^i| - |(A_4^i \cap A_8^i) \cap (A_7^i \cap A_8^i)| \\ &= \frac{251-i}{2} + \frac{(252-i)(253-i)}{2} - \left(\frac{251-i}{2}\right) \\ &= \frac{(252-i)(253-i)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2} \text{ เมื่อ } i \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่ สำหรับ } i = 129, 131, 133, \dots, 249$$

$$\text{กรณีที่ 11 สำหรับ } i = 250, 251$$

$$\text{จะได้ } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = (A_7^i \cap A_8^i)$$

$$\text{ดังนั้น } |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = |A_7^i \cap A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2} \text{ สำหรับ } i = 250, 251$$

$$\text{กรณีที่ 12 สำหรับ } i = 252$$

$$\text{จะได้ } A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i) = \emptyset$$

$$\text{ดังนั้น } |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 0 \text{ สำหรับ } i = 252 \quad \square$$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.30 :

1. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ สำหรับ $i = 1$ คือ 32251
2. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ สำหรับ $i = 2$ คือ 32254
3. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ สำหรับ $i = 3$ คือ 32005
4. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$ คือ $i^2 - 254i + 32758$
5. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$ คือ $i^2 - 254i + 32758$

6. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$
คือ $i^2 - 257i + 33055$
7. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$
คือ $i^2 - 257i + 33054$
8. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 16379
9. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 168$
คือ $-i^2 + 253i + 125$
10. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 169$
คือ $-i^2 + 253i + 126$
11. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 170, 172, 174, \dots, 248$
คือ $-i^2 + 256i - 384$
12. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 171, 173, 175, \dots, 249$
คือ $-i^2 + 256i - 383$
13. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ สำหรับ $i = 250$ คือ 1116
14. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ สำหรับ $i = 251$ คือ 872
15. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 624

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.28 จะได้ว่า

1. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 1$ คือ 1254
2. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 2$ คือ 1252
3. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 3, 5, 7, \dots, 83$ คือ $-i^2 + 251i + 755$
4. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$ คือ $-i^2 + 251i + 754$

5. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$ คือ $-i^2 + 251i + 797$
6. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$ คือ $-i^2 + 251i + 796$
7. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 16379
8. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 168$ คือ $-i^2 + 253i + 125$
9. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 169$ คือ $-i^2 + 253i + 126$
10. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 170, 172, 174, \dots, 250$ คือ $-i^2 + 256i - 384$
11. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 171, 173, 175, \dots, 251$ คือ $-i^2 + 256i - 383$
12. $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i|$ สำหรับ $i = 252$ คือ 624

จากทฤษฎีบทประกอบ 2.16 จะได้ว่า สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ เซต A_8^i คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min\{252, 254 - i\} \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\}$, $|A_8^i|$ สำหรับ $i = 1$ คือ 31375 และ $|A_8^i|$ สำหรับ $i = 2, 3, 4, \dots, 252$ คือ $\frac{(252-i)(253-i)}{2}$

และจากทฤษฎีบทประกอบ 2.29 จะได้ว่า

1. สำหรับ $i = 1$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 127, 128, 129, \dots, 251\} \cup \{(i, j, j - i) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 378$
2. สำหรับ $i = 2$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 252\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 127, 128, 129, \dots, 250\} \cup \{(i, j, j - i) | j = 129, 130, 131, \dots, 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 373$

3. สำหรับ $i = 3$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k)\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 251\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 126, 127, 128, \dots, 249\} \cup \{(i, j, j - i) | j = 129, 130, 131, \dots, 251\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 251 \text{ และ } k = 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 619$
4. สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, j - i) | j = \frac{256+i}{2}, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2 + 505i - 252}{2}$
5. สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, j - i) | j = \frac{255+i}{2}, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2 + 505i - 250}{2}$
6. สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2 + 511i - 760}{2}$
7. สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 255 - i \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, j) | j = 128, 129, 130, \dots, 254 - i\} \cup \{(i, j, i + j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252 - i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, i - 1 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, k) | j = i, i + 1, i + 2, \dots, 254 - i \text{ และ } 255 - i \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2 + 511i - 760}{2}$
8. สำหรับ $i = 127$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, i, k) | 128 \leq k \leq 252\} \cup \{(i, j, i + j) | j = 64, 65, 66, \dots, 125\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 126 \text{ และ } 255 - j \leq k \leq 252\} \cup \{(i, 127, k) | 128 \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 7875$

9. สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 248$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, j, i+j) | j = \frac{256-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$
10. สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 249$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, j, i+j) | j = \frac{255-i}{2}, \dots, 252-i\} \cup \{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$
11. สำหรับ $i = 250, 251$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, 254-i \text{ และ } 255-j \leq k \leq 252\}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$
12. สำหรับ $i = 252$ เซต $A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)$ คือ $\emptyset$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 0$

กรณีที่ 1 สำหรับ $i = 1$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = 1254$, $|A_8^i| = 31375$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 378$

$$\begin{aligned}
 & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\
 & = |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup \\
 & A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\
 & = 1254 + 31375 - 378 \\
 & = 32251
 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 สำหรับ $i = 2$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = 1252$, $|A_8^i| = \frac{(252-2)(253-2)}{2} = 31375$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 373$

$$\begin{aligned}
 & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\
 & = |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup \\
 & A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\
 & = 1252 + 31375 - 373 \\
 & = 32254
 \end{aligned}$$

กรณีที่ 3 สำหรับ $i = 3$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -(3)^2 + 251(3) + 755 = 1499$, $|A_8^i| = \frac{(252-3)(253-3)}{2} = 31125$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup$

$$|A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = 619$$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ & = |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup \\ & A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\ & = 1499 + 31125 - 619 \\ & = 32005 \end{aligned}$$

กรณีที่ 4 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 4, 6, 8, \dots, 84$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -i^2 + 251i + 754$, $|A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+505i-252}{2}$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ & = |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup \\ & A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\ & = -i^2 + 251i + 754 + \frac{(252-i)(253-i)}{2} - \left(\frac{-3i^2+505i-252}{2}\right) \\ & = i^2 - 254i + 32758 \end{aligned}$$

กรณีที่ 5 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 5, 7, 9, \dots, 83$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -i^2 + 251i + 755$, $|A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+505i-250}{2}$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ & = |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup \\ & A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\ & = -i^2 + 251i + 755 + \frac{(252-i)(253-i)}{2} - \left(\frac{-3i^2+505i-250}{2}\right) \\ & = i^2 - 254i + 32758 \end{aligned}$$

กรณีที่ 6 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 85, 87, 89, \dots, 125$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -i^2 + 251i + 797$, $|A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+511i-760}{2}$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ & = |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup \\ & A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i^2 + 251i + 797 + \frac{(252-i)(253-i)}{2} - \left(\frac{-3i^2+511i-760}{2} \right) \\
&= i^2 - 257i + 33055
\end{aligned}$$

กรณีี่ 7 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 86, 88, 90, \dots, 126$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -i^2 + 251i + 796$, $|A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{-3i^2+511i-760}{2}$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\
&= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\
&= -i^2 + 251i + 796 + \frac{(252-i)(253-i)}{2} - \left(\frac{-3i^2+511i-760}{2} \right) \\
&= i^2 - 257i + 33054
\end{aligned}$$

กรณีี่ 8 สำหรับ $i = 127$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = 16379$, $|A_8^i| = \frac{(252-127)(253-127)}{2} = 7875$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 7875$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\
&= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\
&= 16379 + 7875 - 7875 \\
&= 16379
\end{aligned}$$

ดังนั้น $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ สำหรับ $i = 127$ คือ 16379

กรณีี่ 9 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 128, 130, 132, \dots, 168$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -i^2 + 253i + 125$, $|A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$

$$\begin{aligned}
&\text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\
&= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\
&= -i^2 + 253i + 125 + \frac{(252-i)(253-i)}{2} - \left(\frac{(252-i)(253-i)}{2} \right) \\
&= -i^2 + 253i + 125
\end{aligned}$$

กรณีี่ 10 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 129, 131, 133, \dots, 169$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -i^2 + 253i + 126$, $|A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$

$$|A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup \\ & A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\ &= -i^2 + 253i + 126 + \frac{(252-i)(253-i)}{2} - \left(\frac{(252-i)(253-i)}{2} \right) \\ &= -i^2 + 253i + 126 \end{aligned}$$

กรณีที่ 11 เมื่อ i เป็นจำนวนคู่ สำหรับ $i = 170, 172, 174, \dots, 248$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -i^2 + 256i - 384$, $|A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup \\ & A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\ &= -i^2 + 256i - 384 + \frac{(252-i)(253-i)}{2} - \left(\frac{(252-i)(253-i)}{2} \right) \\ &= -i^2 + 256i - 384 \end{aligned}$$

กรณีที่ 12 เมื่อ i เป็นจำนวนคี่ สำหรับ $i = 171, 173, 175, \dots, 249$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -i^2 + 256i - 383$, $|A_8^i| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-i)(253-i)}{2}$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup \\ & A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\ &= -i^2 + 256i - 383 + \frac{(252-i)(253-i)}{2} - \left(\frac{(252-i)(253-i)}{2} \right) \\ &= -i^2 + 256i - 383 \end{aligned}$$

กรณีที่ 13 สำหรับ $i = 250$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -(250)^2 + 256(250) - 384 = 1116$, $|A_8^i| = \frac{(252-250)(253-250)}{2} = 3$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-250)(253-250)}{2} = 3$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup \\ & A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \end{aligned}$$

$$= 1116 + 3 - 3$$

$$= 1116$$

กรณีที 14 สำหรับ $i = 251$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = -(251)^2 + 256(251) - 383 = 872$, $|A_8^i| = \frac{(252-251)(253-251)}{2} = 1$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = \frac{(252-251)(253-251)}{2} = 1$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\ &= 872 + 1 - 1 \\ &= 872 \end{aligned}$$

กรณีที 15 สำหรับ $i = 252$ ใช้ทฤษฎีบท 1.5 โดย $|A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| = 624$, $|A_8^i| = \frac{(252-252)(253-252)}{2} = 0$ และ $|A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| = 0$

$$\begin{aligned} & \text{จะได้ว่า } |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ &= |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i| + |A_8^i| - |A_8^i \cap (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i)| \\ &= 624 + 0 - 0 \\ &= 624 \end{aligned}$$

□

บทแทรก 2.31: สำหรับวงกลม 3 วง x, y และ z และ $R_x = i$ สำหรับ $1 \leq i \leq 252$ มีเซตของชุดสี่ (R_x, R_y, R_z) จำนวน $8096508 - |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i|$ ชุดสี่

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.8 จะได้ว่า $|u_i| = 8096508$ สำหรับ $1 \leq i \leq 252$

หาจำนวนเซตของชุดสี่ที่ต้องการ สำหรับ $R_x = i$

$$\begin{aligned} & \text{จะมีค่าเป็น } |u_i - (A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i)| \\ &= |u_i| - |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \\ &= 8096508 - |A_1^i \cup A_2^i \cup A_3^i \cup A_4^i \cup A_5^i \cup A_6^i \cup A_7^i \cup A_8^i| \end{aligned}$$

□

บทที่ 3

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

จากการศึกษาเพื่อหาจำนวนการให้สีวงกลม 2 วงที่ตัดกัน และวงกลม 3 วงที่ตัดกันซึ่งทำให้ทุกบริเวณมีสีต่างกัน จะพิจารณาแค่สีเดียวที่มีค่าความสว่างตั้งแต่ 0 ถึง 255 โดยค่าความสว่างสีของพื้นที่วงกลมที่ซ้อนทับกันคือความสว่างสีของวงกลม 2 วงรวมกัน จะหาจำนวนสมาชิกของเซตของชุดสีที่ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข โดยใช้หลักการเพิ่มเข้าตัดออกแล้วนำมาลบออกจากเอกภพสัมพัทธ์ ซึ่งจะได้ผลการศึกษาสำหรับวงกลม 2 วง x และ y มีชุดสี (R_x, R_y) จำนวน 64262 ชุดสี และผลการศึกษาสำหรับวงกลม 3 วง x, y และ z มีจำนวนเซตของชุดสี สำหรับ $R_x = i$ แต่ละค่าดังบทแทรก 2.31 และ ทฤษฎีบทประกอบ 2.30

บรรณานุกรม

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Primary_color (วันที่ 23 เดือน เมษายน พ.ศ. 2566)

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Inclusion-exclusion_principle (วันที่ 16 เดือน ธันวาคม พ.ศ. 2566)

ภาคผนวก

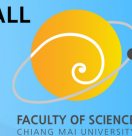


THE NUMBER OF COLOURINGS FOR INTERSECTING CIRCLES WHERE ALL REGIONS HAVE DIFFERENT COLOURS

Intiraporn Haewsungcharroen

Advisor : Asst. Prof. Dr. Piyasat Sripratak

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University



ABSTRACT

This independent study finds the number of colourings for intersecting 2 circles and intersecting 3 circles where all regions have different colours. A single primary colour with the brightness value from 0 to 255 is considered. The colour brightness value of the overlapping circle area is the sum of the brightness values of the two circles. We find the size of the set of colourings that do not satisfy the above conditions using inclusion exclusion principle and subtract from the size of the universe. Our main results are the number of colourings for 2 intersecting circles where all regions have different colours and the number of colourings for 3 intersecting circles where all regions have different colours.

OBJECTIVE

1. Find the number of colourings for intersecting 2 circles where all regions have different colours.
2. Find the number of colourings for intersecting 3 circles where all regions have different colours.

PRELIMINARIES

Definition 1.1: The primary colours of light are red, green and blue.

Definition 1.2: The brightness value of the primary colours is an integer from 0 to 255. A colour with brightness value of 0 is black, and a colour with brightness value of 255 will be the colour of that primary colour.

Let X be the set of region inside circle x .

Y be the set of region inside circle y , and

Z be the set of region inside circle z .

Let the colour brightness value of X be R_x .

Let the colour brightness value of Y be R_y .

Let the colour brightness value of Z be R_z .

Definition 1.3: Colour light mixing when circle x with colour brightness value of R_x overlaps with circle y with colour brightness value of R_y , the overlapping areas will have a colour brightness values of $R_x + R_y$. If the sum of colour brightness values is more than 255, we assign that colour brightness value to 255.

Theorem 1.4: Let $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ be finite sets that $A_i \cap A_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. Then $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n|$.

Theorem 1.5: Let A and B be finite sets. Then $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Theorem 1.6: Let A, B and C be finite sets. Then $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

METHOD

Let $\mathbb{U}_i$ be the universe composing of triples (R_x, R_y, R_z) where $R_x = i, R_y, R_z \in \{1, 2, 3, \dots, 252\}$ and $R_x + R_y < 255$.

To find the number of colourings for intersecting 3 circles where all regions have different colours, the triple (R_x, R_y, R_z) must satisfy the conditions:

1. The colour brightness value $R_x \neq R_y$.
2. The colour brightness value $R_x \neq R_z$.
3. The colour brightness value $R_y \neq R_z$.
4. The colour brightness value $R_x + R_y \neq R_z$.
5. The colour brightness value $R_x + R_z \neq R_y$.
6. The colour brightness value $R_y + R_z \neq R_x$.
7. The colour brightness value $R_x + R_z < 255$.
8. The colour brightness value $R_y + R_z < 255$.

For $R_x = i$, let the sets of triples that do not satisfy the above conditions be the sets $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ and A_8 respectively.

Thus, set A_1 is the set of triples in $\mathbb{U}_i$, where $R_x = R_y$.

set A_2 is the set of triples in $\mathbb{U}_i$, where $R_x = R_z$.

set A_3 is the set of triples in $\mathbb{U}_i$, where $R_y = R_z$.

set A_4 is the set of triples in $\mathbb{U}_i$, where $R_x + R_y = R_z$.

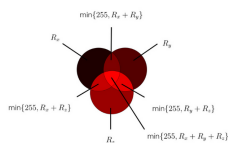
set A_5 is set of triples in $\mathbb{U}_i$, where $R_x + R_z = R_y$.

set A_6 is set of triples in $\mathbb{U}_i$, where $R_y + R_z = R_x$.

set A_7 is set of triples in $\mathbb{U}_i$, where $R_x + R_z \geq 255$.

set A_8 is set of triples in $\mathbb{U}_i$, where $R_y + R_z \geq 255$.

So the set of triples (R_x, R_y, R_z) that do not satisfy the above conditions is $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8$. Hence, the set of triples (R_x, R_y, R_z) that satisfy the conditions is $\mathbb{U}_i - (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8)$.



Method for finding the number of elements in $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8$ is using inclusion exclusion principle.

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$



$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |A_3 \cap (A_1 \cup A_2)|$$



$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |A_4 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| + |A_5| - |A_5 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| + |A_6| - |A_6 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5)|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| + |A_7| - |A_7 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6)|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7| + |A_8| - |A_8 \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7)|$$

MAIN RESULTS

Main results of the number of colourings for 2 intersecting circles where all regions have different colours

The colour brightness values of $X = Y$, $Y = X$ and $X \cap Y$ must be different.

Proposition 2.2: For 2 circles x and y , the values R_x and R_y are not 0.

Proposition 2.3: For 2 circles x and y , the values R_x and R_y are not 255.

Proposition 2.4: For 2 circles x and y , there are 64362 ordered pairs (R_x, R_y) .

Main results of the number of colourings for intersecting 3 circles where all regions have different colours

The colour brightness values of $X = (Y \cup Z)$, $Y = (X \cup Z)$, $Z = (X \cup Y)$, $(X \cap Y) = Z$, $(Y \cap Z) = X$, $(X \cap Z) = Y$ and $X \cap Y \cap Z$ must be different.

Proposition 2.5: For 3 circles x, y and z , the values R_x, R_y and R_z are not 0.

Proposition 2.6: For 3 circles x, y and z , the values R_x, R_y and R_z are not 252.

Proposition 2.7: For 3 circles x, y and z , the values $R_x + R_y < 255$, $R_x + R_z < 255$ and $R_y + R_z < 255$.

Proposition 2.8: For $1 \leq i \leq 252$, $|\mathbb{U}_i| = 8096508$.

Proposition 2.9: For $1 \leq i \leq 127$, set A_1 is $\{(i, i, k) | k = 1, 2, 3, \dots, 252\}$ and $|A_1| = 252$.

Proposition 2.10: For $1 \leq i \leq 252$, set A_2 is $\{(i, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min(252, 254 - i)\}$ and $|A_2| = \min(252, 254 - i)$.

Proposition 2.11: For $1 \leq i \leq 252$, set A_3 is $\{(j, j, i) | j = 1, 2, 3, \dots, \min(252, 254 - i)\}$ and $|A_3| = \min(252, 254 - i)$.

Proposition 2.12: For $1 \leq i \leq 251$, set A_4 is $\{(i, j, i + j) | j = 1, 2, 3, \dots, 252 - i\}$ and $|A_4| = 252 - i$.

Proposition 2.13: For $1 \leq i \leq 126$, set A_5 is $\{(i, i, j - i) | j = i + 1, i + 2, i + 3, \dots, 252\}$ and $|A_5| = 252 - i$.

Proposition 2.14: For $2 \leq i \leq 252$, set A_6 is $\{(i, j, i - j) | j = 1, 2, 3, \dots, \min(126, i - 1)\}$ and $|A_6| = \min(126, i - 1)$.

Proposition 2.15: For $3 \leq i \leq 252$, set A_7 is $\{(i, j, k) | j = 1, 2, 3, \dots, 254 - i$ and $255 - i \leq k \leq 252\}$ and $|A_7| = (254 - i)(i - 2)$.

Proposition 2.16: For $1 \leq i \leq 252$, set A_8 is $\{(i, j, k) | j = 3, 4, 5, \dots, \min(252, 254 - i)$ and $255 - j \leq k \leq 252\}$, $|A_8|$ for $i = 1$ is 31375 and $|A_8|$ for $i = 2, 3, 4, \dots, 252$ is $\frac{(254-i)(253-i)}{2}$.

Proposition 2.30: 1. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 1$ is 32251

2. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 2$ is 32254

3. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 3$ is 32005

4. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 4, 6, 8, \dots, 84$ is $i^2 - 254i + 32758$

5. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 5, 7, 9, \dots, 83$ is $i^2 - 254i + 32758$

6. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 85, 87, 89, \dots, 125$ is $i^2 - 257i + 33055$

7. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 86, 88, 90, \dots, 126$ is $i^2 - 257i + 33054$

8. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 127$ is 16379

9. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 128, 130, 132, \dots, 168$ is $-i^2 + 253i + 125$

10. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 129, 131, 133, \dots, 169$ is $-i^2 + 253i + 126$

11. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 170, 172, 174, \dots, 248$ is $-i^2 + 256i - 384$

12. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 171, 173, 175, \dots, 249$ is $-i^2 + 256i - 383$

13. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 250$ is 1116

14. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 251$ is 672

15. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ for $i = 252$ is 624

Corollary 2.31: For 3 circles x, y, z and $R_x = i$ for $1 \leq i \leq 252$, there are $8096508 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8|$ ordered triples (R_x, R_y, R_z) .

REFERENCE

- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Primary_color (วันที่ 23 เดือน เมษายน พ.ศ. 2566)
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Inclusion-exclusion_principle (วันที่ 16 เดือน ธันวาคม พ.ศ. 2566)