

การเติมรูปทรงรูปตัว L แบบใหม่สำหรับ de Bruijn อาร์เรย์
(New L-Fillings for de Bruijn Arrays)

นางสาวสุภาภรณ์ ไครหอม
รหัส 630510523

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ปีการศึกษา 2566

การเติมรูปทรงรูปตัว L แบบใหม่สำหรับ de Bruijn อาร์เรย์
(New L-Fillings for de Bruijn Arrays)

นางสาวสุภาภรณ์ ไครหอม

630510523

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

การเติมรูปทรงรูปตัว L แบบใหม่สำหรับ de Bruijn อาร์เรย์
(New L-Fillings for de Bruijn Arrays)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ

ชวัญชัย กันไว

(อ. ดร. ชวัญชัย กันไว)

ประธานกรรมการ

วันเฉลิม สุทธิการนนท์

(อ. ดร. วันเฉลิม สุทธิการนนท์)

กรรมการ

วันที่ 4 มีนาคม พ.ศ. 2567

กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการศึกษาค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง การเติมรูปทรงรูปตัว L แบบใหม่สำหรับ de Bruijn อารีย์

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ประธานกรรมการสอบและในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษางานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้องการค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้ข้อเสนอแนะ พิจารณา และตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม รวมถึงให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจ กำลังสติปัญญาอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงานตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

นางสาวสุภาภรณ์ ไกรหอม

หัวข้อ (ภาษาไทย) การเติมรูปทรงรูปตัว L แบบใหม่สำหรับ de Bruijn อาร์เรย์
 (ภาษาอังกฤษ) New L-Fillings for de Bruijn Arrays
 ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ นางสาวสุภาภรณ์ ไครหอม รหัสนักศึกษา 630510523
 ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา อ. ดร. ขวัญชัย กันไฉ
 ชื่อกรรมการสอบ อ. ดร. วันเฉลิม สุขภิการนนท์

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้ได้แรงบันดาลใจจากการศึกษาบทความของ Lara Pudwell และ Rachel Rockey เรื่อง de Bruijn Arrays for L-Fillings ซึ่งในบทความนั้นผู้แต่งได้สร้าง k -de Bruijn L-Arrays โดยใช้ฟังก์ชันการเติม $f(r, c) = s + re \pmod k$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $c = sk + e$ สำหรับการค้นคว้าอิสระนี้เป็นการศึกษาวิธีการเติมแบบใหม่สำหรับ k -de Bruijn L-Arrays ที่มีนอกเหนือจากบทความของ Lara Pudwell และ Rachel Rockey มากไปกว่านั้นเราได้ตรวจสอบคุณสมบัติเชิงกรุปของการเลื่อนของฟังก์ชันการเติมแบบใหม่

Abstract

This independent study is motivated by the paper of Lara Pudwell and Rachel Rockey entitled “de Bruijn Arrays for L-Fillings”. In that paper, the authors construct k -de Bruijn L-Arrays by using the filling function $f(r, c) = s + re \pmod k$, corresponding to the equation $c = sk + e$. In this work, we find new fillings, in addition to Lara Pudwell and Rachel Rockey work, for k -de Bruijn L-Arrays. In addition, we investigate group properties of the shift functions of the new fillings.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ (Introduction)	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	4
บทที่ 3 ผลการศึกษา (Main Results)	6
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)	20
บรรณานุกรม	22
ภาคผนวก	23

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

ถ้าหากเราพิจารณาลำดับ 00010111 แล้วหิบบค่าของลำดับที่ละสามค่าที่ติดกัน จะได้ลำดับเลขฐานสองที่มีความยาวเท่ากับ 3 ทั้งหมด 8 รูปแบบ คือ 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110 และ 100 (เราจะถือว่าจุดสิ้นสุดของลำดับนั้นติดอยู่กับจุดเริ่มต้นของลำดับ) ลำดับเช่นนี้เรียกว่า ลำดับ de Bruijn ซึ่งโดยทั่วไปเราอาจจะต้องการสร้างลำดับที่เกิดจากเลขโดด $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ ที่ประกอบด้วยลำดับย่อยความยาว n ทั้งหมดที่แตกต่างกัน โดยลำดับย่อยแต่ละตัวปรากฏเพียงหนึ่งครั้ง และเราจะเรียกลำดับดังกล่าวนี้ว่า ลำดับ (k, n) -de Bruijn

ลำดับ de Bruijn ได้รับการศึกษาอย่างกว้างขวางและถูกนำไปประยุกต์ใช้งานในด้านต่างๆ ตั้งแต่การพัฒนาหุ่นยนต์ไปจนถึงกลวิธีการเล่นไพ่ สำหรับการประยุกต์ใช้งาน ลำดับ de Bruijn สามารถศึกษาเพิ่มเติมจากผลงานตีพิมพ์ของ Diaconis และ Graham [2] มากไปกว่านั้นในบทความ [1] และ [3] ได้มีการพิสูจน์ว่าจะมีลำดับ (k, n) -de Bruijn เสมอ สำหรับทุก $k \geq 2$ และ $n \geq 2$ และจะมีลำดับ de Bruijn ที่แตกต่างกันทั้งหมดจำนวน $(k!)^{k^{n-1}}/k^n$ ลำดับ

เมื่อไม่นานมานี้ นักคณิตศาสตร์ได้ขยายแนวคิดของลำดับ (k, n) -de Bruijn ไปยัง 2 มิติ ถ้า $k \geq 2$ และ $m, n \in \mathbb{Z}^+$ แล้วจะมีรูปสี่เหลี่ยมขนาด $m \times n$ ทั้งหมด k^{mn} รูปแบบที่แตกต่างกัน สำหรับ $r, s \in \mathbb{Z}^+$ (k, r, s, m, n) -de Bruijn torus คืออาร์เรย์ $r \times s$ ที่บรรจุรูปแบบที่แตกต่างกันเหล่านี้ทั้งหมด โดยแต่ละรูปแบบปรากฏเพียงหนึ่งครั้ง (ในที่นี้ ด้านซ้ายของอาร์เรย์ติดกับด้านขวาและด้านบนของอาร์เรย์ติดกับด้านล่าง) จากเงื่อนไขดังกล่าวทำให้ได้ว่า $rs = k^{mn}$ จะต้องเป็นจริง ในบทความ [4] Hurlbert และ Isaak ได้พิสูจน์ว่าจะมี (k, r, s, m, n) -de Bruijn torus เสมอเมื่อ $r = s, m = n$ และ $rs = k^{mn}$ ตารางต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของ $(2, 4, 4, 2, 2)$ -de Bruijn torus

0	0	1	0
1	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	0

Table 1.1: $(2, 4, 4, 2, 2)$ -de Bruijn torus

ในบทความ [5] Lara Pudwell และ Rachel Rockey ที่ได้ทำการศึกษาโดยที่จะพิจารณารูปทรงตัว L ที่เป็น อาร์เรย์ 2×2 ที่ลบมุมขวบนออก เนื่องจากรูปทรงตัว L นั้นมีทั้งหมด 3 ช่อง จึงมีรูปทรงตัว L ทั้งหมด k^3 รูปแบบที่แตกต่างกัน เมื่อเติมด้วยตัวเลข $\{0, \dots, k-1\}$ เช่น ถ้า $k = 2$ จะได้รูปทรงรูปตัว L ที่แตกต่างกันทั้งหมด $2^3 = 8$ รูปแบบ ดังแสดงในตารางที่ 1.2 ในที่นี้ต้องการหาอาร์เรย์ขนาด $k \times k^2$ (โดยที่ด้านซ้ายติดกับด้านขวาและด้านบนติดกับด้านล่าง) ที่บรรจุรูปทรงรูปตัว L ที่แตกต่างกันทั้งหมด k^3 รูปแบบ โดยที่แต่ละรูปแบบปรากฏเพียงครั้งเดียว จะเรียกอาร์เรย์ดังกล่าวว่า k -de Bruijn L -array ซึ่งตัวอย่าง

ของ 2-de Bruijn L-array แสดงในตารางที่ 1.3

0		0		0		0	
0	0	0	1	1	0	1	1
1		1		1		1	
0	0	0	1	1	0	1	1

Table 1.2: การเติม 2^3 ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

0	0	1	0
0	1	1	1

Table 1.3: 2-de Bruijn L-array

ในการค้นคว้าอิสระนี้เราได้แรงบันดาลใจจากการศึกษาบทความของ Lara Pudwell และ Rachel Rockey ที่ได้สร้าง k -de Bruijn L-Arrays โดยใช้ฟังก์ชันการเติม $f(r, c) = s + re \pmod k$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $c = sk + e$ สำหรับการค้นคว้าอิสระนี้เป็นการศึกษาวิธีการเติมแบบใหม่สำหรับ k -de Bruijn L-Arrays ที่มีนอกเหนือจากบทความของ Lara Pudwell และ Rachel Rockey มากไปกว่านั้นเราจะตรวจสอบคุณสมบัติเชิงกรุปของการเลื่อนของฟังก์ชันการเติมแบบใหม่

วัตถุประสงค์ของการค้นคว้าอิสระ (objectives)

1. เพื่อศึกษาวิธีการเติมแบบใหม่สำหรับ k -de Bruijn L-Arrays
2. เพื่อศึกษาสมบัติเชิงกรุปของการเลื่อนของฟังก์ชันการเติมแบบใหม่

ขอบเขตของการค้นคว้าอิสระ

เราจะศึกษาอาเรย์ขนาด 2×2 โดยใช้ฟังก์ชันการเติมดังต่อไปนี้

1. $f(r, c) = s + re \pmod k$
2. $g(r, c) = -(s + re) \pmod k$
3. $h(r, c) = -s + re \pmod k$
4. $j(r, c) = s - re \pmod k$

โดยที่ r คือแถว c คือคอลัมน์ s คือตารางย่อย และ e คือหลักในตารางย่อยของอาเรย์ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$c = sk + e$$

มากกว่านั้นเราจะศึกษาสมบัติเชิงกรุปของการเลื่อนของฟังก์ชันการเติมข้างต้น

วิธีการดำเนินการค้นคว้าอิสระ

1. ศึกษาการเติม k -de Bruijn L-Arrays โดยใช้ฟังก์ชัน $f(r, c)$
2. ศึกษาสมบัติฟังก์ชัน $g(r, c), h(r, c), j(r, c)$ และการเลื่อนของฟังก์ชันเหล่านี้
3. พิสูจน์ว่าฟังก์ชัน $g(r, c), h(r, c), j(r, c)$ เป็นการเติมแบบใหม่ พร้อมยกตัวอย่างประกอบ
4. ศึกษาสมบัติเชิงกรุปของการเลื่อนของฟังก์ชัน $f(r, c), g(r, c), h(r, c)$ และ $j(r, c)$
5. เขียนเล่ม และตรวจสอบความถูกต้อง

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการค้นคว้าอิสระ (expected benefits and application)

1. ได้วิธีการใหม่สำหรับการเติม k -de Bruijn L-Arrays
2. มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติเชิงกรุปของการเลื่อนของฟังก์ชันการเติมแบบใหม่ที่ได้ศึกษา

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

2.1 ลำดับ de Bruijn

บทนิยาม 2.1.1 พิจารณาลำดับที่เกิดจากเลขโดด $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ ที่ประกอบด้วยลำดับย่อยความยาว n ทั้งหมดที่แตกต่างกัน (เราจะถือว่าจุดสิ้นสุดของลำดับนั้นติดอยู่กับจุดเริ่มต้นของลำดับ) โดยที่ลำดับย่อยแต่ละตัวปรากฏเพียงหนึ่งครั้ง เราจะเรียกลำดับดังกล่าวนี้ว่า ลำดับ (k, n) -de Bruijn

ตัวอย่าง 2.1.1 พิจารณาลำดับ 00010111 เราจะได้ลำดับเลขฐาน 2 ที่มีความยาวเท่ากับ 3 ทั้งหมด 8 รูปแบบ คือ 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110 และ 100

2.2 การสมภาค

บทนิยาม 2.2.1 กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับ $a, b \in \mathbb{Z}$ จะกล่าวว่า a สมภาคกับ b มอดุโล m (a is congruent to b modulo m) เขียนแทนด้วย $a \equiv b \pmod{m}$ ถ้า $m \mid (a - b)$ นั่นคือ $a - b = nk$ สำหรับบาง $k \in \mathbb{Z}$ ในกรณีที่ a ไม่สมภาคกับ b มอดุโล m เขียนแทนด้วย $a \not\equiv b \pmod{m}$

ทฤษฎีบท 2.2.1 ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะได้ว่า $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $a = b + km$

ทฤษฎีบท 2.2.2 ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ แล้ว $a \equiv b \pmod{m}$ ก็ต่อเมื่อ a และ b ถูกหารด้วย m แล้วเหลือเศษเท่ากัน

ทฤษฎีบท 2.2.3 กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มและ $m > 1$ สำหรับทุก $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ได้ว่า

- (1) $a \equiv a \pmod{m}$
- (2) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $b \equiv a \pmod{m}$
- (3) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $b \equiv c \pmod{m}$ แล้ว $a \equiv c \pmod{m}$
- (4) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
- (5) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ และ $c \equiv d \pmod{m}$ แล้ว $ac \equiv bd \pmod{m}$
- (6) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $a + c \equiv b + c \pmod{m}$
- (7) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $ac \equiv bc \pmod{m}$
- (8) ถ้า $a \equiv b \pmod{m}$ แล้ว $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

2.3 กรุป

บทนิยาม 2.3.1 กรุป (*Group*) หมายถึงเซต G กับการดำเนินการทวิภาค $*$ เขียนแทนด้วยคู่อันดับ $(G, *)$ ที่มีสมบัติ 3 ข้อต่อไปนี้

1. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม กล่าวคือ $a * (b * c) = (a * b) * c$ สำหรับทุกๆ $a, b, c \in G$
2. การมีเอกลักษณ์ กล่าวคือ มี $e \in G$ ซึ่ง $a * e = a = e * a$ สำหรับทุกๆ $a \in G$ จะเรียก e ว่าเอกลักษณ์ใน G
3. การมีตัวผกผัน กล่าวคือ ทุกๆ $a \in G$ จะมี $b \in G$ ซึ่ง $a * b = e = b * a$ จะเรียก b ว่าตัวผกผันของ a เขียนแทนด้วย a^{-1}

ตัวอย่าง 2.3.1 พิจารณา $(\mathbb{Z}_4, +)$ เป็นกรุปหรือไม่ ดังตารางต่อไปนี้

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

จากตารางจะได้ว่า $(\mathbb{Z}_4, +)$ เป็นกรุป นั่นคือ $(\mathbb{Z}_4, +)$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม ที่มี 0 เป็นสมาชิกเอกลักษณ์ มี $[0]^{-1} = [0]$, $[1]^{-1} = [3]$, $[2]^{-1} = [2]$ และ $[3]^{-1} = [1]$

บทนิยาม 2.3.2 ให้ $(G, *)$ เป็นกรุป จะเรียกจำนวนสมาชิกทั้งหมดของ G ว่า อันดับ (*order*) ของ G และเขียนแทนด้วย $|G|$ ถ้า G เป็นเซตจำกัด จะเรียก $(G, *)$ ว่า กรุปจำกัด (*finite group*) และถ้า G เป็นเซตอนันต์ จะเรียก $(G, *)$ ว่า กรุปอนันต์ (*infinite group*)

บทนิยาม 2.3.3 ให้ G เป็นกรุป และ $a \in G$ กำหนดอันดับ (*order*) ของ a คือจำนวนเต็มบวก n ที่เล็กที่สุดที่ทำให้ $a^n = e$ หากไม่มีจำนวนเต็มดังกล่าว จะเรียกว่า a มีอันดับอนันต์ (*infinite order*) และใช้สัญลักษณ์ $|a|$ แทนอันดับของ a

ตัวอย่าง 2.3.2 จากตัวอย่าง 2.3.1 จะเห็นว่า $|[0]| = 1$, $|[1]| = 4$, $|[2]| = 2$ และ $|[3]| = 4$

ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ G เป็นกรุป และ $a \in G$ จะได้ว่า $S = \{x \in G \mid x = a^k, \exists k \in \mathbb{Z}\}$ เป็นกรุปย่อยที่เล็กที่สุดของ G ที่บรรจุ a

บทนิยาม 2.3.4 ให้ G เป็นกรุป และ $a \in G$ จะเรียก $S = \{x \in G \mid x = a^k, \exists k \in \mathbb{Z}\}$ ซึ่งเป็นกรุปย่อยของ G ในทฤษฎีบท 2.3.1 ว่า กรุปย่อยวัฏจักร (*cyclic subgroup*) ของ G ที่มี a เป็นตัวก่อกำเนิด (*generator*) และเขียนแทนกรุปย่อย S ดังกล่าวด้วย $\langle a \rangle$ นั่นคือ

$$\langle a \rangle = \{x \in G \mid x = a^k, \exists k \in \mathbb{Z}\} \text{ และ } \langle a \rangle \text{ เป็นกรุปย่อยของ } G$$

บทนิยาม 2.3.5 ให้ G เป็นกรุป จะเรียกว่า G เป็นกรุปวัฏจักร (*cyclic group*) ก็ต่อเมื่อ มี $a \in G$ ซึ่ง $G = \langle a \rangle = \{x \in G \mid x = a^k, \exists k \in \mathbb{Z}\}$

ตัวอย่าง 2.3.3 จากตัวอย่าง 2.3.1 เป็นกรุปวัฏจักรที่มี 1 และ -1 เป็นตัวก่อกำเนิด

บทที่ 3

ผลการศึกษา (Main Results)

ในการค้นคว้าอิสระครั้งนี้ผู้ค้นคว้าได้ทำการศึกษาวิธีการเติมแบบใหม่สำหรับ k -de Bruijn L-array ที่มีนอกเหนือจากการเติมด้วยฟังก์ชัน $f(r, c) = s + re \pmod{k}$ พร้อมทั้งพิสูจน์และยกตัวอย่างประกอบอีกทั้งศึกษาสมบัติเชิงกรุปของการเลื่อนของฟังก์ชันการเติมที่ได้ทำการศึกษา ดังต่อไปนี้

3.1 ฟังก์ชันการเติม

3.1.1 ฟังก์ชันการเติม g

ให้ $k \geq 2$ พิจารณาอาเรย์ขนาด $k \times k^2$ กำหนดดัชนีแถว r และดัชนีหลัก c ดังนี้ $r = 0, 1, 2, \dots, k-1$ และ $c = 0, 1, 2, \dots, k^2-1$ โดยที่

$$c = sk + e$$

เมื่อ $0 \leq s \leq k-1$ และ $0 \leq e \leq k-1$ ต่อไปจะนิยามฟังก์ชันการเติม g โดยที่

$$g(r, c) = -(s + re) \pmod{k} \quad (3.1)$$

หมายถึง เศษที่เหลือเมื่อหาร $-(s + re)$ ด้วย k ตัวอย่างเช่น สมมติว่า $k = 4$ และเราต้องการคำนวณ $g(2, 13)$ เนื่องจาก $13 = 3 \cdot 4 + 1$ เราจึงได้ $r = 2, c = 13, s = 3, e = 1$ และ $g(2, 13) = -(3 + 2 \cdot 1) \pmod{4} = 3$

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างการเติม 2-de Bruijn L-array , 3-de Bruijn L-array และ 4-de Bruijn L-array ที่เกิดจากสมการ (3.1) ดังแสดงในตารางที่ 3.1

0	0	1	1
0	1	1	0

0	0	0	2	2	2	1	1	1
0	2	1	2	1	0	1	0	2
0	1	2	2	0	1	1	2	0

0	0	0	0	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1
0	3	2	1	3	2	1	0	2	1	0	3	1	0	3	2
0	2	0	2	3	1	3	1	2	0	2	0	1	3	1	3
0	1	2	3	3	0	1	2	2	3	0	1	1	2	3	0

Table 3.1: 2-de Bruijn L-array , 3-de Bruijn L-array และ 4-de Bruijn L-array

ผลการศึกษาของฟังก์ชันการเติม g แสดงได้ดังทฤษฎีบท 3.1.1

ทฤษฎีบท 3.1.1 โดยการเติมค่า $g(r, c)$ ในแถวที่ r และหลักที่ c ในอาร์เรย์ขนาด $k \times k^2$ จะทำให้เกิด k -de Bruijn L-array

พิสูจน์ พิจารณาอาร์เรย์ที่มีขนาด $k \times k^2$ โดยที่ $g(r, c)$ อยู่ในแถว r หลัก c ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ เราต้องแสดงให้เห็นว่าการเติมรูปตัว L สองรูปที่อยู่ในตำแหน่งที่แตกต่างกันของอาร์เรย์นั้นแตกต่างกัน
สมมติให้

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & \\ \hline b_1 & d_1 \\ \hline \end{array} \quad \text{และ} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline a_2 & \\ \hline b_2 & d_2 \\ \hline \end{array}$$

เป็นสองรูปทรงตัว L ที่อยู่ในตำแหน่งที่แตกต่างกัน เห็นได้ชัดว่า ถ้า $a_1 \neq a_2$ หรือ $b_1 \neq b_2$ แล้วการเติมเหล่านี้จะแตกต่างกัน ดังนั้นจึงสมมติว่า $a_1 = a_2 = a$ และ $b_1 = b_2 = b$ เราต้องแสดงให้เห็นว่า $d_1 \neq d_2$ สมมติว่า a_1 อยู่ในแถว r หลัก c โดย $c = sk + e$ และ a_2 อยู่ในแถว R หลัก C โดย $C = Sk + E$ ต่อไปจะแสดงว่า $e = E$ และ $r \neq R$

สำหรับการพิสูจน์ $e = E$ จาก $c = sk + e$ และ $C = Sk + E$

พิจารณา $a = a_1 = g(r, c) = -(s + re) \pmod{k}$

$$b = b_1 = g(r + 1, c) = -(s + (r + 1)e) \pmod{k}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} a - b &= [-(s + re)] + [s + (r + 1)e] \pmod{k} \\ &\equiv e \pmod{k} \end{aligned} \tag{3.2}$$

และ $a = a_2 = g(R, C) = -(S + RE) \pmod{k}$

$$b = b_2 = g(R + 1, C) = -(S + (R + 1)E) \pmod{k}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} a - b &= [-(S + RE)] + [S + (R + 1)E] \pmod{k} \\ &\equiv E \pmod{k} \end{aligned} \tag{3.3}$$

จาก (3.2) และ (3.3) ดังนั้น $e = E$

ต่อไปจะแสดงว่า $r \neq R$ โดยสมมติให้ $r = R$

พิจารณา $a_1 = a_2$

$$g(r, c) = g(R, C)$$

$$-(s + re) \equiv -(S + RE) \pmod{k}$$

$$-(s + re) \equiv -(S + Re) \pmod{k}$$

$$-(s + re) \equiv -(S + re) \pmod{k}$$

$$-s \equiv -S \pmod{k}$$

$$s \equiv S \pmod{k}$$

ดังนั้น $s = S$ เนื่องจาก $0 \leq s \leq k - 1$ และ $0 \leq S \leq k - 1$ ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $c = C$

พิจารณา

$$\begin{aligned} c &= sk + e \\ &= Sk + e \\ &= Sk + E \\ &= C \end{aligned}$$

ดังนั้น $c = C$ เกิดข้อขัดแย้ง เนื่องจากสมมติฐานว่า การเติม L ในแต่ละครั้งต้องอยู่ในตำแหน่งที่แตกต่างกัน เพราะฉะนั้น $r \neq R$

ต่อไปนี้จะพิจารณาค่า e สองกรณี คือ $e = k - 1$ และ $e \neq k - 1$ โดยที่เราจะต้องแสดงให้เห็นว่า $d_1 \neq d_2$

กรณีที่ $e = k - 1$ จะแสดงว่า $s \neq S$ สมมติให้ $s = S$

พิจารณา

$$a_1 = g(r, c) = -(s + re) \pmod{k} = -(s + r(k - 1)) \pmod{k} \quad (3.4)$$

$$a_2 = g(R, C) = -(S + RE) \pmod{k} = -(S + R(k - 1)) \pmod{k} \quad (3.5)$$

เนื่องจาก $a_1 = a_2$ จาก (3.4) และ (3.5) จะได้ว่า

$$-(s + r(k - 1)) \equiv -(S + R(k - 1)) \pmod{k}$$

$$-(s + r(k - 1)) \equiv -(s + R(k - 1)) \pmod{k}$$

$$-r \equiv -R \pmod{k}$$

$$r \equiv R \pmod{k}$$

เนื่องจาก $r \equiv R \pmod{k}$ แสดงว่า $r = R$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับ $r \neq R$

จึงสามารถสรุปได้ว่า $s \neq S$

จากนั้นเราจะพิจารณา d_1 และ d_2 จะได้ว่า d_1 อยู่ในแถว $r + 1$ หลัก $c + 1$ โดยที่ $c + 1 = k(s + 1) + 0$ และ d_2 อยู่ในแถว $R + 1$ หลัก $C + 1$ โดยที่ $C + 1 = k(S + 1) + 0$

พิจารณา

$$\begin{aligned} d_1 = g(r + 1, c + 1) &= -(s + 1 + (r + 1)(0)) \pmod{k} \\ &= -(s + 1) \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} d_2 = g(R + 1, C + 1) &= -(S + 1 + (R + 1)(0)) \pmod{k} \\ &= -(S + 1) \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.7)$$

จะพิสูจน์ว่า $d_1 \neq d_2$ สมมติให้ $d_1 = d_2$ จาก (3.6) และ (3.7)

จะได้ $-(s + 1) \equiv -(S + 1) \pmod{k}$

$$-s \equiv -S \pmod{k}$$

$$s \equiv S \pmod{k}$$

เนื่องจาก $s \equiv S \pmod{k}$ แสดงว่า $s = S$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ $s \neq S$

ดังนั้น $d_1 \neq d_2$

กรณีที่ $e \neq k - 1$

สมมติให้ $e \neq k - 1$ จะได้ว่า d_1 อยู่ในแถว $r + 1$ หลัก $c + 1$ โดยที่ $c + 1 = sk + e + 1$ และ d_2 อยู่ในแถว $R + 1$ หลัก $C + 1$ โดยที่ $C + 1 = Sk + E + 1$

จาก $g(r, c) = -(s + re) \pmod{k} = a$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad d_1 = g(r + 1, c + 1) &= -(s + (r + 1)(e + 1)) \pmod{k} \\ &\equiv -(s + re + r + e + 1) \pmod{k} \\ &\equiv a - (r + e + 1) \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} d_2 = g(R + 1, C + 1) &= -(S + (R + 1)(e + 1)) \pmod{k} \\ &\equiv -(S + Re + r + e + 1) \pmod{k} \\ &\equiv a - (R + e + 1) \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.9)$$

จะพิสูจน์ว่า $d_1 \neq d_2$ สมมติให้ $d_1 = d_2$ จาก (3.8) และ (3.9)

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad a - (r + e + 1) &\equiv a - (R + e + 1) \pmod{k} \\ -r &\equiv -R \pmod{k} \\ r &\equiv R \pmod{k} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $r \equiv R \pmod{k}$ แสดงว่า $r = R$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับ $r \neq R$

ดังนั้น $d_1 \neq d_2$

3.1.2 ฟังก์ชันการเติม h

ให้ $k \geq 2$ พิจารณาอาร์เรย์ขนาด $k \times k^2$ กำหนดดัชนีแถว r และดัชนีหลัก c ดังนี้ $r = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ และ $c = 0, 1, 2, \dots, k^2 - 1$ โดยที่

$$c = sk + e$$

เมื่อ $0 \leq s \leq k - 1$ และ $0 \leq e \leq k - 1$ ต่อไปจะนิยามฟังก์ชันการเติม h โดยที่

$$h(r, c) = -s + re \pmod{k} \quad (3.10)$$

หมายถึง เศษที่เหลือเมื่อหาร $-s + re$ ด้วย k ตัวอย่างเช่น สมมติว่า $k = 4$ และเราต้องการคำนวณ $h(2, 13)$ เนื่องจาก $13 = 3 \cdot 4 + 1$ เราจึงได้ $r = 2, c = 13, s = 3, e = 1$ และ $h(2, 13) = -3 + 2 \cdot 1 \pmod{4} = 3$

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างการเติม 2-de Bruijn L-array , 3-de Bruijn L-array และ 4-de Bruijn L-array ที่เกิดจากสมการ (3.10) ดังแสดงในตารางที่ 3.2

0	0	1	1
0	1	1	0

0	0	0	2	2	2	1	1	1
0	1	2	2	0	1	1	2	0
0	2	1	2	1	0	1	0	2

0	0	0	0	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1
0	1	2	3	3	0	1	2	2	3	0	1	1	2	3	0
0	2	0	2	3	1	3	1	2	0	2	0	1	3	1	3
0	3	2	1	3	2	1	0	2	1	0	3	1	0	3	2

Table 3.2: 2-de Bruijn L-array , 3-de Bruijn L-array และ 4-de Bruijn L-array

ผลการศึกษาของฟังก์ชันการเติม h แสดงได้ดังทฤษฎีบท 3.1.2

ทฤษฎีบท 3.1.2 โดยการเติมค่า $h(r, c)$ ในแถวที่ r และหลักที่ c ในอาร์เรย์ขนาด $k \times k^2$ จะทำให้เกิด k -de Bruijn L-array

พิสูจน์ พิจารณาอาร์เรย์ที่มีขนาด $k \times k^2$ โดยที่ $h(r, c)$ อยู่ในแถว r หลัก c ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ เราต้องแสดงให้เห็นว่าการเติมรูปตัว L สองรูปที่อยู่ในตำแหน่งที่แตกต่างกันของอาร์เรย์นั้นแตกต่างกัน
สมมติให้

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & \\ \hline b_1 & d_1 \\ \hline \end{array} \quad \text{และ} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline a_2 & \\ \hline b_2 & d_2 \\ \hline \end{array}$$

เป็นสองรูปทรงตัว L ที่อยู่ในตำแหน่งที่แตกต่างกัน เห็นได้ชัดว่า ถ้า $a_1 \neq a_2$ หรือ $b_1 \neq b_2$ แล้วการเติมเหล่านี้จะแตกต่างกัน ดังนั้นจึงสมมติว่า $a_1 = a_2 = a$ และ $b_1 = b_2 = b$ เราต้องแสดงให้เห็นว่า $d_1 \neq d_2$ สมมติว่า a_1 อยู่ในแถว r หลัก c โดย $c = sk + e$ และ a_2 อยู่ในแถว R หลัก C โดย $C = Sk + E$ ต่อไปจะแสดงว่า $e = E$ และ $r \neq R$

สำหรับการพิสูจน์ $e = E$ จาก $c = sk + e$ และ $C = Sk + E$

$$\text{พิจารณา} \quad a = a_1 = h(r, c) = -s + re \pmod{k}$$

$$b = b_1 = h(r+1, c) = -s + (r+1)e \pmod{k}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad b - a &= [-s + (r+1)e] - [-s + re] \pmod{k} \\ &\equiv e \pmod{k} \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\text{และ} \quad a = a_2 = h(R, C) = -S + RE \pmod{k}$$

$$b = b_2 = h(R+1, C) = -S + (R+1)E \pmod{k}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad b - a &= [-S + (R+1)E] - [-S + RE] \pmod{k} \\ &\equiv E \pmod{k} \end{aligned} \tag{3.12}$$

จาก (3.11) และ (3.12) ดังนั้น $e = E$

ต่อไปจะแสดงว่า $r \neq R$ โดยสมมติให้ $r = R$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_2 \\
 h(r, c) &= h(R, C) \\
 -s + re &\equiv -S + RE \pmod{k} \\
 -s + re &\equiv -S + Re \pmod{k} \\
 -s + re &\equiv -S + re \pmod{k} \\
 -s &\equiv -S \pmod{k} \\
 s &\equiv S \pmod{k}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $s = S$ เนื่องจาก $0 \leq s \leq k-1$ และ $0 \leq S \leq k-1$ ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $c = C$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
 c &= sk + e \\
 &= Sk + e \\
 &= Sk + E \\
 &= C
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $c = C$ เกิดข้อขัดแย้ง เนื่องจากสมมติฐานว่า การเติม L ในแต่ละครั้งต้องอยู่ในตำแหน่งที่แตกต่างกัน เพราะฉะนั้น $r \neq R$

ต่อไปนี้จะพิจารณาค่า e สองกรณี คือ $e = k-1$ และ $e \neq k-1$ โดยที่เราจะต้องแสดงให้เห็นว่า $d_1 \neq d_2$

กรณีที่ $e = k-1$ จะแสดงว่า $s \neq S$ สมมติให้ $s = S$

พิจารณา

$$a_1 = h(r, c) = -s + re \pmod{k} = -s + r(k-1) \pmod{k} \quad (3.13)$$

$$a_2 = h(R, C) = -S + RE \pmod{k} = -S + R(k-1) \pmod{k} \quad (3.14)$$

เนื่องจาก $a_1 = a_2$ จาก (3.13) และ (3.14) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 -s + r(k-1) &\equiv -S + R(k-1) \pmod{k} \\
 -s + r(k-1) &\equiv -s + R(k-1) \pmod{k} \\
 r &\equiv R \pmod{k}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $r \equiv R \pmod{k}$ แสดงว่า $r = R$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับ $r \neq R$

จึงสามารถสรุปได้ว่า $s \neq S$

จากนั้นเราจะพิจารณา d_1 และ d_2 จะได้ว่า d_1 อยู่ในแถว $r+1$ หลัก $c+1$ โดยที่ $c+1 = k(s+1)+0$ และ d_2 อยู่ในแถว $R+1$ หลัก $C+1$ โดยที่ $C+1 = k(S+1)+0$

พิจารณา

$$\begin{aligned} d_1 = h(r+1, c+1) &= -(s+1) + (r+1)(0) \pmod{k} \\ &= -(s+1) \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} d_2 = h(R+1, C+1) &= -(S+1) + (R+1)(0) \pmod{k} \\ &= -(S+1) \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.16)$$

จะพิสูจน์ว่า $d_1 \neq d_2$ สมมติให้ $d_1 = d_2$ จาก (3.15) และ (3.16)

จะได้ $-(s+1) \equiv -(S+1) \pmod{k}$

$$-s \equiv -S \pmod{k}$$

$$s \equiv S \pmod{k}$$

เนื่องจาก $s \equiv S \pmod{k}$ แสดงว่า $s = S$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ว่า $s \neq S$

ดังนั้น $d_1 \neq d_2$

กรณีที่ $e \neq k-1$

สมมติให้ $e \neq k-1$ จะได้ว่า d_1 อยู่ในแถว $r+1$ หลัก $c+1$ โดยที่ $c+1 = sk + e + 1$ และ d_2 อยู่ในแถว $R+1$ หลัก $C+1$ โดยที่ $C+1 = Sk + E + 1$

จาก $h(r, c) = -s + re \pmod{k} = a$

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad d_1 = h(r+1, c+1) &= -s + (r+1)(e+1) \pmod{k} \\ &\equiv -s + re + r + e + 1 \pmod{k} \\ &\equiv a + r + e + 1 \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} d_2 = h(R+1, C+1) &= -S + (R+1)(e+1) \pmod{k} \\ &\equiv -S + Re + r + e + 1 \pmod{k} \\ &\equiv a + R + e + 1 \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.18)$$

จะพิสูจน์ว่า $d_1 \neq d_2$ สมมติให้ $d_1 = d_2$ จาก (3.17) และ (3.18)

จะได้ $a + r + e + 1 \equiv a + R + e + 1 \pmod{k}$

$$r \equiv R \pmod{k}$$

เนื่องจาก $r \equiv R \pmod{k}$ แสดงว่า $r = R$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ว่า $r \neq R$

ดังนั้น $d_1 \neq d_2$

3.1.3 ฟังก์ชันการเติม j

ให้ $k \geq 2$ พิจารณาอาเรย์ขนาด $k \times k^2$ กำหนดดัชนีแถว r และดัชนีหลัก c ดังนี้ $r = 0, 1, 2, \dots, k-1$ และ $c = 0, 1, 2, \dots, k^2-1$ โดยที่

$$c = sk + e$$

เมื่อ $0 \leq s \leq k-1$ และ $0 \leq e \leq k-1$ ต่อไปจะนิยามฟังก์ชันการเติม j โดยที่

$$j(r, c) = s - re \pmod{k} \quad (3.19)$$

หมายถึง เศษที่เหลือเมื่อหาร $s - re$ ด้วย k ตัวอย่างเช่น สมมติว่า $k = 4$ และเราต้องการคำนวณ $j(2, 13)$ เนื่องจาก $13 = 3 \cdot 4 + 1$ เราจึงได้ $r = 2, c = 13, s = 3, e = 1$ และ $j(2, 13) = 3 - 2 \cdot 1 \pmod{4} = 1$ ต่อไปจะเป็นตัวอย่างการเติม 2-de Bruijn L-array, 3-de Bruijn L-array และ 4-de Bruijn L-array ที่เกิดจากสมการ (3.19) ดังแสดงในตารางที่ 3.3

0	0	1	1
0	1	1	0

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	2	1	1	0	2	2	1	0
0	1	2	1	2	0	2	0	1

0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
0	3	2	1	1	0	3	2	2	1	0	3	3	2	1	0
0	2	0	2	1	3	1	3	2	0	2	0	3	1	3	1
0	1	2	3	1	2	3	0	2	3	0	1	3	0	1	2

Table 3.3: 2-de Bruijn L-array, 3-de Bruijn L-array และ 4-de Bruijn L-array

ผลการศึกษาของฟังก์ชันการเติม j แสดงได้ดังทฤษฎีบท 3.1.3

ทฤษฎีบท 3.1.3 โดยการเติมค่า $j(r, c)$ ในแถวที่ r และหลักที่ c ในอาเรย์ขนาด $k \times k^2$ จะทำให้เกิด k -de Bruijn L-array

พิสูจน์ พิจารณาอาเรย์ที่มีขนาด $k \times k^2$ โดยที่ $j(r, c)$ อยู่ในแถว r หลัก c ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ เราต้องแสดงให้เห็นว่าการเติมรูปตัว L สองรูปที่อยู่ในตำแหน่งที่แตกต่างกันของอาเรย์นั้นแตกต่างกัน สมมติให้

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a_1 & \\ \hline b_1 & d_1 \\ \hline \end{array} \quad \text{และ} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline a_2 & \\ \hline b_2 & d_2 \\ \hline \end{array}$$

เป็นสองรูปทรงตัว L ที่อยู่ในตำแหน่งที่แตกต่างกัน เห็นได้ชัดว่า ถ้า $a_1 \neq a_2$ หรือ $b_1 \neq b_2$ แล้วการเติมเหล่านี้จะแตกต่างกัน ดังนั้นจึงสมมติว่า $a_1 = a_2 = a$ และ $b_1 = b_2 = b$ เราต้องแสดงให้เห็นว่า $d_1 \neq d_2$ สมมติว่า a_1 อยู่ในแถว r หลัก c โดย $c = sk + e$ และ a_2 อยู่ในแถว R หลัก C โดย $C = Sk + E$ ต่อไปจะแสดงว่า $e = E$ และ $r \neq R$

สำหรับการพิสูจน์ $e = E$ จาก $c = sk + e$ และ $C = Sk + E$

พิจารณา

$$\begin{aligned} a &= a_1 = j(r, c) = s - re \pmod{k} \\ b &= b_1 = j(r+1, c) = s - (r+1)e \pmod{k} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a - b &= [s - re] - [s - (r+1)e] \pmod{k} \\ &\equiv e \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.20)$$

และ

$$\begin{aligned} a &= a_2 = j(R, C) = S - RE \pmod{k} \\ b &= b_2 = j(R+1, C) = S - (R+1)E \pmod{k} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a - b &= [S - RE] - [S - (R+1)E] \pmod{k} \\ &\equiv E \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.21)$$

จาก (3.20) และ (3.21) ดังนั้น $e = E$

ต่อไปจะแสดงว่า $r \neq R$ โดยสมมติให้ $r = R$

พิจารณา

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 \\ j(r, c) &= j(R, C) \\ s - re &\equiv S - RE \pmod{k} \\ s - re &\equiv S - Re \pmod{k} \\ s - re &\equiv S - re \pmod{k} \\ s &\equiv S \pmod{k} \end{aligned}$$

ดังนั้น $s = S$ เนื่องจาก $0 \leq s \leq k-1$ และ $0 \leq S \leq k-1$ ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $c = C$

พิจารณา

$$\begin{aligned} c &= sk + e \\ &= Sk + e \\ &= Sk + E \\ &= C \end{aligned}$$

ดังนั้น $c = C$ เกิดข้อขัดแย้ง เนื่องจากสมมติฐานว่า การเติม L ในแต่ละครั้งต้องอยู่ในตำแหน่งที่แตกต่างกัน เพราะฉะนั้น $r \neq R$

ต่อไปนี้จะพิจารณาค่า e สองกรณี คือ $e = k-1$ และ $e \neq k-1$ โดยที่เราจะต้องแสดงให้เห็นว่า $d_1 \neq d_2$

กรณีที่ $e = k-1$ จะแสดงว่า $s \neq S$ สมมติให้ $s = S$

พิจารณา

$$a_1 = j(r, c) = s - re \pmod{k} = s - r(k-1) \pmod{k} \quad (3.22)$$

$$a_2 = j(R, C) = S - RE \pmod{k} = S - R(k-1) \pmod{k} \quad (3.23)$$

เนื่องจาก $a_1 = a_2$ จาก (3.22) และ (3.23) จะได้ว่า

$$s - r(k - 1) \equiv S - R(k - 1) \pmod{k}$$

$$s - r(k - 1) \equiv s - R(k - 1) \pmod{k}$$

$$-r \equiv -R \pmod{k}$$

$$r \equiv R \pmod{k}$$

เนื่องจาก $r \equiv R \pmod{k}$ แสดงว่า $r = R$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับ $r \neq R$

จึงสามารถสรุปได้ว่า $s \neq S$

จากนั้นเราจะพิจารณา d_1 และ d_2 จะได้ว่า d_1 อยู่ในแถว $r + 1$ หลัก $c + 1$ โดยที่ $c + 1 = k(s + 1) + 0$ และ d_2 อยู่ในแถว $R + 1$ หลัก $C + 1$ โดยที่ $C + 1 = k(S + 1) + 0$

พิจารณา

$$\begin{aligned} d_1 = j(r + 1, c + 1) &= (s + 1) - (r + 1)(0) \pmod{k} \\ &= s + 1 \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} d_2 = j(R + 1, C + 1) &= (S + 1) - (R + 1)(0) \pmod{k} \\ &= S + 1 \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.25)$$

จะพิสูจน์ว่า $d_1 \neq d_2$ สมมติให้ $d_1 = d_2$ จาก (3.24) และ (3.25)

จะได้ $s + 1 \equiv S + 1 \pmod{k}$

$$s \equiv S \pmod{k}$$

เนื่องจาก $s \equiv S \pmod{k}$ แสดงว่า $s = S$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ว่า $s \neq S$

ดังนั้น $d_1 \neq d_2$

กรณีที่ $e \neq k - 1$

สมมติให้ $e \neq k - 1$ จะได้ว่า d_1 อยู่ในแถว $r + 1$ หลัก $c + 1$ โดยที่ $c + 1 = sk + e + 1$ และ d_2 อยู่ในแถว $R + 1$ หลัก $C + 1$ โดยที่ $C + 1 = Sk + E + 1$

จาก $j(r, c) = s - re \pmod{k} = a$

$$\begin{aligned} d_1 = j(r + 1, c + 1) &= s - (r + 1)(e + 1) \pmod{k} \\ &\equiv s - re - r - e - 1 \pmod{k} \\ &\equiv a - r - e - 1 \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} d_2 = j(R + 1, C + 1) &= S - (R + 1)(e + 1) \pmod{k} \\ &\equiv S - Re - r - e - 1 \pmod{k} \\ &\equiv a - R - e - 1 \pmod{k} \end{aligned} \quad (3.27)$$

จะพิสูจน์ว่า $d_1 \neq d_2$ สมมติให้ $d_1 = d_2$ จาก (3.26) และ (3.27)

จะได้ $a - r - e - 1 \equiv a - R - e - 1 \pmod{k}$

$$-r \equiv -R \pmod{k}$$

$$r \equiv R \pmod{k}$$

เนื่องจาก $r \equiv R \pmod{k}$ แสดงว่า $r = R$ ดังนั้นจึงเกิดข้อขัดแย้งกับ $r \neq R$
 ดังนั้น $d_1 \neq d_2$

3.1.4 ฟังก์ชันการเลื่อน

จากการพิสูจน์ฟังก์ชันการเติม $f(r, c), g(r, c), h(r, c)$ และ $j(r, c)$ ทำให้เกิด k -de Bruijn L-array ดังนั้น ฟังก์ชันการเลื่อนของฟังก์ชันดังกล่าวข้างต้นทำให้เกิด k -de Bruijn L-array ด้วยเช่นกัน

บทนิยาม 3.1.4 พิจารณาฟังก์ชัน f, g, h และ j เราจะนิยามฟังก์ชันการเลื่อนตามแถว เมื่อ n แทนจำนวนการเลื่อนในแต่ละครั้ง ดังต่อไปนี้

$$f(r, c) \rightarrow \Phi_f^{(n)}(r, c) = s + (r + n)e \pmod{k}$$

$$g(r, c) \rightarrow \Phi_g^{(n)}(r, c) = -(s + (r + n)e) \pmod{k}$$

$$h(r, c) \rightarrow \Phi_h^{(n)}(r, c) = -s + (r + n)e \pmod{k}$$

$$j(r, c) \rightarrow \Phi_j^{(n)}(r, c) = s - (r + n)e \pmod{k}$$

ตัวอย่าง 3.1 ฟังก์ชันเลื่อนแถว $f(r, c)$ ที่ $k = 3$

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0

Table 3.4: $\Phi_f^{(0)}(r, c) = s + re \pmod{k}$

0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0
0	0	0	1	1	1	2	2	2

Table 3.5: $\Phi_f^{(1)}(r, c) = s + (r + 1)e \pmod{k}$

0	2	1	1	0	2	2	1	0
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1

Table 3.6: $\Phi_f^{(2)}(r, c) = s + (r + 2)e \pmod{k}$

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0

Table 3.7: $\Phi_f^{(3)}(r, c) = s + (r + 3)e \pmod{k}$

ข้อสังเกต เราจะเห็นได้ว่า $\Phi_f^{(3)}(r, c) = \Phi_f^{(0)}(r, c) = f(r, c)$

บทนิยาม 3.1.5 พิจารณาฟังก์ชัน f, g, h และ j เราจะนิยามฟังก์ชันการเลื่อนตามหลัก เมื่อ n แทนจำนวนการเลื่อนในแต่ละครั้ง ที่สอดคล้องกับสมการ $c + n = sk + e$ ดังต่อไปนี้

$$f(r, c) \rightarrow \Lambda_f^{(n)}(r, c) = s + re \pmod{k}$$

$$g(r, c) \rightarrow \Lambda_g^{(n)}(r, c) = -(s + re) \pmod{k}$$

$$h(r, c) \rightarrow \Lambda_h^{(n)}(r, c) = -s + re \pmod{k}$$

$$j(r, c) \rightarrow \Lambda_j^{(n)}(r, c) = s - re \pmod{k}$$

ตัวอย่าง 3.2 ฟังก์ชันเลื่อนหลัก $f(r, c)$ ที่ $k = 3$

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0

Table 3.8: $\Lambda_f^{(0)}(r, c) = s + re \pmod{k}$

0	0	1	1	1	2	2	2	0
1	2	1	2	0	2	0	1	0
2	1	1	0	2	2	1	0	0

Table 3.9: $\Lambda_f^{(1)}(r, c) = s + re \pmod{k}$

0	1	1	1	2	2	2	0	0
2	1	2	0	2	0	1	0	1
1	1	0	2	2	1	0	0	2

Table 3.10: $\Lambda_f^{(2)}(r, c) = s + re \pmod{k}$

$\vdots$

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0

Table 3.11: $\Lambda_f^{(9)}(r, c) = s + re \pmod k$

ข้อสังเกต เราจะเห็นได้ว่า $\Lambda_f^{(9)}(r, c) = \Lambda_f^{(0)}(r, c) = f(r, c)$

3.2 สมบัติเชิงกรุปของการเลื่อนของฟังก์ชันการเติม

3.2.1 สมบัติเชิงกรุปของฟังก์ชันการเลื่อนตามแถว

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $G_\theta = \{\Phi_\theta^0, \Phi_\theta^1, \Phi_\theta^2, \dots, \Phi_\theta^{k-1}\}$ เมื่อ $\theta = f, g, h, j$ เราจะนิยาม $*$ บน G โดย

$$\Phi_\theta^i * \Phi_\theta^j = \Phi_\theta^{i+j} \quad (*)$$

ตัวอย่าง 3.3 $G_f = \{\Phi_f^0, \Phi_f^1, \Phi_f^2, \dots, \Phi_f^{k-1}\}$

$$\begin{aligned} \Phi_f^0(r, c) &= s + re \pmod k \\ \Phi_f^1(r, c) &= s + (r+1)e \pmod k \\ \Phi_f^2(r, c) &= s + (r+2)e \pmod k \\ \Phi_f^3(r, c) &= s + (r+3)e \pmod k \\ &\vdots \\ \Phi_f^{k-2}(r, c) &= s + (r+k-2)e \pmod k \\ \Phi_f^{k-1}(r, c) &= s + (r+k-1)e \pmod k \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2.1 G_θ เป็นกรุปภายใต้การดำเนินการ $(*)$ เมื่อ $\theta = f, g, h, j$

การพิสูจน์คุณสมบัติเชิงกรุป

1. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

พิจารณา

$$\begin{aligned} \Phi_\theta^i * (\Phi_\theta^j * \Phi_\theta^l) &= \Phi_\theta^i * \Phi_\theta^{j+l} \\ &= \Phi_\theta^{i+j+l} \\ &= \Phi_\theta^{i+j} * \Phi_\theta^l \\ &= (\Phi_\theta^i * \Phi_\theta^j) * \Phi_\theta^l \end{aligned}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการเลื่อนตามแถวมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

2. สมบัติการมีเอกลักษณ์

จะแสดงว่า Φ_θ^0 เป็นเอกลักษณ์ ดังนั้น $\Phi_\theta^i * \Phi_\theta^0 = \Phi_\theta^{i+0} = \Phi_\theta^i = \Phi_\theta^{0+i} = \Phi_\theta^0 * \Phi_\theta^i$

3. สมบัติการมีตัวผกผัน

ให้ $\Phi_\theta^i \in G_\theta$ จะแสดงว่า Φ_θ^{n-i} เป็นตัวผกผันของ Φ_θ^i

ดังนั้น $\Phi_\theta^i * \Phi_\theta^{n-i} = \Phi_\theta^{i+n-i} = \Phi_\theta^0$ และ $\Phi_\theta^{n-i} * \Phi_\theta^i = \Phi_\theta^{n-i+i} = \Phi_\theta^0$

ข้อสังเกต เราจะเห็นได้ว่า G_θ เป็นกรุปวัฏจักรที่มี Φ_θ^1 เป็นตัวก่อกำเนิด

3.2.2 สมบัติเชิงกรุปของฟังก์ชันการเลื่อนตามหลัก

บทนิยาม 3.2.2 ให้ $H_\theta = \{\Lambda_\theta^0, \Lambda_\theta^1, \Lambda_\theta^2, \dots, \Lambda_\theta^{k-1}\}$ เมื่อ $\theta = f, g, h, j$ เราจะนิยาม $*$ บน H โดย

$$\Lambda_\theta^i * \Lambda_\theta^j = \Lambda_\theta^{i+j} \quad (**)$$

ตัวอย่าง 3.4 $H_f = \{\Lambda_f^0, \Lambda_f^1, \Lambda_f^2, \dots, \Lambda_f^{k-1}\}$

$$\begin{aligned} \Lambda_f^0(r, c) &= s + re \pmod{k} & ; & \quad c = sk + e \\ \Lambda_f^1(r, c) &= s + re \pmod{k} & ; & \quad c + 1 = sk + e \\ \Lambda_f^2(r, c) &= s + re \pmod{k} & ; & \quad c + 2 = sk + e \\ \Lambda_f^3(r, c) &= s + re \pmod{k} & ; & \quad c + 3 = sk + e \\ &\vdots \\ \Lambda_f^{k-2}(r, c) &= s + re \pmod{k} & ; & \quad c + k - 2 = sk + e \\ \Lambda_f^{k-1}(r, c) &= s + re \pmod{k} & ; & \quad c + k - 1 = sk + e \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.2.2 H_θ เป็นกรุปภายใต้การดำเนินการ $(**)$ เมื่อ $\theta = f, g, h, j$

การพิสูจน์คุณสมบัติเชิงกรุป

1. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad \Lambda_\theta^i * (\Lambda_\theta^j * \Lambda_\theta^l) &= \Lambda_\theta^i * \Lambda_\theta^{j+l} \\ &= \Lambda_\theta^{i+j+l} \\ &= \Lambda_\theta^{i+j} * \Lambda_\theta^l \\ &= (\Lambda_\theta^i * \Lambda_\theta^j) * \Lambda_\theta^l \end{aligned}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันการเลื่อนตามหลักมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

2. สมบัติการมีเอกลักษณ์

จะแสดงว่า Λ_θ^0 เป็นเอกลักษณ์ ดังนั้น $\Lambda_\theta^i * \Lambda_\theta^0 = \Lambda_\theta^{i+0} = \Lambda_\theta^i = \Lambda_\theta^{0+i} = \Lambda_\theta^0 * \Lambda_\theta^i$

3. สมบัติการมีตัวผกผัน

ให้ $\Lambda_\theta^i \in H_\theta$ จะแสดงว่า Λ_θ^{n-i} เป็นตัวผกผันของ Λ_θ^i

ดังนั้น $\Lambda_\theta^i * \Lambda_\theta^{n-i} = \Lambda_\theta^{i+n-i} = \Lambda_\theta^0$ และ $\Lambda_\theta^{n-i} * \Lambda_\theta^i = \Lambda_\theta^{n-i+i} = \Lambda_\theta^0$

ข้อสังเกต เราจะเห็นได้ว่า H_θ เป็นกรุปวัฏจักรที่มี Λ_θ^1 เป็นตัวก่อกำเนิด

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

ในการค้นคว้าอิสระนี้มีวัตถุประสงค์ คือ เพื่อศึกษาวิธีการเติมแบบใหม่สำหรับ k -de Bruijn L-Arrays และเพื่อศึกษาสมบัติเชิงกรุปของการเลื่อนของฟังก์ชันการเติมแบบใหม่ ซึ่งสามารถสรุปผลการศึกษาได้ ดังนี้

1.จากการศึกษาวิธีการเติมแบบใหม่สำหรับ k -de Bruijn L-Arrays ทำให้เราได้ฟังก์ชันการเติมแบบใหม่สำหรับ k -de Bruijn L-Arrays ที่สอดคล้องกับฟังก์ชัน $f(r, c)$ ทั้งหมด 3 ฟังก์ชัน คือ

$$1) g(r, c) = -(s + re) \pmod k$$

$$2) h(r, c) = -s + re \pmod k$$

$$3) j(r, c) = s - re \pmod k$$

โดยที่ r คือแถว c คือคอลัมน์ s คือตารางย่อย และ e คือหลักในตารางย่อยของอาเรย์ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชัน $f(r, c) = s + re \pmod k$ ดังนี้

ฟังก์ชันการเติม $g(r, c)$

ฟังก์ชันการเติม $g(r, c)$ เป็นการเติมโดยใช้การเติมอินเวอร์สใน $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ ของฟังก์ชันการเติม $f(r, c)$ ตัวอย่างเช่น สมมติว่า $k = 3$ และเราต้องการคำนวณ $f(1, 2)$ และ $g(1, 2)$ จะได้ว่าในตำแหน่งเดียวกันนั้นเราจะเติม $f(1, 2) = 2$ และ $g(1, 2) = 1$ เนื่องจาก $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ มี $[0]^{-1} = [0]$, $[1]^{-1} = [2]$ และ $[2]^{-1} = [1]$ ดังแสดงในตารางที่ 4.1 และ 4.2

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0

Table 4.1: 3-de Bruijn L-array by $f(r, c)$

0	0	0	2	2	2	1	1	1
0	2	1	2	1	0	1	0	2
0	1	2	2	0	1	1	2	0

Table 4.2: 3-de Bruijn L-array by $g(r, c)$

ฟังก์ชันการเติม $h(r, c)$

ฟังก์ชันการเติม $h(r, c)$ เป็นการสลับตำแหน่งของตารางย่อยของการเติมโดยใช้ฟังก์ชัน $f(r, c)$ กล่าวคือแบ่งอาร์เรย์ขนาด $k \times k^2$ ออกเป็นตารางย่อย $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$ แล้วสลับตารางย่อย s_i และ s_{i-1} เมื่อ $i \in \mathbb{Z}_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ ดังแสดงในตารางที่ 4.3 และ 4.4

s_0			s_1			s_2		
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0

Table 4.3: 3-de Bruijn L-array by $f(r, c)$

s_0			s_2			s_1		
0	0	0	2	2	2	1	1	1
0	1	2	2	0	1	1	2	0
0	2	1	2	1	0	1	0	2

Table 4.4: 3-de Bruijn L-array by $h(r, c)$

ฟังก์ชันการเติม $j(r, c)$

ฟังก์ชันการเติม $j(r, c)$ เป็นการสลับแถวของอาร์เรย์ที่เกิดจากการเติมโดยใช้ฟังก์ชัน $f(r, c)$ กล่าวคือสลับแถว r_i และ r_{i-1} ดังแสดงในตารางที่ 4.5 และ 4.6

0	0	0	1	1	1	2	2	2	r_0
0	1	2	1	2	0	2	0	1	r_1
0	2	1	1	0	2	2	1	0	r_2

Table 4.5: 3-de Bruijn L-array by $f(r, c)$

0	0	0	1	1	1	2	2	2	r_0
0	2	1	1	0	2	2	1	0	r_2
0	1	2	1	2	0	2	0	1	r_1

Table 4.6: 3-de Bruijn L-array by $j(r, c)$

2. จากการศึกษาสมบัติเชิงกรุปของการเลื่อนของฟังก์ชันการเติมแบบใหม่ ทำให้เราทฤษฎีบทของการเลื่อนตามแถวและการเลื่อนตามหลักของฟังก์ชัน $f(r, c), g(r, c), h(r, c)$ และ $j(r, c)$ และมีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติเชิงกรุปของฟังก์ชันที่ได้ศึกษา กล่าวคือ การเลื่อนตามแถวและการเลื่อนตามหลักของฟังก์ชัน $f(r, c), g(r, c), h(r, c)$ และ $j(r, c)$ เป็นกรุปวัฏจักรที่มีอันดับ k

บรรณานุกรม

- [1] Nicolaas Govert de Bruijn, A combinatorial problem, Koninklijke Nederlandse Akademie v. Wetenschappen 49 (1946) 758–764.
- [2] Persi Diaconis and Ron Graham, Magical Mathematics: The Mathematics that Animate Great Magic Tricks, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.
- [3] I. J. Good, Normal recurring decimals, Journal of the London Mathematical Society 21 (1946) 167–169.
- [4] Glenn Hurlbert and Garth Isaak, On the de Bruijn torus problem, Journal of Combinatorial Theory Series A 64 (1993) 50–62. [http://dx.doi.org/10.1016/0097-3165\(93\)90087-O](http://dx.doi.org/10.1016/0097-3165(93)90087-O)
- [5] Lara Pudwell and Rachel Rockey, de Bruijn Arrays for L-Fillings, Mathematics Magazine , Vol. 87, No. 1 (February 2014), pp. 57-60



New L-Fillings for de Bruijn Arrays

Supaporn Khaihom

Advisor : Dr. Khwanchai Kunwai

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University

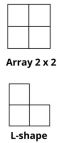


Abstract

This independent study is motivated by the paper of Lara Pudwell and Rachel Rockey entitled "de Bruijn Arrays for L-Fillings". In that paper, the authors construct k-de Bruijn L-Arrays by using the filling function $f(r, c) = s + re \pmod k$, corresponding to the equation $c = sk + e$. In this work, we find new fillings, in addition to Lara Pudwell and Rachel Rockey work, for k-de Bruijn L-Arrays. In addition, we investigate group properties of the shift functions of the new fillings.

Introduction

k-de Bruijn L-array



In this work, we consider an L-shape that is, a 2×2 array with the upper right corner removed. Since the L-shape has three entries, there are k^3 fillings of the L with digits from $\{0, \dots, k-1\}$. We wish to find a $k \times k^2$ array (with the left side glued to the right side and the top glued to the bottom) that contains each of the k^3 different L's exactly once. We call such an array a k-de Bruijn L-array.

Example of k-de Bruijn L-array

Some L-shape, k = 3

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

3-de Bruijn L-array by $f(r, c)$

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0

New filling functions

$$g(r, c) = -(s + re) \pmod k; \quad c = sk + e$$

For example, suppose that $k = 3$ and we wish to compute $g(1, 3)$. Since $3 = 1 \cdot 3 + 0$, we have $r = 1, c = 3, s = 1, e = 0$, and $g(1, 3) = -(1 + 1 \cdot 0) \pmod 3 = 2$

0	0	0	2	2	1	1	1	1
0	2	1	2	1	0	1	0	2
0	1	2	2	0	1	1	2	0

3-de Bruijn L-array by $g(r, c)$

$$h(r, c) = -s + re \pmod k; \quad c = sk + e$$

For example, suppose that $k = 3$ and we wish to compute $h(1, 3)$. Since $3 = 1 \cdot 3 + 0$, we have $r = 1, c = 3, s = 1, e = 0$, and $h(1, 3) = -(1 + 1 \cdot 0) \pmod 3 = 2$

0	0	0	2	2	1	1	1	1
0	1	2	2	0	1	1	2	0
0	2	1	2	1	0	1	0	2

3-de Bruijn L-array by $h(r, c)$

$$j(r, c) = s - re \pmod k; \quad c = sk + e$$

For example, suppose that $k = 3$ and we wish to compute $j(1, 3)$. Since $3 = 1 \cdot 3 + 0$, we have $r = 1, c = 3, s = 1, e = 0$, and $j(1, 3) = (1 - 1 \cdot 0) \pmod 3 = 1$

0	0	0	1	1	2	2	2	2
0	2	1	1	0	2	2	1	0
0	1	2	1	2	0	2	0	1

3-de Bruijn L-array by $j(r, c)$

The shift functions

Definition 1. Consider functions f, g, h and j , we define the row shift functions, where n is number of shifts at a time as follows.

$$\begin{aligned} f(r, c) &\rightarrow \Lambda_f^{(n)}(r, c) = s + (r+n)e \pmod k \\ g(r, c) &\rightarrow \Lambda_g^{(n)}(r, c) = -(s + (r+n)e) \pmod k \\ h(r, c) &\rightarrow \Lambda_h^{(n)}(r, c) = -s + (r+n)e \pmod k \\ j(r, c) &\rightarrow \Lambda_j^{(n)}(r, c) = s - (r+n)e \pmod k \end{aligned}$$

The shift functions

Definition 2. Consider functions f, g, h and j , we define the column shift functions, where n is number of shifts at a time, corresponding to the equation $c + n = sk + e$ as follows.

$$\begin{aligned} f(r, c) &\rightarrow \Lambda_f^{(n)}(r, c) = s + re \pmod k \\ g(r, c) &\rightarrow \Lambda_g^{(n)}(r, c) = -(s + re) \pmod k \\ h(r, c) &\rightarrow \Lambda_h^{(n)}(r, c) = -s + re \pmod k \\ j(r, c) &\rightarrow \Lambda_j^{(n)}(r, c) = s - re \pmod k \end{aligned}$$

Example of the shift functions

The row shift functions : $f(r, c)$ where $k = 3$

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0

$\Phi_f^{(0)}(r, c) = s + re \pmod k$

0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	2	1	1	0	2	2	1	0
0	0	0	1	1	1	2	2	2

$\Phi_f^{(1)}(r, c) = s + (r+1)e \pmod k$

0	2	1	1	0	2	2	1	0
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1

$\Phi_f^{(2)}(r, c) = s + (r+2)e \pmod k$

Group properties of the shift functions

Definition 3. Let $G_\theta = \{\Phi_\theta^0, \Phi_\theta^1, \Phi_\theta^2, \dots, \Phi_\theta^{k-1}\}$ where $\theta = f, g, h, j$. we define $*$ on G that is

$$\Phi_\theta^i * \Phi_\theta^j = \Phi_\theta^{i+j}$$

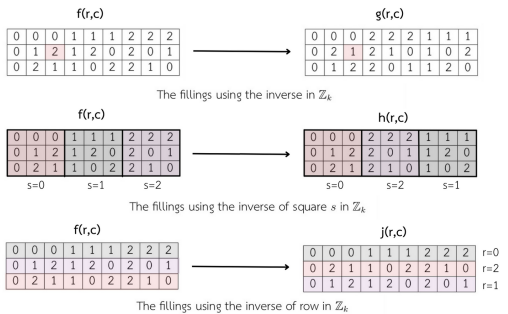
Theorem 1. G_θ is a group, under an operation $*$ where $\theta = f, g, h, j$.

Definition 4. Let $H_\theta = \{\Lambda_\theta^0, \Lambda_\theta^1, \Lambda_\theta^2, \dots, \Lambda_\theta^{k-1}\}$ where $\theta = f, g, h, j$. we define $*$ on G that is

$$\Lambda_\theta^i * \Lambda_\theta^j = \Lambda_\theta^{i+j}$$

Theorem 2. H_θ is a group, under an operation $*$ where $\theta = f, g, h, j$.

Conclusion



References

- [1] Nicolaas Govert de Bruijn, A combinatorial problem, Koninklijke Nederlandse Akademie v. Wetenschappen 49 (1946) 758–764.
- [2] Persi Diaconis and Ron Graham, Magical Mathematics: The Mathematics that Animate Great Magic Tricks, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011.
- [3] I. J. Good, Normal recurring decimals, Journal of the London Mathematical Society 21(1946) 167–169.
- [4] Glenn Hurlbert and Garth Isaak, On the de Bruijn torus problem, Journal of Combinatorial Theory Series A 64 (1993) 50–62. [http://dx.doi.org/10.1016/0097-3165\(93\)90087-0](http://dx.doi.org/10.1016/0097-3165(93)90087-0)
- [5] Lara Pudwell and Rachel Rockey, de Bruijn Arrays for L-Fillings, Mathematics Magazine, Vol. 87, No. 1 (February 2014), pp. 57–60