

การศึกษาเชิงเปรียบเทียบของการประมาณค่าปริพันธ์ที่ขึ้นอยู่กับการวางนัยทั่วไปของอสมการ  
โอสโตรสกี

(A comparative study of numerical integration based on a generalization of  
Ostrowski's inequality)

นายสิทธินันท์ ทองคำสม

รหัส 630510521

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ปีการศึกษา 2566

การศึกษาเชิงเปรียบเทียบของการประมาณค่าปริพันธ์ที่ขึ้นอยู่กับการวางนัยทั่วไปของอสมการโอสโตรสกี

(A comparative study of numerical integration based on a generalization of Ostrowski's inequality)

นายสิทธินันท์ ทองคำสม

630510521

งานค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

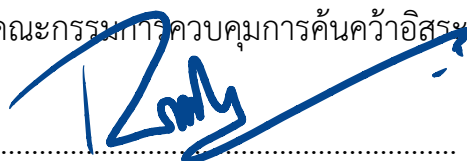
ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2566

การศึกษาเชิงเปรียบเทียบของการประมาณค่าปริพันธ์ที่ขึ้นอยู่กับ การวางนัยทั่วไปของอสมการโอสโตรสกี

(A comparative study of numerical integration based on a generalization of Ostrowski's inequality)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา  
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต  
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ



(รศ. ดร.เบน วงศ์สายใจ)

ประธานกรรมการ

ณัฐพล พลอยมะกล้า

(ผศ. ดร.ณัฐพล พลอยมะกล้า)

กรรมการ

วันที่ 19 มีนาคม พ.ศ. 2567

## กิตติกรรมประกาศ

งานค้นคว้าอิสระฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาในกระบวนวิชาการศึกษาค้นคว้าอิสระ (206499) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อให้นักศึกษาได้ศึกษาค้นคว้าประยุกต์ใช้ทฤษฎีและแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการทำการค้นคว้าอิสระ ซึ่งผู้ค้นคว้าได้ศึกษาในเรื่อง การศึกษาเชิงเปรียบเทียบของการประมาณค่าปริพันธ์ที่ขึ้นอยู่กับ การวางนัยทั่วไปของอสมการโอสโทรสกี

ผู้ค้นคว้าขอขอบพระคุณ ประธานกรรมการสอบและในฐานะอาจารย์ที่ปรึกษา งานค้นคว้าอิสระ ที่อนุเคราะห์ทั้งร่างกาย แรงใจ สละเวลาอันมีค่าให้คำปรึกษา คำแนะนำ คำอธิบายในส่วนที่ผู้ค้นคว้าไม่เข้าใจ ให้ความรู้และคำแนะนำที่เกี่ยวข้องกับการทำงานค้นคว้าอิสระ การนำเสนอและรูปเล่มรายงาน ตลอดจนตรวจสอบความสมบูรณ์ถูกต้อง การค้นคว้าอิสระนี้จนประสบความสำเร็จตามวัตถุประสงค์ทุกประการ

ขอขอบพระคุณ อาจารย์กรรมการสอบงานค้นคว้าอิสระที่ได้สละเวลาอันมีค่าให้ข้อเสนอแนะ พิจารณาและตรวจสอบความถูกต้องเหมาะสม รวมถึงให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานค้นคว้าอิสระฉบับนี้ให้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ทั้งนี้ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ผู้มีพระคุณ ที่ให้กำลังใจอย่างสม่ำเสมอตลอดการทำงาน ตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์

ขอขอบคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่ได้กรุณาอบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในและนอกตำราให้แก่ผู้ค้นคว้าอันเป็นประโยชน์และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ท้ายที่สุดนี้ ขอขอบคุณเพื่อน พี่ น้อง ภาควิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนผู้มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่าน ที่ได้กล่าวถึงที่ให้กำลังใจ ให้ความรู้ให้การช่วยเหลือ เป็นผลให้งานค้นคว้าอิสระนี้ออกมาเป็นไปตามรูปแบบและวัตถุประสงค์ทุกประการ

นายสิทธิพันธ์ ทองคำสม

|                          |                                                                                                     |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| หัวข้อ (ภาษาไทย)         | การศึกษาเชิงเปรียบเทียบของการประมาณค่าปริพันธ์ที่ขึ้นอยู่กับ<br>วงนัยทั่วไปของอสมการโอสโตรสกี       |
| (ภาษาอังกฤษ)             | A comparative study of numerical integration based on a<br>generalization of Ostrowski's inequality |
| ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ | นายสิทธิพันธ์ ทองคำสม รหัสนักศึกษา 630510521                                                        |
| ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา     | รศ. ดร.เบน วงศ์สายใจ                                                                                |
| ชื่อกรรมการสอบ           | ผศ. ดร.ณัฐพล พลอยมะกล้า                                                                             |

### บทคัดย่อ

ในการค้นคว้าอิสระนี้มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาการวงนัยทั่วไปของอสมการโอสโตรสกี เพื่อสร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบใหม่สำหรับการประมาณค่าปริพันธ์ ทั้งนี้ เราจะประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่สร้างขึ้นในการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันบางรูปแบบ และเปรียบเทียบความแม่นยำกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งเป็นที่รู้จักกันดี ได้แก่ กฎสี่เหลี่ยมคางหมู และกฎของซิมป์สัน สำหรับการหารูปแบบของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่เหมาะสม

### Abstract

This independent study aims to investigate a generalization of Ostrowski's inequality in order to establish a new method for numerical integration. Additionally, we apply the proposed numerical methods to approximate the value of definite integrals for certain functions and to compare their accuracy with well-known numerical integration techniques, such as the trapezoidal rule and Simpson's rule, to determine the most appropriate method.

## Contents

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| กิตติกรรมประกาศ                          | ก  |
| บทคัดย่อ                                 | ข  |
| Chapter 1 บทนำ (Introduction)            | 1  |
| Chapter 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries) | 3  |
| Chapter 3 ผลการศึกษา (Main results)      | 11 |
| Chapter 4 สรุปผลการศึกษา (Conclusion)    | 26 |
| บรรณานุกรม                               | 27 |
| ภาคผนวก                                  | 28 |

# Chapter 1

## บทนำ (Introduction)

ปริพันธ์ (Integral) เป็นการกำหนดค่าให้กับฟังก์ชัน ซึ่งอาจมองได้ว่าเป็นการรวมปริมาณย่อยขนาดเล็กมาก ๆ ของฟังก์ชันนั้นเข้าด้วยกันในรูปแบบที่คล้ายคลึงกับการกระจัด พื้นที่ ปริมาตร และแนวคิดอื่นที่เกี่ยวข้อง เรียกกระบวนการหาปริพันธ์ว่า การหาปริพันธ์ (Integration) ในการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์แบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite integral) เป็นปริพันธ์ที่หาค่าออกมาแล้ว ซึ่งสามารถตีความได้ว่าเป็นพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันบนระนาบ พร้อมกับกำหนดเครื่องหมายบวก/ลบ ให้กับพื้นที่ หากพื้นที่นั้นอยู่เหนือแกน  $X$  หรืออยู่ใต้แกน  $X$  ตามลำดับ และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite integral)

อย่างไรก็ตาม ฟังก์ชันหลายอย่างไม่สามารถคำนวณได้อย่างแม่นยำ ด้วยเหตุนี้จึงได้กำหนดวิธีที่เรียกว่า การปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical integration) มาศึกษาการประมาณค่าของปริพันธ์ (Integral) ให้มีค่าใกล้เคียงความเป็นจริงที่สุด

จากงานวิจัยของ N. Ujevic [5] ได้นำเสนอการหาประมาณค่าปริพันธ์รูปแบบใหม่จากอสมการของ Ostrowski ซึ่งผู้วิจัยมีแนวคิดในการหารูปแบบใหม่ในการประมาณค่าปริพันธ์จากอสมการของ Ostrowski และนำมาเปรียบเทียบเพื่อให้มีค่าที่แม่นยำกับค่าจริงมากที่สุด

### วัตถุประสงค์ของการค้นคว้าอิสระ (objectives)

1. เพื่อศึกษาการประมาณค่าปริพันธ์โดยอาศัยอสมการโอสโตรสกี
2. เพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์เชิงตัวเลขของการประมาณค่าปริพันธ์ของรูปแบบที่ได้กับวิธีอื่น ๆ

### ขอบเขตของการค้นคว้าอิสระ

หารูปแบบการประมาณค่าปริพันธ์ของอสมการโอสโตรสกี โดยทางทฤษฎีและทางตัวเลข

### วิธีการดำเนินการค้นคว้าอิสระ

1. ศึกษาความรู้พื้นฐาน เรื่อง การปริพันธ์เชิงตัวเลข
2. ศึกษาบทความ เรื่อง A Generalization of Ostrowski's Inequality and Applications in Numerical Integration
3. พิสูจน์อสมการของโอสโตรสกี และนำไปวิเคราะห์เพื่อเปรียบเทียบการประมาณค่าปริพันธ์
4. เขียนรูปเล่ม และตรวจสอบความถูกต้อง

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการค้นคว้าอิสระ (expected benefits and application)

1. ได้ทราบถึงการพิสูจน์ของการวางนัยทั่วไปของอสมการโฮลทรสกี
2. ได้ทราบสูตรการประมาณค่าของปริพันธ์รูปแบบใหม่ที่มีค่าความแม่นยำสูง

## Chapter 2

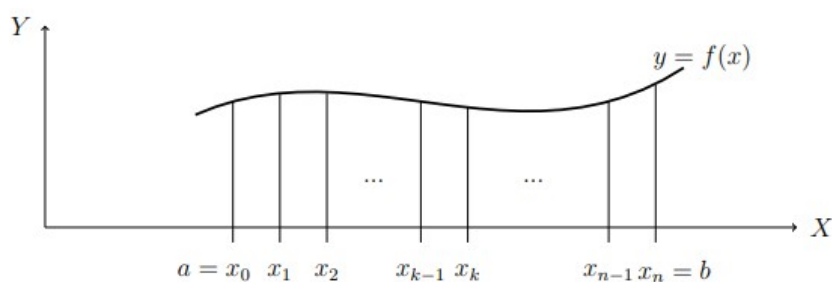
### ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)

ในส่วน of ความรู้พื้นฐานนี้ได้นำสูตรการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและฟังก์ชันของซิมป์สันมาใช้เพื่อเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนของฟังก์ชันปริพันธ์นั้น

**บทนิยาม 2.1** [1] เรียกเซต  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ว่า **ผลแบ่งกัน (partition)** ของช่วง  $[a, b]$  ซึ่งจุดใน  $P$  แบ่งช่วง  $[a, b]$  ออกเป็น  $n$  ช่วงคือ

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

นั่นคือ  $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$  เมื่อ  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$



รูปภาพ 2.1: ผลแบ่งกันของ  $[a, b]$  [1]

**บทนิยาม 2.2** [1] ให้  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  และ  $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  เป็นผลแบ่งกัน  $[a, b]$  สำหรับ  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  และ  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  ถ้า  $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$  หรือ  $m_k \leq f(x_k^*) \leq M_k$  โดยที่  $m_k$  เป็นค่าของ  $f$  ที่น้อยที่สุดในช่วง  $[x_{k-1}, x_k]$  และ  $M_k$  เป็นค่าของ  $f$  ที่มากที่สุดในช่วง  $[x_{k-1}, x_k]$  แล้ว

$$S^*(P, f) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

เรียก  $S^*(P, f)$  ว่า **ผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)** ของ  $f$  บนช่วง  $[a, b]$  เทียบกับผลแบ่งกัน  $P$

**บทนิยาม 2.3** [1] ให้  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$  และ  $P$  เป็นผลแบ่งกั้น  $[a, b]$  ถ้า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S^*(P, f) = L$$

จะกล่าวว่า  $f$  หาปริพันธ์ได้ (integrable) บน  $[a, b]$  และเรียกค่าลิมิต  $L$  ว่า **ปริพันธ์จำกัดเขต (definite integral)** ของ  $f$  บน  $[a, b]$  และเขียนแทนด้วย

$$\int_a^b f(x) dx = L$$

เรียก  $a$  และ  $b$  ว่า **ลิมิตล่าง (lower limit)** และ **ลิมิตบน (upper limit)** ตามลำดับ

**ตัวอย่าง 2.4**  $\int_1^2 x^4 dx$

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^4 dx &= \left[ \frac{x^5}{5} \right]_1^2 \\ &= \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} \\ &= \frac{32}{5} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{31}{5} \\ &= 6.2 \end{aligned}$$

■

**ตัวอย่าง 2.5**  $\int_0^2 2e^{2x} dx$

$$\begin{aligned} \int_0^2 2e^{2x} dx &= [e^{2x}]_0^2 \\ &= e^{2(2)} - e^{2(0)} \\ &= e^4 - e^0 \\ &= e^4 - 1 \\ &\approx 53.598150033144236 \end{aligned}$$

■

**ทฤษฎีบท 2.6** [2] ถ้า  $f$  และ  $g$  หาปริพันธ์ได้บน  $[a, b]$  และ  $f(x) \leq g(x)$  สำหรับทุก  $x \in [a, b]$  แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

**บทแทรก 2.7** [2] ถ้า  $f : [a, b] \rightarrow R$  หาปริพันธ์ได้บน  $[a, b]$  แล้ว  $|f|$  หาปริพันธ์ได้บน  $[a, b]$  และ

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

อย่างไรก็ตาม สำหรับการหาปริพันธ์จำกัดเขต บางฟังก์ชันไม่สามารถหาค่าได้เสมอ เช่น  $\int_a^b e^{x^2} dx$  จึงทำให้การศึกษาค่าประมาณค่าของปริพันธ์จำกัดเขตได้รับความสนใจมากขึ้น

**บทนิยาม 2.8** [3] **หลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู (trapezoidal rule)**

เป็นการประมาณค่าฟังก์ชัน  $f(x)$  ด้วยฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่ง  $p_1(x)$  หรือสมการเส้นตรง โดยกำหนดให้  $x_0 = a, x_1 = b$  ในการประมาณค่าปริพันธ์  $f(x)$  ด้วยฟังก์ชันพหุนามกำลังหนึ่ง  $p_1(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx$$

เราประมาณฟังก์ชัน  $f(x)$  ด้วย  $P_1(x)$  ในรูปแบบลากรองจ์ (Lagrange form) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1) dx \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า การประมาณค่าปริพันธ์  $I(f)$  ก็คือการหาพื้นที่ใต้กราฟของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูนั่นเอง

โดยทั่วไปแล้วในการหาค่าของปริพันธ์  $I(f)$  เราจะแบ่งช่วง  $[a, b]$  ออกเป็นช่วงเล็ก ๆ ที่มีความกว้าง  $h$  เท่า ๆ กัน  $n$  ช่วง นั่นคือ

$$h = \frac{b-a}{n} \text{ และ } x_i = a + ih \text{ สำหรับ } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

สำหรับแต่ละช่วงย่อย (sub-interval)  $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots$  เราก็สามารถประมาณพื้นที่ใต้กราฟรูปที่ 2.2 ของฟังก์ชัน  $f(x)$  โดยใช้พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูที่มีความสูง  $f(x_{i-1})$  และ  $f(x_i)$  ซึ่งพื้นที่ของสี่เหลี่ยมคางหมูหาได้จาก

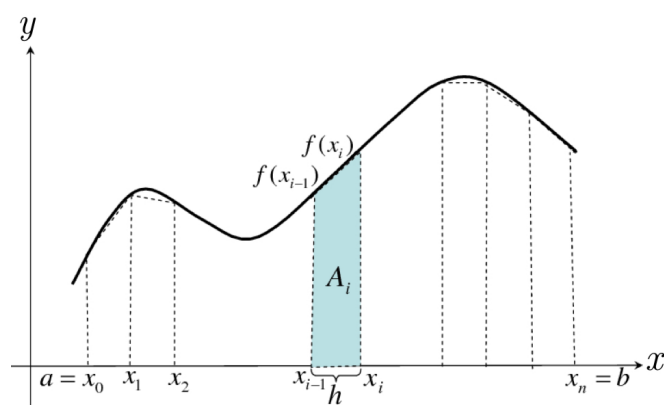
$$A_i = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

ดังนั้นในการหาพื้นที่ใต้กราฟทั้งหมด  $T_n$  จะได้จากการนำพื้นที่เล็ก ๆ แต่ละส่วนมารวมกันทั้งหมดดังนี้

$$\begin{aligned} T_n &= A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \dots \\ &\quad + \frac{h}{2}[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)] \end{aligned}$$

เราสามารถจัดรูปของสมการข้างต้นได้ดังนี้

$$T_n = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_n)] + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$$



รูปภาพ 2.2: การประมาณพื้นที่ใต้กราฟ  $f(x)$  ด้วยหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู [3]

**บทนิยาม 2.9 [3]** ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายของหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู

จากทฤษฎีบทหลักมูลที่หนึ่งของแคลคูลัส (first fundamental theorem of calculus) จะได้

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = F(x_i) - F(x_{i-1}) \quad \text{โดยที่ } F'(x) = f(x)$$

ถ้าเราพิจารณาการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน  $F(x)$  รอบจุด  $x_i$  และสมมติว่าฟังก์ชัน  $f(x)$  มีอนุพันธ์ต่อเนื่องไม่จำกัดจำนวนครั้ง จะได้

$$F(x_{i-1}) = F(x_i - h) = F(x_i) - hF'(x_i) + \frac{h^2}{2!}F''(x_i) - \frac{h^3}{3!}F'''(x_i) + \dots$$

หรืออาจจะเขียนได้ว่า

$$F(x) - F(x_{i-1}) = hf(x_i) - \frac{h^2}{2!}f'(x_i) + \frac{h^3}{3!}f''(x_i) + \dots = I_i$$

เราทราบว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h} + \frac{h}{2}f''(x_i) + \dots$$

เมื่อแทนค่า  $f'(x_i)$  ใน  $I_i$  จะได้

$$\begin{aligned} I_i &= \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i-1}))] - \frac{h^3}{12}f''(x_i) + \dots \\ &= A_i - \frac{h^3}{12}f''(x_i) + \dots \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย  $e_i$  หรือ เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ค่าคลาดเคลื่อนเฉพาะที่ (local error) สำหรับหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูคือ

$$e_i = I_i - A_i = -\frac{h^3}{12}f''(x_i) + \dots$$

**บทนิยาม 2.10** [3] **หลักเกณฑ์ของซิมป์สัน (Simpson's rule)** เป็นสูตรปิดนิวตัน-โคตส์ ที่เกิดจากการประมาณ  $f(x)$  ด้วยฟังก์ชันพหุนามดีกรีสอง นั่นคือ  $f(x) \approx p_2(x)$

กำหนดให้  $x_0 = a$ ,  $h = (b-a)/2$  ดังนั้น  $x_1 = x_0 + h$  และ  $x_2 = x_0 + 2h = b$  ในการประมาณค่าปริพันธ์  $f(x)$  ด้วยฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง  $p_2(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx$$

เราประมาณฟังก์ชัน  $f(x)$  ด้วย  $p_2(x)$  ในรูปแบบลากรองจ์ (Lagrange form) จะได้

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx &= \int_{x_0}^{x_2} \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) + f'''(\xi)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3} \right] dx \\ &= \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)dx - \frac{f(x_1)}{h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_2)dx \\ &\quad + \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_0)(x-x_1)dx \end{aligned}$$

หาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร  $x = x_0 + th$

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_2} p_2(x)dx &= \frac{f(x_0)}{2h^2} \int_0^2 (ht - h)(ht - 2h)dt - \frac{f(x_1)}{h^2} \int_0^2 ht(ht - 2h)dt \\
 &\quad + \frac{f(x_2)}{2h^2} \int_0^2 ht(ht - h)dt \\
 &= \frac{f(x_0)}{2} \int_0^2 (t - 1)(t - 2)dt - f(x_1) \int_0^2 t(t - 2)dt \\
 &\quad + \frac{f(x_2)}{2} \int_0^2 t(t - 1)dt \\
 &= \frac{f(x_0)}{2} \int_0^2 (t^2 - 3t + 2)dt - f(x_1) \int_0^2 (t^2 - 2t)dt \\
 &\quad + \frac{f(x_2)}{2} \int_0^2 (t^2 - t)dt \\
 &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]
 \end{aligned}$$

สามารถเขียนหลักเกณฑ์ของซิมป์สันในช่วง  $[x_0, x_2]$  ได้ดังนี้

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

ถ้าเราแบ่งช่วง  $[a, b]$  เป็นช่วงย่อย  $n$  ช่วง และใช้หลักเกณฑ์ของซิมป์สันในแต่ละช่วงย่อยเพื่อประมาณค่าพื้นที่ในแต่ละช่วงย่อย จะสามารถประมาณค่าได้ดีขึ้น เนื่องจากว่าหลักเกณฑ์ของซิมป์สันแบ่งช่วงย่อยออกเป็นสองช่วง ดังนั้นเราจะกำหนดให้  $n = 2m$  โดยที่  $m$  เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะได้ว่า

$$I(f) = \sum_{i=1}^m \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$$

และจากหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน

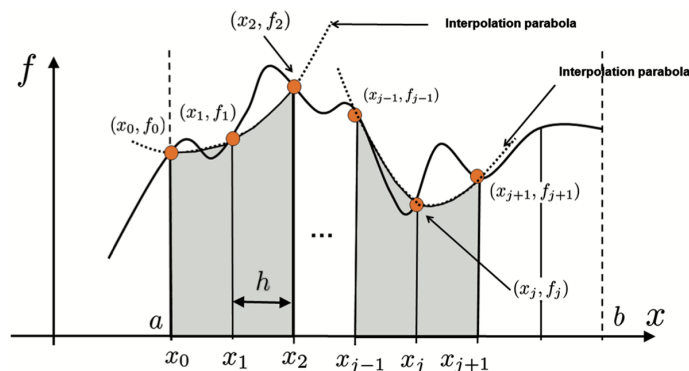
$$I(f) = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^m [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})]$$

และเราสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$I(f) = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + f(x_{2m}) \right]$$

ดังนั้นจะได้หลักเกณฑ์ของซิมป์สันแบบประกอบดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^m f(x_{2i-1}) + f(x_{2m}) \right]$$



รูปภาพ 2.3: การประมาณพื้นที่ใต้กราฟ  $f(x)$  ด้วยหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน [4]

### บทนิยาม 2.11 [3] ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายของหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน

การหาค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายของหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน สามารถใช้วิธีคล้าย ๆ กับการหาค่าคลาดเคลื่อนของหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่งเราสามารถเขียนหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน ในช่วง  $[x_0, x_2]$  ได้ดังนี้

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

โดยที่  $x_0 \leq \xi \leq x_2$  ดังนั้นค่าคลาดเคลื่อนของหลักเกณฑ์ของซิมป์สันในแต่ละช่วงย่อย คือ

$$e_i = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

**ตัวอย่าง 2.12** จงประมาณค่าปริพันธ์  $\int_1^2 x^4 e^x dx$  โดยใช้การประมาณค่าหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู และหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน โดยแบ่งพื้นที่ออกเป็น  $n$  ส่วนเท่า ๆ กัน เมื่อกำหนดให้  $n = 800$  และเปรียบเทียบค่าจริง  $\int_1^2 x^4 e^x dx = 8e^2 - 9e = 34.6479$

**วิธีทำ** จากหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูโดยใช้  $n = 800$  จะได้  $h = \frac{2-1}{800} = \frac{1}{800} = 0.00125$ ,

$x_i = 0.00125i$  สำหรับ  $i = 0, 1, \dots, n$  จะได้

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^4 e^x dx &\approx \frac{1}{1600} [f(1) + f(2) + 2[f(0.00125) + f(0.00250) + \dots + f(1.99875)]] \\ &\approx 34.647956747192737\end{aligned}$$

และมีค่าคลาดเคลื่อนอยู่ที่  $4.6747 \times 10^{-5}$

จากหลักเกณฑ์ของซิมป์สันโดยใช้  $n = 800$  จะได้  $h = 0.00125$  สำหรับ  $i = 0, 1, \dots, n$  จะได้

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^4 e^x dx &\approx \frac{1}{2400} [f(1) + 4f(1.00125) + 2f(1.00250) + \dots \\ &\quad + 2f(1.99750) + 4f(1.99875) + f(2)] \\ &\approx 34.647912335341587\end{aligned}$$

และมีค่าคลาดเคลื่อนอยู่ที่  $2.3353 \times 10^{-6}$

เมื่อนำสูตรการประมาณค่าทั้งสองรูปแบบมาเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนพบว่า สูตรการประมาณค่าของหลักเกณฑ์ของซิมป์สันมีค่าที่ใกล้เคียงหรือแม่นยำกว่าสูตรหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู

## Chapter 3

### ผลการศึกษา (Main results)

ในส่วนของผลการศึกษาเราจะทำการพิสูจน์สมการของทฤษฎีบทจากงานวิจัยของ N. Ujevic [5] และได้นำสมการนั้น ไปวิเคราะห์เพื่อหารูปแบบการวางนัยรูปแบบใหม่ที่ทำให้การประมาณค่าปริพันธ์ได้ค่าคลาดเคลื่อนที่แม่นยำมากขึ้น

**ทฤษฎีบท 3.1** ให้  $I \subset \mathbb{R}$  เป็นช่วงเปิด และ  $a, b \in I, a < b$  ถ้า  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ  $\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma, \forall t \in [a, b]$ , สำหรับค่าคงที่  $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ , แล้ว

$$\left| (b-a) \left[ \frac{\lambda}{2}(f(a) + f(b)) + (1-\lambda)f(x) - \frac{\Gamma+\gamma}{2}(1-\lambda) \left( x - \frac{a+b}{2} \right) \right] - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{\Gamma-\gamma}{2} \left[ \frac{(b-a)^2}{2}(\lambda^2 + (1-\lambda)^2) + \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

เมื่อ  $a + \lambda((b-a)/2) \leq x \leq b - \lambda((b-a)/2)$  และ  $\lambda \in [0, 1]$

พิสูจน์ นิยามการส่ง  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ดังนี้

$$K(x, t) = \begin{cases} t - (a + \lambda \frac{b-a}{2}), & t \in [a, x] \\ t - (b - \lambda \frac{b-a}{2}), & t \in (x, b] \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\int_a^b K(x, t) f'(t) dt = \int_a^x K(x, t) f'(t) dt + \int_x^b K(x, t) f'(t) dt \quad (3.3)$$

พิจารณาเทอมแรกทางด้านซ้ายมือของสมการ (3.3) โดยอินทิเกรตแบ่งส่วนได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^x K(x, t) f'(t) dt &= \int_a^x \left[ t - \left( a + \lambda \frac{b-a}{2} \right) \right] f'(t) dt \\ &= \left[ t - \left( a + \lambda \frac{b-a}{2} \right) \right] f(t) \Big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f(t) dt \\ &= \left[ x - \left( a + \lambda \frac{b-a}{2} \right) \right] f(x) - \left[ a - \left( a + \lambda \frac{b-a}{2} \right) \right] f(a) - \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\int_a^x K(x, t) f'(t) dt = x f(x) - \left( a + \lambda \frac{b-a}{2} \right) f(x) + \left( \lambda \frac{b-a}{2} \right) f(a) - \int_a^x f(t) dt \quad (3.4)$$

ในทำนองเดียวกันได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \int_x^b K(x, t) f'(t) dt &= \int_x^b \left[ t - \left( b - \lambda \frac{b-a}{2} \right) \right] f'(t) dt \\
 &= \left[ t - \left( b - \lambda \frac{b-a}{2} \right) \right] f(t) \Big|_{t=x}^{t=b} - \int_x^b f(t) dt \\
 &= \left[ b - \left( b - \lambda \frac{b-a}{2} \right) \right] f(b) - \left[ x - \left( b - \lambda \frac{b-a}{2} \right) \right] f(x) - \int_x^b f(t) dt \\
 \int_x^b K(x, t) f'(t) dt &= \left( \lambda \frac{b-a}{2} \right) f(b) - x f(x) + \left( b - \lambda \frac{b-a}{2} \right) f(x) - \int_x^b f(t) dt \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

จากสมการ (3.4) และ (3.5) ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \int_a^x K(x, t) f'(t) dt + \int_x^b K(x, t) f'(t) dt &= \left( -a - \lambda \frac{b-a}{2} \right) f(x) + \left( b - \lambda \frac{b-a}{2} \right) f(x) \\
 &\quad + \left( \lambda \frac{b-a}{2} \right) (f(a) + f(b)) - \int_a^b f(t) dt \\
 &= (b-a) f(x) - \lambda (b-a) f(x) \\
 &\quad + (b-a) \left( \frac{\lambda}{2} \right) (f(a) + f(b)) - \int_a^b f(t) dt \\
 &= (b-a) \left[ f(x) - \lambda f(x) + \frac{\lambda}{2} (f(a) + f(b)) \right] - \int_a^b f(t) dt
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_a^b K(x, t) f'(t) dt = (b-a) \left[ \frac{\lambda}{2} (f(a) + f(b)) + (1-\lambda) f(x) \right] - \int_a^b f(t) dt \quad (3.6)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
\int_a^b K(x, t) dt &= \int_a^x K(x, t) dt + \int_x^b K(x, t) dt \\
&= \int_a^x t - \left(a + \lambda \frac{b-a}{2}\right) dt + \int_x^b t - \left(b - \lambda \frac{b-a}{2}\right) dt \\
&= \frac{t^2}{2} - \left(a + \lambda \frac{b-a}{2}\right) t \Big|_{t=a}^{t=x} + \frac{t^2}{2} - \left(b - \lambda \frac{b-a}{2}\right) t \Big|_{t=x}^{t=b} \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - \left(a + \lambda \frac{b-a}{2}\right) x\right] - \left[\frac{a^2}{2} - \left(a + \lambda \frac{b-a}{2}\right) a\right] + \left[\frac{b^2}{2} - \left(b - \lambda \frac{b-a}{2}\right) b\right] \\
&\quad - \left[\frac{x^2}{2} - \left(b - \lambda \frac{b-a}{2}\right) x\right] \\
&= -ax + bx - \lambda(b-a)x - \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + a^2 + \left(\lambda \frac{b-a}{2}\right) a - b^2 + \left(\lambda \frac{b-a}{2}\right) b \\
&= (b-a)x - \lambda x(b-a) + \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{\lambda ab - \lambda a^2}{2} + \frac{\lambda b^2 - \lambda ab}{2} \\
&= (b-a)(1-\lambda)x + \frac{a^2 - b^2}{2} - \lambda \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right) \\
&= (b-a)(1-\lambda)x + (1-\lambda) \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right) \\
&= (b-a)(1-\lambda)x + (1-\lambda) \left(\frac{(a+b)(a-b)}{2}\right) \\
&= (b-a)(1-\lambda)x + (1-\lambda) \left(\frac{(a+b)(-(b-a))}{2}\right) \\
&= (b-a)(1-\lambda)x + (b-a)(1-\lambda) \left(\frac{-(a+b)}{2}\right)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_a^b K(x, t) dt = (1-\lambda)(b-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \quad (3.7)$$

ให้  $C = (\Gamma + \gamma)/2$  จาก (3.6) และ (3.7) ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_a^b K(x, t) [f'(t) - C] dt &= \int_a^b K(x, t) f'(t) dt - C \int_a^b K(x, t) dt \\
&= \int_a^b K(x, t) f'(t) dt - \int_a^b C K(x, t) dt \\
&= (b-a) \left[ \frac{\lambda}{2} (f(a) + f(b)) + (1-\lambda) f(x) \right] - \int_a^b f(t) dt \\
&\quad - \left[ (1-\lambda)(b-a) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) C \right]
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} & \int_a^b K(x, t)[f'(t) - C]dt \\ &= (b-a) \left[ \frac{\lambda}{2}(f(a) + f(b)) + (1-\lambda)f(x) - C(1-\lambda) \left( x - \frac{a+b}{2} \right) \right] - \int_a^b f(t)dt \quad (3.8) \end{aligned}$$

ในทางกลับกัน จะได้ว่า

$$\left| \int_a^b K(x, t)[f'(t) - C]dt \right| \leq \max_{t \in [a, b]} |f'(t) - C| \int_a^b |K(x, t)|dt \quad (3.9)$$

กำหนดให้  $\sigma = \lambda \frac{(b-a)}{2}$

$$\begin{aligned} \int_a^b |K(x, t)|dt &= \int_a^x |t - (a + \sigma)|dt + \int_x^b |t - (b - \sigma)|dt \\ &= \int_a^{a+\sigma} [(a + \sigma) - t]dt + \int_{a+\sigma}^x [t - (a + \sigma)] \\ &\quad + \int_x^{b-\sigma} [(b - \sigma) - t]dt + \int_{b-\sigma}^b [t - (b - \sigma)] \\ &= \left[ (a + \sigma)t - \frac{t^2}{2} \right]_a^{a+\sigma} + \left[ \frac{t^2}{2} - (a + \sigma)t \right]_{a+\sigma}^x \\ &\quad + \left[ (b - \sigma)t - \frac{t^2}{2} \right]_x^{b-\sigma} + \left[ \frac{t^2}{2} - (b - \sigma)t \right]_{b-\sigma}^b \\ &= \left[ (a + \sigma)(a + \sigma) - \frac{(a + \sigma)^2}{2} \right] - \left[ (a + \sigma)a - \frac{a^2}{2} \right] + \left[ \frac{x^2}{2} - (a + \sigma)x \right] \\ &\quad - \left[ \frac{(a + \sigma)^2}{2} - (a + \sigma)(a + \sigma) \right] + \left[ (b - \sigma)(b - \sigma) - \frac{(b - \sigma)^2}{2} \right] \\ &\quad - \left[ (b - \sigma)x - \frac{x^2}{2} \right] + \left[ \frac{b^2}{2} - (b - \sigma)b \right] - \left[ \frac{(b - \sigma)^2}{2} - (b - \sigma)(b - \sigma) \right] \\ &= \frac{(a + \sigma)^2}{2} - x(a + \sigma) + \frac{x^2}{2} - a^2 - a\sigma + \frac{a^2}{2} + \frac{(a + \sigma)^2}{2} \\ &\quad + \frac{(b - \sigma)^2}{2} - (b - \sigma)x + \frac{x^2}{2} + \frac{b^2}{2} - b^2 + b\sigma + \frac{(b - \sigma)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} [x - (a + \sigma)]^2 + \frac{1}{2} [(b - \sigma) - x]^2 - \frac{a^2}{2} - a\sigma - \frac{b^2}{2} + b\sigma \\ &\quad + \frac{a^2 + 2a\sigma + \sigma^2}{2} + \frac{b^2 + 2b\sigma + \sigma^2}{2} \\ &= \sigma^2 + \frac{1}{2} [(b - \sigma) - x]^2 + \frac{1}{2} [x - (a + \sigma)]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^2}{4}(b-a)^2 + \frac{1}{2} [x^2 - 2(b-\sigma)x + (b-\sigma)^2] + \frac{1}{2} [x^2 - 2(a+\sigma)x + (a+\sigma)^2] \\
&= \frac{\lambda^2}{4}(b-a)^2 + x^2 - (a+b)x + \frac{1}{2} [(b-\sigma)^2 + (a+\sigma)^2] \\
&= \frac{\lambda^2}{4}(b-a)^2 + x^2 - (a+b)x + \frac{1}{2} [b^2 - 2b\sigma + \sigma^2 + a^2 + 2a\sigma + \sigma^2] \\
&= \frac{\lambda^2}{4}(b-a)^2 + x^2 - (a+b)x + \sigma^2 + \frac{b^2 + a^2}{2} \\
&= \frac{\lambda^2}{2}(b-a)^2 + \frac{\lambda}{2}(b-a)^2 + x^2 - (a+b)x + \frac{b^2 + a^2}{2} \\
&= \frac{(b-a)^2}{4}(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{4} - \frac{(a+b)^2}{4}
\end{aligned}$$

จึงได้

$$\int_a^b |K(x, t)| dt = \frac{(b-a)^2}{4} [\lambda^2 + (1-\lambda)^2] + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (3.10)$$

ต่อไปจะแสดงว่า  $\max_{t \in [a, b]} |f'(t) - C| \leq \frac{\Gamma - \gamma}{2}$  เนื่องจาก  $\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$  และ  $C = (\Gamma + \gamma)/2$  จะได้ว่า

กรณีที่ 1:  $\gamma \leq f'(t) \leq C$

$$\begin{aligned}
|f'(t) - C| &= C - f'(t) \\
&\leq C - \gamma \\
&= \frac{\Gamma + \gamma}{2} - \gamma \\
&= \frac{\Gamma - \gamma}{2}
\end{aligned}$$

กรณีที่ 2:  $C \leq f'(t) \leq \Gamma$

$$\begin{aligned}
|f'(t) - C| &= f'(t) - C \\
&\leq \Gamma - C \\
&= \Gamma - \frac{\Gamma + \gamma}{2} \\
&= \frac{\Gamma - \gamma}{2}
\end{aligned}$$

ทำให้

$$|f'(t) - C| \leq \frac{\Gamma - \gamma}{2} \quad \text{สำหรับทุก } t \in [a, b]$$

จึงได้

$$\max_{t \in [a, b]} |f'(t) - C| \leq \frac{\Gamma - \gamma}{2} \quad (3.11)$$

จาก (3.9) - (3.11) จะได้ว่า

$$\left| \int_a^b K(x, t) \left[ f'(t) - \frac{\Gamma + \gamma}{2} \right] dt \right| \leq \frac{\Gamma - \gamma}{2} \left[ \frac{(b-a)^2}{4} (\lambda^2 + (1-\lambda)^2) + \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right] \quad (3.12)$$

จาก (3.8) และ (3.12) เราจะได้ (3.1) ตามต้องการ

■

ข้อสังเกต: เมื่อนำสมการที่ (3.1) มาวิเคราะห์ในกรณีต่าง ๆ เขียนเป็นบทแทรกได้ ดังนี้

- กำหนด  $\lambda = 1$  และ  $x = \frac{a+b}{2}$  จะได้

**บทแทรก 3.2 :** ภายใต้เงื่อนไข ทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$\left| \frac{(b-a)}{2} [(f(a) + f(b))] - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\Gamma - \gamma}{2} \left[ \frac{(b-a)^2}{4} \right] \quad (3.13)$$

- กำหนด  $\lambda = \frac{1}{3}$  และ  $x = \frac{a+b}{2}$  จะได้

**บทแทรก 3.3 :** ภายใต้เงื่อนไข ทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$\left| \frac{(b-a)}{6} \left[ (f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)) \right] - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\Gamma - \gamma}{2} \left[ \frac{(b-a)^2}{4} \left( \frac{5}{9} \right) \right] \quad (3.14)$$

- กำหนด  $\lambda = 0$  และ  $x = \frac{a+b}{2}$  จะได้

**บทแทรก 3.4 :** ภายใต้เงื่อนไข ทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) (b-a) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\Gamma - \gamma}{8} (b-a)^2 \quad (3.15)$$

- กำหนด  $\lambda = \frac{1}{2}$  และ  $x = \frac{a+b}{2}$  จะได้

**บทแทรก 3.5 :** ภายใต้เงื่อนไข ทฤษฎีบท 3.1 จะได้

$$\left| \frac{b-a}{4} \left[ f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\Gamma - \gamma}{16} (b-a)^2 \quad (3.16)$$

เมื่อกำหนดค่าตามที่กำหนดในบทแทรก 3.2 จะได้สูตรการประมาณค่าปริพันธ์ที่อยู่ในรูปของหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู และเมื่อกำหนดค่าตามที่กำหนดในบทแทรก 3.3 จะได้สูตรการประมาณค่าปริพันธ์ที่อยู่ในรูปของหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน

พิจารณาสมการ (3.1) ให้  $a = x_0, b = x_2$  และ  $h = (b-a)/2$  จะได้  $x = x_1^* = x_1 + \varepsilon$  เมื่อ  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  และ  $0 \leq \varepsilon \ll \frac{h}{2}$  ดังนั้น เราจะได้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการประมาณค่าปริพันธ์แบบใหม่ ดังนี้

$$\int_{x_0}^{x_2} f(t) dt = 2h \left[ \frac{\lambda}{2} (f(x_2) + f(x_0)) + (1-\lambda)f(x_1^*) - \frac{\Gamma + \gamma}{2} (1-\lambda)\varepsilon \right] \quad (3.17)$$

**ทฤษฎีบท 3.6** ให้  $I \subset \mathbb{R}$  เป็นช่วงเปิด และ  $a, b \in I, a < b$  ถ้า  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น  $\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma, \forall t \in [a, b]$ , สำหรับค่าคงที่  $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ , แล้วจะได้การประมาณค่าคลาดเคลื่อน ดังนี้

$$\left| (b-a) \left[ \frac{\lambda}{2}(f(a) + f(b)) + (1-\lambda)f(x_1^*) - \frac{\Gamma+\gamma}{2}(1-\lambda)\varepsilon \right] - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{\Gamma-\gamma}{2} \left[ \frac{(b-a)^2}{2}(\lambda^2 + (1-\lambda)^2) + \varepsilon^2 \right] \quad (3.18)$$

เมื่อ  $x_1^* = x_1 + \varepsilon, x_1 = \frac{a+b}{2}$  และ  $0 \leq \varepsilon \ll \frac{h}{2}$

**ตัวอย่าง 3.7 จงประมาณ  $\int_1^2 x^4 dx$**

เราจะแสดงค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้สูตรหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูและหลักเกณฑ์ของซิมป์สันตามลำดับ ดังตาราง 3.1 จะเห็นได้ว่าค่าคลาดเคลื่อนตามวิธีหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน ให้ค่าแม่นยำกว่าหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู

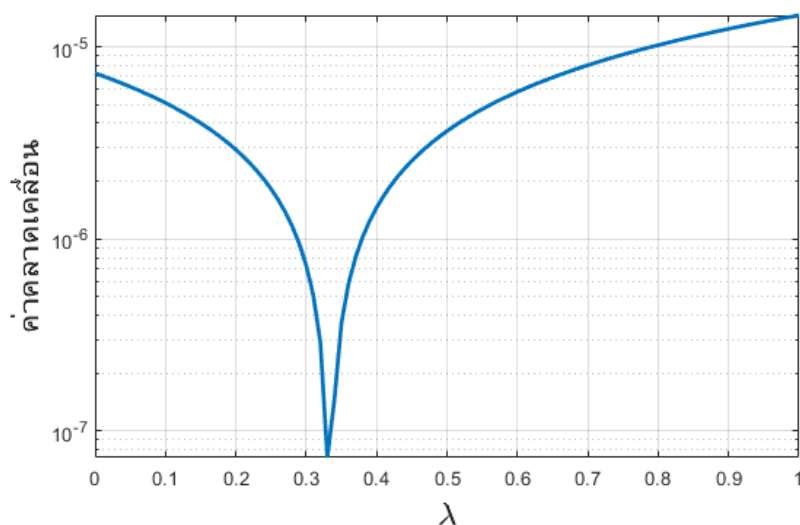
| $n$ | ค่าคลาดเคลื่อนจาก<br>หลักเกณฑ์สี่เหลี่ยม<br>คางหมู | ค่าคลาดเคลื่อนจาก<br>หลักเกณฑ์ของซิมป์สัน |
|-----|----------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 10  | $2.3330 \times 10^{-2}$                            | $1.3333 \times 10^{-5}$                   |
| 50  | $9.3332 \times 10^{-4}$                            | $2.1333 \times 10^{-8}$                   |
| 100 | $2.3333 \times 10^{-4}$                            | $1.3333 \times 10^{-9}$                   |
| 200 | $5.8333 \times 10^{-5}$                            | $8.3329 \times 10^{-11}$                  |
| 400 | $1.4583 \times 10^{-5}$                            | $3.2773 \times 10^{-13}$                  |
| 800 | $3.6458 \times 10^{-6}$                            | $2.6645 \times 10^{-14}$                  |

ตาราง 3.1: ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้สูตรหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูและหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน

จาก  $f(x) = x^4$  จะได้  $f'(x) = 4x^3$  ดังนั้น  $\gamma = 4$  และ  $\Gamma = 32$  สำหรับ  $x \in [1, 2]$

ต่อไป เราจะเปรียบเทียบความแม่นยำระหว่างวิธีใหม่กับหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู และหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน โดยก่อนอื่นเราจะแสดงประสิทธิภาพของวิธีเชิงตัวเลขแบบใหม่ เมื่อกำหนด  $\varepsilon = 0, n = 400$  และ  $0 \leq \lambda \leq 1$  ดังรูป 3.1

สามารถนำเขียนเป็นกราฟได้ ดังนี้



รูปภาพ 3.1: กราฟค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17)

จากรูปภาพที่ 3.1 จะเห็นได้ว่า ค่าคลาดเคลื่อนที่ดีที่สุดอยู่ในช่วง  $\lambda$  เข้าใกล้ 0.33 สังเกตว่า เมื่อ  $\lambda$  เข้าใกล้ 0.33 ระเบียบวิธี (3.17) คือประมาณรูปแบบหลักเกณฑ์ของซิมป์สันตามบทแทรก 3.3

ต่อไป เราจะตรวจสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธี (3.17) โดยกำหนดค่า  $\varepsilon$  เป็นค่าต่าง ๆ เมื่อ  $n = 400$  สำหรับ  $0 \leq \lambda \leq 1$  ดังตาราง 3.2 - 3.5 จะเห็นว่า ค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงเมื่อ  $\varepsilon$  มีค่าลดลง นอกจากนี้เราพบว่า เมื่อ  $\varepsilon = 10^{-7}$  และ  $\lambda = 0.3$  ให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ดีที่สุด

| $\varepsilon$ | $\lambda$ | ค่าคลาดเคลื่อน          |
|---------------|-----------|-------------------------|
| $10^{-4}$     | 0         | $3.0715 \times 10^{-4}$ |
|               | 0.1       | $2.7948 \times 10^{-4}$ |
|               | 0.2       | $2.4281 \times 10^{-4}$ |
|               | 0.3       | $2.1063 \times 10^{-4}$ |
|               | 0.4       | $1.7846 \times 10^{-4}$ |
|               | 0.5       | $1.4628 \times 10^{-4}$ |
|               | 0.6       | $1.1411 \times 10^{-4}$ |
|               | 0.7       | $8.1937 \times 10^{-5}$ |
|               | 0.8       | $4.9764 \times 10^{-5}$ |
|               | 0.9       | $1.7590 \times 10^{-5}$ |
|               | 1.0       | $1.4583 \times 10^{-5}$ |

ตาราง 3.2: ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17) เมื่อ  $\varepsilon = 10^{-4}$

| $\varepsilon$ | $\lambda$ | ค่าคลาดเคลื่อน          |
|---------------|-----------|-------------------------|
| $10^{-5}$     | 0         | $3.7290 \times 10^{-5}$ |
|               | 0.1       | $3.2103 \times 10^{-5}$ |
|               | 0.2       | $2.6916 \times 10^{-5}$ |
|               | 0.3       | $2.1728 \times 10^{-5}$ |
|               | 0.4       | $1.6541 \times 10^{-5}$ |
|               | 0.5       | $1.1354 \times 10^{-5}$ |
|               | 0.6       | $6.1661 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.7       | $9.7878 \times 10^{-7}$ |
|               | 0.8       | $4.2086 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.9       | $9.3960 \times 10^{-6}$ |
|               | 1.0       | $1.4583 \times 10^{-5}$ |

ตาราง 3.3: ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17) เมื่อ  $\varepsilon = 10^{-5}$

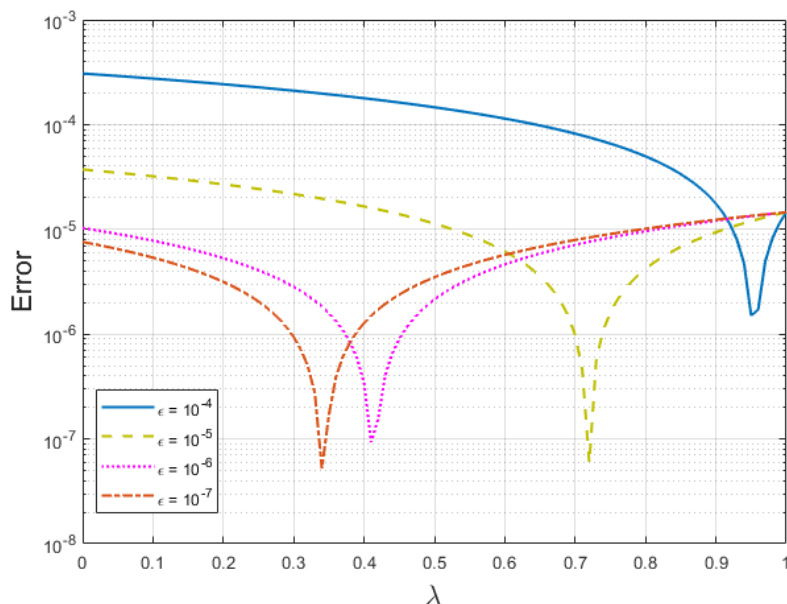
| $\varepsilon$ | $\lambda$ | ค่าคลาดเคลื่อน          |
|---------------|-----------|-------------------------|
| $10^{-6}$     | 0         | $1.0292 \times 10^{-5}$ |
|               | 0.1       | $7.8042 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.2       | $5.3167 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.3       | $2.8292 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.4       | $3.4166 \times 10^{-7}$ |
|               | 0.5       | $2.1458 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.6       | $4.6333 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.7       | $7.1208 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.8       | $9.6083 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.9       | $1.2096 \times 10^{-5}$ |
|               | 1.0       | $1.4583 \times 10^{-5}$ |

ตาราง 3.4: ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17) เมื่อ  $\varepsilon = 10^{-6}$

| $\varepsilon$ | $\lambda$ | ค่าคลาดเคลื่อน          |
|---------------|-----------|-------------------------|
| $10^{-7}$     | 0         | $7.5917 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.1       | $5.3742 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.2       | $3.1567 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.3       | $9.3917 \times 10^{-7}$ |
|               | 0.4       | $1.2783 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.5       | $3.4958 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.6       | $5.7133 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.7       | $7.9308 \times 10^{-6}$ |
|               | 0.8       | $1.0148 \times 10^{-5}$ |
|               | 0.9       | $1.2366 \times 10^{-5}$ |
|               | 1.0       | $1.4583 \times 10^{-5}$ |

ตาราง 3.5: ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17) เมื่อ  $\varepsilon = 10^{-7}$

จากตาราง 3.2 - 3.5 นำมาเขียนเป็นกราฟได้ ดังรูปภาพที่ 3.2 และจะเห็นว่า เมื่อกำหนดให้ค่า  $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$  และ  $10^{-7}$  ตามเงื่อนไขที่กำหนด ยังไม่สามารถบอกได้ว่าให้ค่าคลาดเคลื่อนที่แม่นยำมากกว่าหลักเกณฑ์ของซิมป์สันและหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู (ตาราง 3.1)



รูปภาพ 3.2: กราฟค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17)

อย่างไรก็ตาม เราพบว่า ค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จากระเบียบวิธี (3.17) มีค่าลดลงเมื่อ  $\varepsilon$  มีค่าลดลง และเมื่อ  $\varepsilon = 10^{-7}$  ค่าคลาดเคลื่อนที่ดีที่สุดเกิดขึ้นเมื่อ  $\lambda$  เข้าใกล้  $\frac{1}{3}$  เพื่อตรวจสอบสมมติฐานนี้ เรากำหนดให้  $n = 400$ ,  $\lambda = 1/3$  และกำหนด  $\varepsilon = 10^{-k}$ ,  $k = 4, 5, 6, \dots, 15$  ผลลัพธ์เชิงตัวเลขแสดงไว้ในตาราง 3.6 ดังนี้

|                         | ค่าคลาดเคลื่อน           |                          | ค่าคลาดเคลื่อน           |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Trapezoidal rule        | $1.4583 \times 10^{-5}$  | $\varepsilon = 10^{-9}$  | $1.9996 \times 10^{-9}$  |
| Simpson's rule          | $3.2773 \times 10^{-13}$ | $\varepsilon = 10^{-10}$ | $1.9967 \times 10^{-10}$ |
| $\varepsilon = 10^{-4}$ | $1.9990 \times 10^{-4}$  | $\varepsilon = 10^{-11}$ | $1.9676 \times 10^{-11}$ |
| $\varepsilon = 10^{-5}$ | $1.9999 \times 10^{-5}$  | $\varepsilon = 10^{-12}$ | $1.6759 \times 10^{-12}$ |
| $\varepsilon = 10^{-6}$ | $1.9999 \times 10^{-6}$  | $\varepsilon = 10^{-13}$ | $1.2168 \times 10^{-13}$ |
| $\varepsilon = 10^{-7}$ | $2.0000 \times 10^{-7}$  | $\varepsilon = 10^{-14}$ | $3.0286 \times 10^{-13}$ |
| $\varepsilon = 10^{-8}$ | $1.9999 \times 10^{-8}$  | $\varepsilon = 10^{-15}$ | $3.2240 \times 10^{-13}$ |

ตาราง 3.6: ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17) และ กำหนด  $\varepsilon$  เป็นค่าต่าง ๆ

ข้อสังเกต:

- กรณี  $\varepsilon = 10^{-13}$  ให้ค่าแม่นยำมากกว่า
  - ระเบียบวิธี Simpson's rule =  $\frac{|(1.2168 \times 10^{-13} - 3.2773 \times 10^{-13})| \times 100}{3.2773 \times 10^{-13}} = 62.8719\%$
- กรณี  $\varepsilon = 10^{-14}$  ให้ค่าแม่นยำมากกว่า
  - ระเบียบวิธี Simpson's rule =  $\frac{|(3.0286 \times 10^{-13} - 3.2773 \times 10^{-13})| \times 100}{3.2773 \times 10^{-13}} = 7.5886\%$
- กรณี  $\varepsilon = 10^{-15}$  ให้ค่าแม่นยำมากกว่า
  - ระเบียบวิธี Simpson's rule =  $\frac{|(3.2240 \times 10^{-13} - 3.2773 \times 10^{-13})| \times 100}{3.2773 \times 10^{-13}} = 1.6263\%$

จากข้อสังเกตนี้จะเห็นว่า ระเบียบวิธีรูปแบบใหม่มีค่าแม่นยำกว่าหลักเกณฑ์ของซิมป์สันถึง 62.8719%

ตัวอย่าง 3.8 จงประมาณ  $\int_0^2 2e^{2x} dx$

เราจะแสดงค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้สูตรหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู และหลักเกณฑ์ของซิมป์สันตามลำดับ

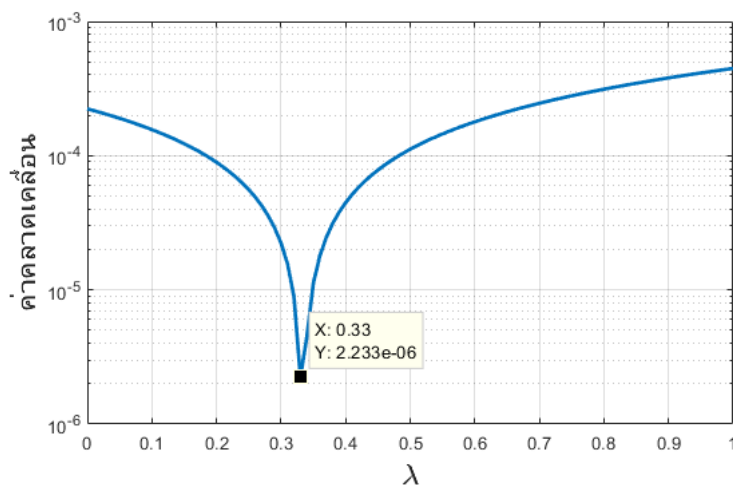
| $n$ | ค่าคลาดเคลื่อนจาก<br>หลักเกณฑ์สี่เหลี่ยม<br>คางหมู | ค่าคลาดเคลื่อนจาก<br>หลักเกณฑ์ของซิมป์สัน |
|-----|----------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 10  | $7.1274 \times 10^{-1}$                            | $4.7416 \times 10^{-4}$                   |
| 50  | $2.8582 \times 10^{-2}$                            | $7.6213 \times 10^{-7}$                   |
| 100 | $7.1462 \times 10^{-3}$                            | $4.7640 \times 10^{-8}$                   |
| 200 | $1.7865 \times 10^{-3}$                            | $2.9776 \times 10^{-9}$                   |
| 400 | $4.4665 \times 10^{-4}$                            | $1.8613 \times 10^{-10}$                  |
| 800 | $1.1166 \times 10^{-4}$                            | $1.1617 \times 10^{-11}$                  |

ตาราง 3.7: ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้สูตรหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู และหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน

จาก  $f(x) = 2e^{2x}$  จะได้  $f'(x) = 4e^{2x}$  ดังนั้น  $\gamma = 4$  และ  $\Gamma \approx 218.3926001325769$  สำหรับ  $x \in [0, 2]$

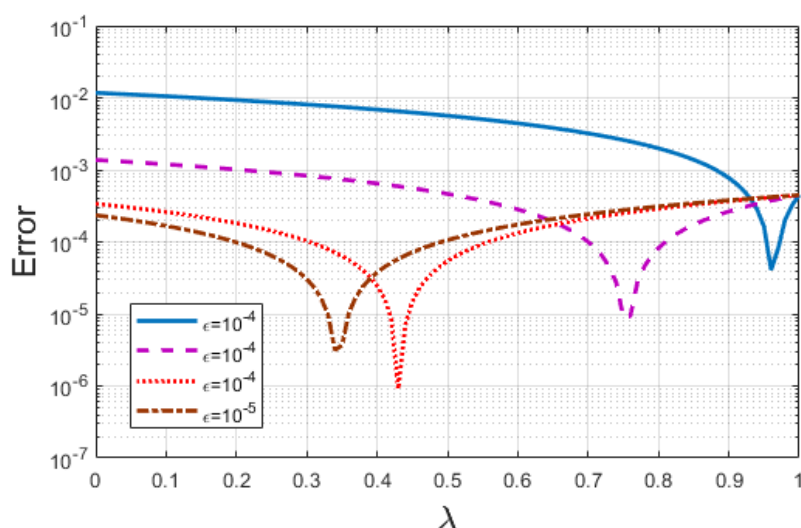
ต่อไป เราจะแสดงค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17) โดยพิจารณาที่  $n = 400$  และกำหนดให้  $\varepsilon = 0$

สามารถนำเขียนเป็นกราฟได้ ดังนี้



รูปภาพ 3.3: กราฟค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17)

ต่อไป เราจะตรวจสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธี (3.17) โดยกำหนดค่า  $\varepsilon$  เป็นค่าต่าง ๆ เมื่อ  $n = 400$  สำหรับ  $0 \leq \lambda \leq 1$  ดังรูปภาพที่ 3.4 จะเห็นได้ว่า เมื่อกำหนดให้ค่า  $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$  และ  $10^{-7}$  ตามเงื่อนไขที่กำหนด ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่าง 3.7 เรายังไม่สามารถสรุปได้ว่าให้ค่าคลาดเคลื่อนที่แม่นยำมากกว่าหลักเกณฑ์ของซิมป์สันและหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู แต่เราทราบว่า  $\varepsilon$  มีผลต่อการประมาณค่าคลาดเคลื่อนของอินทิกรัลนั้น ๆ



รูปภาพ 3.4: กราฟค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17) เมื่อ  $\varepsilon = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}$

ดังตัวอย่าง 3.7 เราให้  $\lambda = 1/3$  และกำหนด  $\varepsilon = 10^{-k}$ ,  $k = 4, 5, 6, \dots, 15$  ผลลัพธ์เชิงตัวเลขแสดงไว้ในตาราง 3.8 ดังนี้

|                         | ค่าคลาดเคลื่อน           |                          | ค่าคลาดเคลื่อน           |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| Trapezoidal rule        | $4.4665 \times 10^{-4}$  | $\varepsilon = 10^{-9}$  | $7.6611 \times 10^{-8}$  |
| Simpson's rule          | $1.8613 \times 10^{-10}$ | $\varepsilon = 10^{-10}$ | $7.4936 \times 10^{-9}$  |
| $\varepsilon = 10^{-4}$ | $7.6790 \times 10^{-3}$  | $\varepsilon = 10^{-11}$ | $5.8185 \times 10^{-10}$ |
| $\varepsilon = 10^{-5}$ | $7.6797 \times 10^{-4}$  | $\varepsilon = 10^{-12}$ | $1.0928 \times 10^{-10}$ |
| $\varepsilon = 10^{-6}$ | $7.6797 \times 10^{-5}$  | $\varepsilon = 10^{-13}$ | $1.7843 \times 10^{-10}$ |
| $\varepsilon = 10^{-7}$ | $7.6795 \times 10^{-6}$  | $\varepsilon = 10^{-14}$ | $1.8535 \times 10^{-10}$ |
| $\varepsilon = 10^{-8}$ | $7.6779 \times 10^{-7}$  | $\varepsilon = 10^{-15}$ | $1.8601 \times 10^{-10}$ |

ตาราง 3.8: ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าปริพันธ์โดยใช้ระเบียบวิธี (3.17) และ กำหนด  $\varepsilon$  เป็นค่าต่าง ๆ

จากตาราง 3.8 จะเห็นได้ว่าที่  $\varepsilon = 10^{-12}$ ,  $10^{-13}$ ,  $10^{-14}$  และ  $10^{-15}$  ให้ค่าคลาดเคลื่อนที่แม่นยำมากกว่าหลักเกณฑ์ที่หยาบคายและหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน

ข้อสังเกต:

- กรณี  $\varepsilon = 10^{-12}$  ให้ค่าแม่นยำมากกว่า
  - ระเบียบวิธี Simpson's rule =  $\frac{|(1.0928 \times 10^{-10} - 1.8613 \times 10^{-10})| \times 100}{(1.8613 \times 10^{-10})} = 41.2883\%$
- กรณี  $\varepsilon = 10^{-13}$  ให้ค่าแม่นยำมากกว่า
  - ระเบียบวิธี Simpson's rule =  $\frac{|(1.7843 \times 10^{-10} - 1.8613 \times 10^{-10})| \times 100}{(1.8613 \times 10^{-10})} = 4.1368\%$
- กรณี  $\varepsilon = 10^{-14}$  ให้ค่าแม่นยำมากกว่า
  - ระเบียบวิธี Simpson's rule =  $\frac{|(1.8535 \times 10^{-10} - 1.8613 \times 10^{-10})| \times 100}{(1.8613 \times 10^{-10})} = 0.4190\%$
- กรณี  $\varepsilon = 10^{-15}$  ให้ค่าแม่นยำมากกว่า
  - ระเบียบวิธี Simpson's rule =  $\frac{|(1.8601 \times 10^{-10} - 1.8613 \times 10^{-10})| \times 100}{(1.8613 \times 10^{-10})} = 0.0644\%$

จากข้อสังเกตนี้จะเห็นว่า ระเบียบวิธีรูปแบบใหม่มีค่าแม่นยำกว่าหลักเกณฑ์ของซิมป์สันถึง 41.2883%

## Chapter 4

### สรุปผลการศึกษา (Conclusion)

ในการศึกษานี้ เราได้พิสูจน์การวางนัยทั่วไปของอสมการโอสโทรสกี เพื่อใช้ในการสร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการประมาณค่าอินทิกรัล เราจึงสรุปได้ว่าวิธีเชิงตัวเลขรูปแบบใหม่ มีค่าแม่นยำกว่าหลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมูและหลักเกณฑ์ของซิมป์สัน แต่มีข้อจำกัดคือ ฟังก์ชันที่นำมาหาค่าประมาณต้องหาอนุพันธ์ได้ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบข้อดีและข้อเสียกับวิธีหลักเกณฑ์ของซิมป์สันแล้ว เห็นได้ชัดว่า ข้อดีของรูปแบบใหม่คือ ให้ความแม่นยำมากกว่าหลักเกณฑ์ของซิมป์สันแน่นอนเมื่อเลือกค่า  $\varepsilon$  ที่เหมาะสม โดยการเลือก  $\varepsilon$  ที่เหมาะสม ควรเลือกค่าน้อยมาก ๆ พอกับค่าคลาดเคลื่อนหลักเกณฑ์ของซิมป์สันที่ได้ และข้อเสียของรูปแบบใหม่คือ ความยากในการนำไปใช้ เนื่องจากต้องมีการกำหนดค่า  $\Gamma$  และ  $\gamma$  ซึ่งขึ้นอยู่กับขอบเขตบนและขอบเขตล่างของอนุพันธ์แต่ละฟังก์ชัน หากมีการปรับเปลี่ยนฟังก์ชันหรือค่าขอบเขตของปริพันธ์ จะต้องกำหนดค่า  $\Gamma$  และ  $\gamma$  ที่ใช้ในการคำนวณใหม่อีกครั้ง และแน่นอนว่าฟังก์ชันนั้นต้องหาอนุพันธ์ได้

อย่างไรก็ตาม ในการศึกษานี้ เราได้สร้างรูปแบบใหม่เพียงหนึ่งรูปแบบจากการวางนัยทั่วไปของอสมการโอสโทรสกีที่มีค่าความแม่นยำมากขึ้น ซึ่งอาจจะมีรูปแบบการวางนัยทั่วไปของอสมการโอสโทรสกีรูปแบบอื่นที่ให้ค่าความแม่นยำที่ดีกว่า สามารถนำไปศึกษาเพิ่มเติมได้ในอนาคต

## บรรณานุกรม

- [1] [https://eledu.ssru.ac.th/thanatyod\\_ja/pluginfile.php/1761/block\\_html/content/2565เอกสารประกอบการสอนวิชาแคลคูลัส1\\_ธนัชยศ.pdf](https://eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja/pluginfile.php/1761/block_html/content/2565เอกสารประกอบการสอนวิชาแคลคูลัส1_ธนัชยศ.pdf)
- [2] รองศาสตราจารย์ ดร. บัญชา ปัญญานาค, สมบัติของปริพันธ์แบบรีมันน์, การวิเคราะห์เชิงจริง 1, page 173-180.
- [3] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มรกต เกื้อเจริญ, การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข, วิธีเชิงตัวเลข, 2562, page 216-230.
- [4] <https://pythonnumericalmethods.berkeley.edu/notebooks/chapter21.04-Simpsons-Rule.html>
- [5] N. Ujevic, A Generalization of Ostrowski's Inequality and Applications in Numerical Integration, Appl. Math. Lett 17, 133-137, (2004).

## ภาคผนวก

- โปรแกรม matlab หลักเกณฑ์สี่เหลี่ยมคางหมู

```
1      %Trapezoidal Rule
2 -    clear
3 -    a=input('Input a');% Input number
4 -    b=input('Input b');% Input number
5 -    n=input('Input number of interval');% Input number of interval
6 -    h=(b-a)/n;
7 -    xx=linspace(a,b,n+1);
8
9 -    format long
10
11     %Function value
12 -    for i=1:n+1
13 -        f(i)=input('Input function');%Input function
14 -    end
15 -    sum=f(1)+f(n+1);
16
17 -    for j=2:n
18 -        sum=sum+2*f(j);
19 -    end
20
21 -    App=(h/2)*sum;
22 -    Exact='Exact solution';%Exact solution of integral
23
24 -    Error=abs(App-Exact)
```

- โปรแกรม matlab หลักเกณฑ์ของซิมป์สัน

```
1      %Simpson's Rule
2 -    clear
3 -    a=input('Input a');% Input number
4 -    b=input('Input b');% Input number
5 -    format long
6 -    n=input('Input number of interval');% Input number of interval
7 -    h=(b-a)/n;
8 -    f=@(x) 'Input function';%Input function
9 -    sum=0;
10     %Function value
11 -    for i=1:n/2-1
12 -        sum=sum+4*f(a+h*(2*i-1))+2*f(a+(2*i)*h);
13 -    end
14 -    sum=sum+f(a)+f(b)+4*f(a+(n-1)*h);
15 -    App=(h/3)*(sum);
16
17 -    Exact='Exact solution';%Exact solution of integral
18 -    Error=abs(App-Exact)
```

- โปรแกรม matlab รูปแบบใหม่ ที่  $\lambda = 1/3$  และ  $\varepsilon = 10^{-k}$  เมื่อ  $k = 4, 5, 6, \dots, 15$

```

1 - clear all
2 - a='Input a';
3 - b='Input b';
4 - n='Input number of interval'; % Number of interval
5 - h=(b-a)/n;
6 - xx=linspace(a,b,n+1);
7 - tt=linspace(0,1,101);
8 - epi='Input epsilon';
9
10 - format long
11 - gam='Input gam';
12 - Gam='Input Gam';
13
14 - lamda=1/3;
15
16 - %Function value
17 - for i=1:n+1
18 -     f(i)='Input function';%Ex. xx(i)^4|
19 - end
20 - sum=0;
21 - for j=1:n
22 -     x0=(xx(j+1)+xx(j))/2+epi;
23 -     sum=sum+ (xx(j+1)-xx(j))* ( (lamda/2)*(f(j)+f(j+1))...
24 -         +(1-lamda)* (f(x0)) - (gam+Gam)/2*(1-lamda)*(x0-(xx(j+1)+xx(j))/2) );
25 - App=sum;
26 - end
27 - Exact='Exact solution';%Exact solution of integral
28 - Error(k)=abs(App-Exact);

```

- โปรแกรม matlab รูปแบบใหม่ ที่  $\lambda = 0, 0.01, 0.02, \dots, 1.00$  และ  $\varepsilon = 10^{-k}$  เมื่อ  $k = 4, 5, 6, \dots, 15$

```

1 - clear all
2 - a='Input a';
3 - b='Input b';
4 - n='Input number of interval'; % Number of interval
5 - h=(b-a)/n;
6 - xx=linspace(a,b,n+1);
7 - tt=linspace(0,1,101);
8 - epi='Input epsilon';
9
10 - format long
11 - gam='Input gam';
12 - Gam='Input Gam';
13
14 - for k=1:101
15 -     lamda=(k-1)/100;
16
17     %Function value
18 -     for i=1:n+1
19 -         f(i)='Input function';%Input function
20 -     end
21 -     sum=0;
22 -     for j=1:n
23 -         x0=(xx(j+1)+xx(j))/2+epi;
24 -         sum=sum+ (xx(j+1)-xx(j))* ( (lamda/2)*(f(j)+f(j+1))...|
25 -             +(1-lamda)* (f(x0)) - (gam+Gam)/2*(1-lamda)*(x0-(xx(j+1)+xx(j))/2) );
26 -     end
27 -     App=sum;
28 -     Exact='Exact solution';%Exact solution of integral
29 -     Error(k)=abs(App-Exact);
30 - end
31 - plot(tt, Error)

```

# โปสเตอร์



## A comparative study of numerical integration based on a generalization of Ostrowski's inequality

Mr. Sittinun Thongkamsom ID: 630510521  
 Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ben Wongsaijai  
 Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University




## Abstract

This independent study aims to investigate a generalization of Ostrowski's inequality in order to establish a new method for numerical integration. Additionally, we apply the proposed numerical methods to approximate the value of definite integrals for certain functions and to compare their accuracy with well-known numerical integration techniques, such as the trapezoidal and Simpson's rule, to determine the most appropriate method. The numerical results can be constructed to demonstrate the viability of the purpose method.

## Introduction

An integral is an assignment of a value to a function, which can be viewed as a combination of very small quantities of a function and then put them together in a form that is similar to the displacement area capacity and related concepts. The process of searching for integral is called integration. In Mathematical analysis can be divided into 2 types: definite integral is integral that the result has been obtained, which can be interpreted as the graph of the function on the plane, with and assign a plus/minus sign to the space. If this space is above the X axis or below the X axis along sequence and indefinite integral. However, many functions cannot be calculated accurately, for this reason we have established a method called numerical integration to study of estimation of integral to result is most nearby exact solution.

Based on the research work of N. Ujevic [3] was present a new method of approximating integral from Ostrowski's inequality, who has a new concept for approximating integral values from Ostrowski's inequality and compare accurate results to most nearby exact solution.

## Preliminaries

**Definition: Trapezoidal rule** for each sub-interval  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots$  we can approximate the area under the graph of the function  $f(x)$  using the trapezoidal area. has heights  $f(x_{i-1})$  and  $f(x_i)$ , where the area of the trapezoid is found from.

$$A_i = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)],$$

when  $h = \frac{b-a}{n}$  and  $x_i = a + ih$  for  $i = 0, 1, 2, \dots, n$

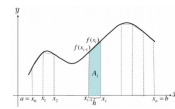


Figure 1: Approximation of the area under the graph  $f(x)$  by using the trapezoidal rule. [1]

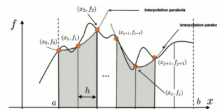


Figure 2: Approximation of the area under the graph  $f(x)$  by using Simpson's rule. [2]

**Definition: Simpson's rule** is a Newton-Cotes formulas that arises from approximation  $f(x)$  with a second degree polygon function. Simpson's rule can be found in the interval  $[x_0, x_2]$  from.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

## References

- [1] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. มรกต เกียรติเจริญ, การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข, รัชต์เจ็ดตัวเอน, 2562, page 216-230.
- [2] [https://pythonnumericalmethods.berkeley.edu/notebooks/chapter\\_21.04Simpsons-Rule.html](https://pythonnumericalmethods.berkeley.edu/notebooks/chapter_21.04Simpsons-Rule.html)
- [3] N. Ujevic, A Generalization of Ostrowski's Inequality and Applications in Numerical Integration, Appl. Math. Lett 17, 133-137, (2004).



## Main Results

We have studied and analyzed this theorem in order to introduce a new numerical integration method with more accurate approximations.

**Theorem:** Let  $I \subset R$  be an open interval and  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , if  $f: I \rightarrow R$  is a differentiable function such that  $\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$ ,  $\forall t \in [a, b]$ , for some constant  $\gamma, \Gamma \in R$ , then we have

$$\left| (b-a) \left[ \frac{\lambda}{2} (f(a) + f(b)) + (1-\lambda) f(x) - \frac{\Gamma+\gamma}{2} (1-\lambda) \left( x - \frac{a+b}{2} \right) \right] - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\Gamma-\gamma}{2} \left[ \frac{(b-a)^2}{2} (\lambda^2 + (1-\lambda)^2) + \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right],$$

where  $a + \lambda((b-a)/2) \leq x \leq b - \lambda((b-a)/2)$  and  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Remark:** We take the main equation and analyze it in the following :

**case 1:** Let  $\lambda = 1$  and  $x = \frac{a+b}{2}$ , we get equation form following as.

$$\left| \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\Gamma-\gamma}{2} \left[ \frac{(b-a)^2}{4} \right].$$

**case 2:** Let  $\lambda = \frac{1}{3}$  and  $x = \frac{a+b}{2}$ , we get equation form following as.

$$\left| \frac{(b-a)}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{\Gamma-\gamma}{2} \left[ \frac{(b-a)^2}{4} \left( \frac{5}{9} \right) \right].$$

### New Method

By applying our main theorem, here, we introduce the following numerical integration scheme. Let  $x_0 = a$ ,  $x_2 = b$ ,  $x_1 = \frac{x_2+x_0}{2}$  and  $x_1^* = x_1 + \varepsilon$  when  $0 \leq \varepsilon \ll \frac{h}{2}$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(t) dt = 2h \left[ \frac{\lambda}{2} (f(x_2) + f(x_0)) + (1-\lambda) f(x_1^*) - \frac{\Gamma+\gamma}{2} (1-\lambda) \varepsilon \right].$$

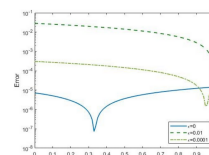
**Theorem:** Let  $I \subset R$  be an open interval and  $a, b \in I$ ,  $a < b$ , if  $f: I \rightarrow R$  is a differentiable function such that  $\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma$ ,  $\forall t \in [a, b]$ , for some constant  $\gamma, \Gamma \in R$ , then we have.

$$\left| 2h \left[ \frac{\lambda}{2} (f(x_2) + f(x_0)) + (1-\lambda) f(x_1^*) - \frac{\Gamma+\gamma}{2} (1-\lambda) \varepsilon \right] - \int_{x_0}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \frac{\Gamma-\gamma}{2} \left[ \frac{(x_2-x_0)^2}{2} (\lambda^2 + (1-\lambda)^2) + \varepsilon^2 \right].$$

**Example:**  $\int_1^2 x^4 dx$  at  $n = 400$

Let  $h = \frac{b-a}{n}$  and  $x_i = a + ih$  for  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . This example, we choose  $\varepsilon$  to approximate the value of the new method obtained to a solution as close exact solution.

Next, we compare the obtained results with the well-known trapezoidal rule method at  $n = 400$ , where  $n$  denotes the number of nodes used for approximation, alongside Simpson's rule estimates. We get the results as follow.



|                          | Error                    |
|--------------------------|--------------------------|
| Trapezoidal rule         | $1.4583 \times 10^{-8}$  |
| Simpson's rule           | $3.2773 \times 10^{-13}$ |
| Present method           |                          |
| $\varepsilon = 10^{-11}$ | $1.9676 \times 10^{-11}$ |
| $\varepsilon = 10^{-12}$ | $1.6759 \times 10^{-12}$ |
| $\varepsilon = 10^{-13}$ | $1.2168 \times 10^{-13}$ |
| $\varepsilon = 10^{-14}$ | $3.0286 \times 10^{-13}$ |
| $\varepsilon = 10^{-15}$ | $3.2240 \times 10^{-13}$ |

Figure 3: Graph of results from estimating the main theorem. Table 1: Error of New method main theorem.

Notice that, at  $\varepsilon = 10^{-13}$  the new estimation method has a better error value than the trapezoidal rule, Simpson's rule and the main theorem.

## Conclusions

According to the results obtained by a new generalization form of integral approximation. It can be concluded that the accuracy is slightly more accurate than the previous methods. This is because of defining the new value  $x$  without letting the term of  $x - \frac{a+b}{2}$  be zero.