

เทคนิคอย่างง่ายในการประมาณค่าจำนวนแรมซีย์
(A simple technique for estimating the Ramsey Numbers)

นางสาวสรียา พวงวิสัย
630510519

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566

เทคนิคอย่างง่ายในการประมาณค่าจำนวนแรมซีย์
(A simple technique for estimating the Ramsey Numbers)

ได้รับพิจารณาอนุมัติให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์

คณะกรรมการควบคุมการค้นคว้าอิสระ



..... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนะศักดิ์ หมวกทองกลาง)

ศาสตราจารย์ รุ่งโรจน์ ปันมา
.....กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.สายัญ ปันมา)

วันที่ 1 มีนาคม 2567

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาค้นคว้าอิสระเล่มนี้เป็นส่วนหนึ่งในการศึกษาในกระบวนวิชาค้นคว้าอิสระ 206499 (Independent Study) ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ซึ่งผู้ศึกษาได้ค้นคว้าในเรื่อง เทคนิคอย่างง่ายในการประมาณค่าจำนวนแรมซีย์ (A simple technique for estimating the Ramsey Numbers)

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนะศักดิ์ หมวกทองกลาง ประธานกรรมการสอบในฐานอาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ ที่ได้ให้คำแนะนำและความรู้แก่ข้าพเจ้า เป็นผู้ชี้แนะความรู้ต่างๆ และติดตามความก้าวหน้าในการค้นคว้าอิสระ รวมถึงตรวจสอบแก้ไขรูปเล่ม ตลอดจนการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เสร็จสมบูรณ์ด้วยดี

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สายัญ ปันมา อาจารย์กรรมการสอบการค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ที่กรุณาเสียสละเวลาอันมีค่าให้แก่ข้าพเจ้า ให้ข้อเสนอแนะ และแนวคิดที่เป็นประโยชน์ต่อการปรับปรุงแก้ไขงานการค้นคว้าอิสระนี้ประสบความสำเร็จดังที่ต้องการ

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนวิชาความรู้ทั้งในตำราและนอกตำรา ให้แก่ผู้ศึกษาค้นคว้าสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาการค้นคว้าอิสระนี้

สุดท้ายนี้ หากผลการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ได้รับคำชื่นชม หรือเกิดคุณประโยชน์ประการใด ข้าพเจ้าขอมอบสิ่งนั้นเป็นเกียรติยศแด่อาจารย์ที่ปรึกษาการค้นคว้าอิสระ คณาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่าน หากบกพร่องหรือมีข้อผิดพลาดประการใดนั้น ข้าพเจ้าน้อมรับข้อผิดพลาดทุกประการแต่เพียงผู้เดียว และยินดีรับฟังคำแนะนำจากทุกท่านที่ได้เข้ามาศึกษา ข้าพเจ้าหวังว่าผลการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้จะเป็นประโยชน์ในการพัฒนาการศึกษาค้นคว้าอิสระต่อไป

สรียา พวงวิลัย

หัวข้อ (ภาษาไทย): เทคนิคอย่างง่ายในการประมาณค่าจำนวนแรมซีย์

(ภาษาอังกฤษ): A simple technique for estimating the Ramsey Numbers

ชื่อผู้ทำการค้นคว้าอิสระ: นางสาวสรียา พวงวิสัย

รหัสประจำตัวนักศึกษา: 630510519

ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนะศักดิ์ หมวกทองหลาง

ชื่อกรรมการสอบ: รองศาสตราจารย์ ดร. สายัญ ปันมา

บทคัดย่อ

การค้นคว้าอิสระนี้เราได้ศึกษานิยาม และสมบัติพื้นฐานบางประการของกราฟและทฤษฎีบทของจำนวนแรมซีย์ โดยเราได้พิจารณาค่าที่ง่ายของจำนวนแรมซีย์ และทฤษฎีบทของทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจำนวนแรมซีย์ นอกจากนี้เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าจำนวนแรมซีย์ ได้แก่ จำนวนแรมซีย์ $R(m, n)$ โดยที่ $1 \leq m \leq 9$ และ $1 \leq n \leq 9$ ซึ่งจำนวนแรมซีย์บางตัวเราสามารถประมาณค่าที่แน่นอนได้และจำนวนแรมซีย์บางตัวเราไม่สามารถประมาณค่าออกมาได้แต่สามารถที่จะประมาณค่าเป็นขอบเขตบนและขอบเขตล่างได้

abstract

In this independent study, we study the definitions and basic properties of graphs, as well as the theories of Ramsey Numbers. We have examined simple values of Ramsey numbers and the theorems regarding both upper and lower bounds of these numbers. Additionally, we have delved into the approximation of Ramsey numbers, specifically $R(m, n)$, where $1 \leq m \leq 9$ and $1 \leq n \leq 9$. For certain instances of Ramsey numbers precise values have been successfully approximated, while for others, although an exact value may be elusive, we have been able to determine both upper and lower bounds.

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ	ก
บทคัดย่อ	ข
บทที่ 1 บทนำ (Introduction)	1
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐาน (Preliminaries)	2
2.1 นิยามกราฟและสมบัติพื้นฐาน (Definitions and Properties)	2
2.2 หลักการช้อนนกพิราบ (Pigeonhole principle)	5
2.3 การจัดหมู่และกฎของพาสคาล (Combination and Pascal's rule)	5
บทที่ 3 จำนวนแรมซีย์ (Ramsey Numbers)	6
3.1 ทฤษฎีบทแรมซีย์ (Ramsey Theory)	6
3.2 ค่าที่ง่ายของจำนวนแรมซีย์ (Trivial values of Ramsey Numbers)	7
3.3 ทฤษฎีบทขอบเขตบนของจำนวนแรมซีย์	15
3.4 ทฤษฎีบทขอบเขตล่างของจำนวนแรมซีย์	16
3.5 ตัวอย่างการประมาณค่าของจำนวนแรมซีย์	18
บทที่ 4 สรุปผลการศึกษา (Conclusions)	37
บรรณานุกรม	39
ภาคผนวก	40

บทที่ 1

บทนำ

(Introduction)

ทฤษฎีแรมซีย์ ที่มีชื่อมาจากนักคณิตศาสตร์และนักปรัชญาชาวบริติช แฟรงก์ พี. แรมซีย์ (Frank P. Ramsey) เป็นสาขาหนึ่งของศาสตร์คอมพิวเตอร์ทางคณิตศาสตร์ ที่เน้นการศึกษาถึงการเกิดลำดับขึ้นในโครงสร้างย่อยในกรอบขนาดที่รู้จัก Frank Ramsey นำเสนอทฤษฎีที่มีชื่อของเขาในปี 1930 ซึ่งมีหัวข้อหลักเกี่ยวกับกราฟที่เป็นกราฟสมบูรณ์และมีคุณสมบัติบางประการที่เราจะมองหากราฟย่อยสมบูรณ์ที่มีคุณสมบัติเป็นสีเดียวกัน นั่นคือ กราฟย่อยที่เส้นเชื่อมทั้งหมดมีสีเดียวกันในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะกราฟที่ใช้สองสีคือ สีแดงและสีน้ำเงิน

การศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ ได้ทำการศึกษาทฤษฎีบทของจำนวนแรมซีย์ที่จะนำไปใช้ในการประมาณค่าจำนวนแรมซีย์บางตัว โดยเริ่มต้นจากการศึกษานิยามและสมบัติพื้นฐานของกราฟ พร้อมทั้งยกตัวอย่าง และศึกษานิยามและทฤษฎีบทของจำนวนแรมซีย์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างจำนวนแรมซีย์ที่ใช้เทคนิคของทฤษฎีบทนั้นๆ ที่ยังไม่มีผู้ที่ศึกษาออกมาให้เราได้เห็นว่าจำนวนแรมซีย์นั้นๆทำไม่ถึงค่าออกมาเท่านี้ ด้วยเหตุผลดังกล่าว ในการค้นคว้าอิสระนี้จึงเป็นการศึกษาที่มาที่ไปและแสดงให้เห็นถึงขั้นตอนโดยใช้เทคนิคอย่างง่ายในการประมาณค่าจำนวนแรมซีย์

ในบทที่ 2 เราได้ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับนิยามและสมบัติบางประการของกราฟ หลักการช่อนกพิราบ การจัดหมู่และกฎของพาสคาล เพื่อนำมาประยุกต์ใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้

ในบทที่ 3 เราได้ศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีบทและนิยามของจำนวนแรมซีย์ และทฤษฎีบทขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจำนวนแรมซีย์ เพื่อนำมาใช้เป็นเทคนิคในการประมาณค่าจำนวนแรมซีย์ พร้อมทั้งยกตัวอย่างการประมาณค่าโดยใช้ทฤษฎีบทต่างๆ

ในบทที่ 4 จะเป็นการสรุปผลการศึกษาค้นคว้าอิสระในครั้งนี้ โดยจัดทำเป็นตารางเพื่อเปรียบเทียบให้เห็นถึงจำนวนแรมซีย์ที่เราประมาณค่ามาได้ทั้งหมด ซึ่งจะมีทั้งจำนวนแรมซีย์ที่ประมาณค่าออกมาเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่งและจำนวนแรมซีย์ที่ประมาณค่าออกมาเป็นขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

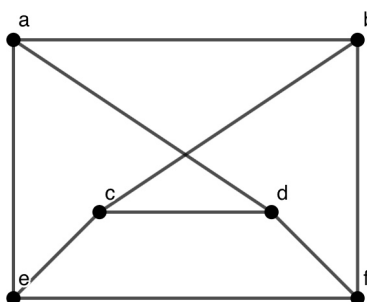
(Preliminaries)

2.1. นิยามกราฟและสมบัติพื้นฐาน (Definitions and Properties)

ในบทความนี้เราจะอธิบายคำจำกัดความพื้นฐานบางประการของคำศัพท์บางคำที่ใช้บ่อย เนื่องจากทฤษฎีแรมซีย์ส่วนใหญ่ใช้ทฤษฎีกราฟ การสร้างคำจำกัดความของกราฟจึงเป็นเรื่องสำคัญ

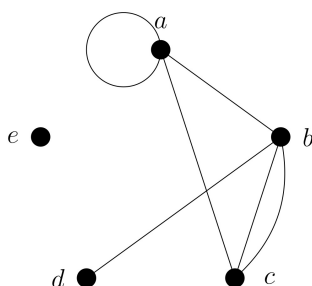
บทนิยาม 2.1.1: กราฟ (graph) G ประกอบด้วยเซต 2 เซต คือ $V(G)$ และ $E(G)$ โดยที่ $V(G)$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $E(G)$ เป็นเซตของคู่อันดับ (Unordered pairs) ของสมาชิกของ $V(G)$ เรียกสมาชิกของ $V(G)$ ว่าจุด (vertices) และเรียกสมาชิกของ $E(G)$ ว่าเส้น (edges) จะเขียนสัญลักษณ์แทนกราฟ G ด้วย $G(V, E)$

ตัวอย่าง 2.1.2: ให้ G เป็นกราฟที่ประกอบด้วยเซตของจุด $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ และเซตของเส้น $E(G) = \{ab, ad, ae, bc, bf, ce, df, fe\}$ จะสามารถเขียนแผนภาพแทนได้ดังรูป



บทนิยาม 2.1.3: เส้นซ้อน (multiple edges) หมายถึงเส้นที่ตกกระทบกับจุดคู่เดียวกันที่มากกว่าหนึ่งเส้น และ วงวน (loop) หมายถึง เส้นที่ตกกระทบกับจุดเพียงจุดเดียว

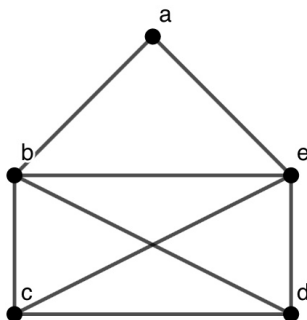
ตัวอย่าง 2.1.4: จากกราฟ G จะได้ว่า $\{a, a\}$ เป็นวงวน และ $\{b, c\}$ เป็นเส้นซ้อน



ต่อมาได้ใช้บทนิยามก่อนหน้าแสดงถึงนิยามของกราฟเชิงเดียว พร้อมทั้งยกตัวอย่างลักษณะของกราฟเชิงเดียว

บทนิยาม 2.1.5 : กราฟเชิงเดียว (simple graph) คือ กราฟที่ไม่มีเส้นซ้อนและไม่มียาวน

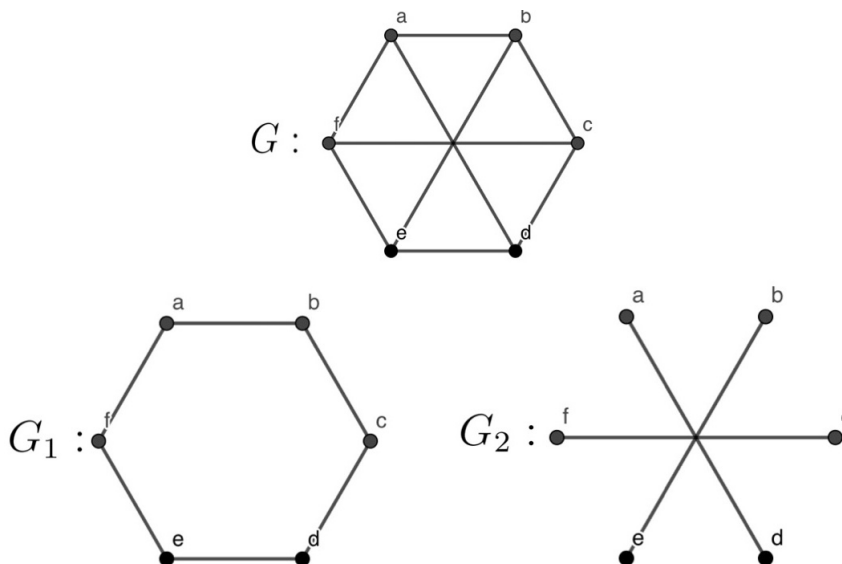
ตัวอย่าง 2.1.6 : พิจารณาจากกราฟ G ที่ไม่มีทั้งเส้นซ้อนและไม่มียาวน ดังนั้นกราฟ G เป็นกราฟเชิงเดียว ดังรูป



และเราจะทำการศึกษาบทนิยามของกราฟย่อยเพื่อทำความเข้าใจว่ากราฟย่อยคืออะไรเพื่อจะได้นำไปใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ซึ่งเป็นส่วนที่สำคัญที่เราควรเข้าใจเป็นอย่างดี

บทนิยาม 2.1.7 : จะกล่าวว่ากราฟ S เป็นกราฟย่อย (subgraph) ของกราฟ G ก็ต่อเมื่อเซตของจุดและเซตของเส้นของกราฟ S เป็นเซตย่อยของเซตของจุดและเซตของเส้นของกราฟ G ตามลำดับ

ตัวอย่าง 2.1.8 : พิจารณากราฟ G จะเห็นได้ว่ากราฟ G_1 และกราฟ G_2 เป็นกราฟย่อยของกราฟ G



ต่อมาบทนิยามที่ถือว่าค่อนข้างสำคัญสำหรับการค้นคว้าอิสระนี้คือ บทนิยามของกราฟสมบูรณ์ที่เราควรจะศึกษาให้เข้าใจเพราะเป็นใจความหลักของจำนวนแรมซีย์

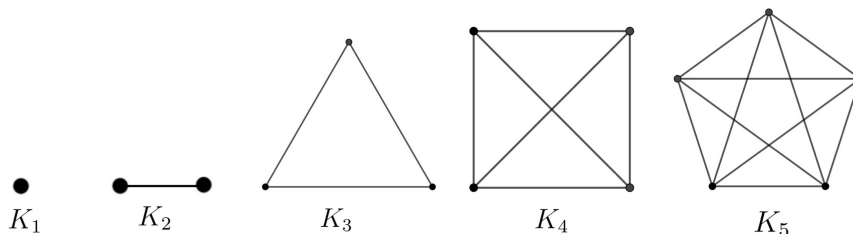
บทนิยาม 2.1.9 : กราฟสมบูรณ์ (complete graph) คือกราฟเชิงเดียวที่ประกอบด้วยจุดจำนวน n จุด และทุกคู่ของจุดประชิดกันจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ K_n

ข้อสังเกต 2.1.10: สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่าจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟ K_n มีค่าเท่ากับ

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

ตัวอย่าง 2.1.11:

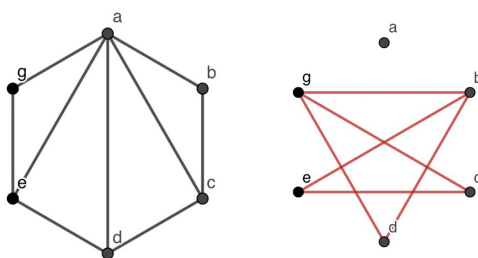
กราฟแบบสมบูรณ์



และบทนิยามของกราฟที่เราจะศึกษาต่อไปคือ ส่วนเติมเต็มซึ่งเราจะนำไปใช้ในการยกตัวอย่างแสดงการเกิดข้อขัดแย้งของกราฟที่ถือว่าค่อนข้างสำคัญและเกี่ยวข้องกับกราฟสมบูรณ์ที่เราใช้ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้

บทนิยาม 2.1.12: ให้ G เป็นกราฟเชิงเดียว ส่วนเติมเต็ม (complement) ของกราฟ G แทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{G}$ หมายถึงกราฟที่มีเซตของจุดยอดเป็นเซตเดียวกับ $V(G)$ และจุดยอด 2 จุดใดๆ ประชิดกันใน $\overline{G}$ ก็ต่อเมื่อ 2 จุดนั้นไม่ประชิดกันในกราฟ G

ตัวอย่าง 2.1.13: ตัวอย่างกราฟ G และกราฟ $\overline{G}$



บทนิยาม 2.1.14: วง (cycles) คือแนวเดินที่จุดยอดต่างกันทุกจุด โดยจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นจุดยอดเดียวกันจะใช้สัญลักษณ์ C_n แทนวงที่มีจุดยอด n จุด

บทนิยาม 2.1.15: ให้ $G(V_1, V_2)$ เป็นกราฟสองส่วน จะเรียกรูป $G(V_1, V_2)$ ว่ากราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ (complete bipartite graph) ถ้าทุกจุดยอดใน V_1 ประชิดกับทุกจุดยอดใน V_2 จะแทนกราฟสองส่วนแบบบริบูรณ์ด้วยสัญลักษณ์ $K_{m,n}$ ถ้า $|V_1| = m$ และ $|V_2| = n$

บทนิยามสุดท้ายของกราฟที่เราจะทำการศึกษาคือ เซตของสี ซึ่งในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เราจะใช้เซตของสีเพียง 2 สี คือ สีน้ำเงินและสีแดง

บทนิยาม 2.1.16: ให้ C เป็นเซตของสี $\{c_1, c_2, \dots, c_3\}$ และ $E(G)$ คือเส้นเชื่อมของกราฟ G การเปลี่ยนสีของเส้น $f: E \rightarrow C$ มีความหมายว่าเรากำหนดสีให้กับแต่ละเส้นใน $E(G)$ โดยเลือกสีจากเซต C ถ้าเป็นการเปลี่ยนสีของเส้นใน $E(G)$ ใช้สีจำนวน k สี นั้นจะเรียกว่า “กราฟที่ถูกเปลี่ยนสีด้วย k สี” หรือ “กราฟที่ถูกเปลี่ยนสีด้วยสี k ”

2.2. หลักการช่งนกพิราบ (pigeonhole principle)

การศึกษาหลักการของช่งนกพิราบนี้จะเป็นการศึกษาเพื่อใช้ในการยกตัวอย่างของการระบายสีเส้นเชื่อมเพื่อต่อการพิจารณาการลงสีเส้นเชื่อม

ทฤษฎีบท 2.2.1: ถ้า $m, n \in \mathbb{N}$ และมีนกจำนวน m ตัว หรือมากกว่าอยู่ในรัง n รังแล้วจะมีรังอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกจำนวนอย่างน้อย $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ ตัว

บทนิยาม 2.2.2: $\lceil x \rceil$ เป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x

2.3. การจัดหมู่และกฎของพาสคาล (Combination and Pascal's rule)

การศึกษบทนิยามของการจัดหมู่และกฎของพาสคาลนี้ เป็นการศึกษาเพื่อนำไปพิสูจน์ทฤษฎีบทและใช้ในการคำนวณของตัวอย่างในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้

บทนิยาม 2.3.1: การจัดหมู่ (Combination) ในทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการเลือกสิ่งของจำนวนหนึ่งมาจากสิ่งของที่มีอยู่ทั้งหมด โดยไม่คำนึงถึงลำดับ การจัดหมู่สิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง มีวิธีการจัดทั้งหมด $C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ วิธี

บทนิยาม 2.3.2: กฎพาสคาล (Pascal's Rule) เป็นกฎทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการบวกค่าของตัวเลขในสามเหลี่ยมพาสคาล (Pascal's Triangle) ซึ่งเป็นลำดับของตัวเลขที่มีลักษณะเป็นสามเหลี่ยม กฎพาสคาลบอกว่า หาก n และ r เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $n \geq r$ แล้ว

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

ในที่นี้ $\binom{n}{r}$ หมายถึง n เลือก r หรือจำนวนวิธีที่เราสามารถเลือกกลุ่มของ r สิ่ง จากกลุ่มทั้งหมด n สิ่ง โดย ไม่คำนึงถึงลำดับของสิ่งนั้นๆในกลุ่มที่ถูกเลือก

บทที่ 3

จำนวนแรมซีย์

(Ramsey Numbers)

3.1. ทฤษฎีบทแรมซีย์ (Ramsey Theory)

ในการศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เราจะทำความเข้าใจในทฤษฎีบทและบทนิยามของจำนวนแรมซีย์ เพื่อจุดประสงค์ของเราเราจะเน้นไปที่ทฤษฎีบทแรมซีย์ที่มีพื้นฐานจากการระบายสีกราฟสมบูรณ์ ซึ่งตัวอย่างที่แสดงต่อไปนี้ เป็นตัวอย่างเพื่อให้เข้าใจถึงจำนวนแรมซีย์มากขึ้นโดยใช้ตัวอย่างที่สามารถทำความเข้าใจได้ง่าย

ทฤษฎีบท 3.1.1 : ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $m, n \geq 2$ แล้วมีจำนวนเต็มบวก s ที่น้อยที่สุดที่ $s \geq 1$ และแทนจำนวนที่น้อยที่สุดนี้ด้วย $R(m, n)$ โดยที่กราฟ K_s ถูกแบ่งสีด้วย 2 สีใดๆ จะมีกราฟย่อย K_m หรือกราฟย่อย K_n ที่มีสีเดียวกัน

บทนิยาม 3.1.2 : จำนวนจุดยอดของกราฟสมบูรณ์ที่น้อยที่สุดที่เมื่อระบายสีเส้นเชื่อมด้วย 2 สีในวิธีใดๆ จะทำให้เกิดกราฟย่อยสมบูรณ์ที่มีจุดยอด m จุด ซึ่งเส้นเชื่อมทุกเส้นมีสีที่ 1 (สีน้ำเงิน) หรือเกิดกราฟย่อยสมบูรณ์ที่มีจุดยอด n จุด ซึ่งเส้นเชื่อมทุกเส้นมีสีที่ 2 (สีแดง) ซึ่งเรียกจำนวนนี้ว่า จำนวนแรมซีย์ $R(m, n)$

ตัวอย่าง 3.1.3 : ในระหว่างกลุ่มคน 6 คน จะต้องมียุุ่มคน 3 คน ที่เป็นเพื่อนกันหรือมียุุ่มคน 3 คนที่ไม่รู้จักกันเลย

พิสูจน์ สมมติให้ a เป็นสมาชิกคนหนึ่งในกลุ่ม 6 คนนั้น

ให้ F เป็นเซตของคนที่เป็นเพื่อนกับ a

ให้ S เป็นเซตของคนที่ไม่รู้จักกับ a

จากหลักการชั่งนกพิราบจะพบว่า ในจำนวนกลุ่มคน 5 คนที่เหลือ (ไม่รวม a) จะต้องมียุุ่มอย่างน้อย 3 คนอยู่ใน F หรือจะต้องมียุุ่มอย่างน้อย 3 คนอยู่ใน S

สมมติว่ากรณีแรกเป็นจริง นั่นคือมียุุ่มอย่างน้อย 3 คนอยู่ใน F ในระหว่าง 3 คนนี้ ถ้าทุกคนไม่รู้จักกันการพิสูจน์ก็จบลงเพราะถือว่าเราได้เจอกลุ่มคน 3 คนที่ไม่รู้จักกันเลย แต่ถ้ามีคนคู่ใดคู่หนึ่งเป็นเพื่อนกันคนสองคนนี้รวมกับ a ก็จะเป็นกลุ่มคน 3 คน ที่เป็นเพื่อนกัน ซึ่งเป็นไปตามข้อสรุปของทฤษฎีบท แต่ถ้ากรณีหลังเป็นจริง นั่นคือมียุุ่มอย่างน้อย 3 คนอยู่ใน S การให้เหตุผลในการพิสูจน์ทำได้ในทำนองเดียวกับกรณีแรก ดังนั้นไม่ว่าจะเป็นกรณีแรกหรือกรณีหลัง เราสามารถสรุปได้ว่าจะต้องมีกลุ่มคน 3 คนเป็นเพื่อนกัน หรือมีกลุ่มคน 3 คนไม่รู้จักกัน

หมายเหตุ คำว่า "กลุ่มคน 3 คนเป็นเพื่อนกัน" หมายถึงคนแต่ละคู่เป็นเพื่อนซึ่งกันและกัน

และ คำว่า "กลุ่มคน 3 คนไม่รู้จักกัน" หมายถึงคนแต่ละคู่ใน 3 คนไม่มีใครรู้จักกันเลย

3.2. ค่าที่ง่ายของจำนวนแรมซีย์ (Trivial values of Ramsey Numbers)

เราจะแสดงถึงความสัมพันธ์ที่เป็นประโยชน์ของจำนวนแรมซีย์ต่างๆ จึงสรุปด้วยการพิสูจน์ของการสมมาตร คุณสมบัติที่สำคัญประการแรกคือ จำนวนแรมซีย์ที่มีความสมมาตรเมื่อเทียบกับค่า m และ n

ทฤษฎีบท 3.2.1 : $R(m, n) = R(n, m)$

พิสูจน์ ให้ $R(m, n) = r$ และ $R(n, m) = s$

ให้ α เป็นการกำหนดสีของ K_r ที่ใช้สี 2 สี คือ K_m สีน้ำเงิน หรือ K_n สีแดง

เราจะสลับสีใน α โดยการให้ β เป็นการกำหนดสีตัวใหม่ และเป็นการกำหนดสีของ K_r เมื่อ β บรรจุ K_m สีแดง หรือ K_n สีน้ำเงินจากทฤษฎีบทของจำนวนแรมซีย์ $R(m, n)$

ดังนั้น $R(n, m) \leq r$ นั่นคือ $s \leq r$ ในทางเดียวกัน $r \leq s$ จะได้ว่า $r = s$

ดังนั้น $R(m, n) = R(n, m)$

เราเริ่มต้นด้วยตัวเลขที่ง่ายที่สุด คือจำนวนแรมซีย์ที่มี $m = 1$ หรือ $n = 1$ และตัวที่ซับซ้อนขึ้น คือจำนวนแรมซีย์ที่มี $m = 2$ หรือ $n = 2$

ทฤษฎีบท 3.2.2 : $R(1, n) = R(m, 1) = 1$

พิสูจน์ กราฟ K_1 มีเพียงจุดเดียว ซึ่งไม่จำเป็นต้องมีเส้นเชื่อม ดังนั้นจะมี K_1 ที่มีสีเดียวกันเป็นสีน้ำเงินหรือสีแดง จะต้องใช้จุดเพียงหนึ่งจุดเพื่อให้เงื่อนไขของ $R(1, n) = R(m, 1) = 1$ เป็นจริง ดังนั้นทุกจำนวนแรมซีย์ที่มี $m = 1$ หรือ $n = 1$ จะต้องใช้จุดเพียงหนึ่งจุด เพื่อรับประกันว่ามี กราฟ K_1 ในสองกราฟย่อย

ทฤษฎีบท 3.2.3 : $R(m, 2) = m$ หรือ $R(2, n) = n$

พิสูจน์ พิจารณากราฟสมบูรณ์ K_r โดยที่ $r \leq m - 1$ และทุกเส้นเชื่อมเป็นสีน้ำเงิน จะไม่มีเส้นสีแดงในกราฟ และไม่มีกราฟ K_m สีน้ำเงิน

ดังนั้น $R(m, 2) \not\leq m - 1$ นั่นคือ $R(m, 2) > m - 1$

ต่อไป เราจะพิจารณากราฟสมบูรณ์ K_m ถ้าขอบด้านใดด้านหนึ่งเป็นสีแดงแสดงว่าเราพบจุดยอดคู่สีแดงแล้ว แต่ถ้าไม่เป็นเช่นนั้นขอบทั้งหมดจะเป็นสีน้ำเงิน เราจึงพบ K_m สีน้ำเงินแล้ว ซึ่งหมายความว่ากราฟใดๆ ของจุดยอด m จะมี K_m สีน้ำเงิน หรือ K_2 สีแดง

ดังนั้น $R(m, 2) \leq m$

จาก $R(m, 2) > m - 1$ และ $R(m, 2) \leq m$ จึงได้ว่า $R(m, 2) = m$

ด้วยความสมมาตรของ $R(m, n)$ และ $R(n, m)$ จะได้ว่า $R(2, n) = n$ ด้วย

ตัวอย่าง 3.2.4: $R(2, 3) = R(3, 2)$

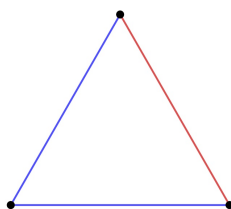
พิจารณากราฟ K_2



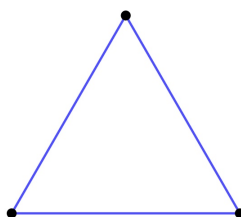
จะเห็นว่ากราฟ K_2 ที่เส้นเชื่อมเป็นสีน้ำเงิน จะไม่มีกราฟ K_3 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มีกราฟ K_2 สีแดง ดังนั้น $R(2, 3) \neq 2$ นั่นคือ $R(2, 3) > 2$

ต่อไปจะพิจารณากราฟ K_3

ถ้าขอบด้านใดด้านหนึ่งเป็นสีแดงแสดงว่าเราพบ K_2 สีแดงแล้ว



แต่ถ้าไม่เป็นเช่นนั้นขอบทั้งหมดจะเป็นสีน้ำเงิน เราจึงสามารถพบ K_3 สีน้ำเงิน



ซึ่งหมายความว่ากราฟใดๆของจุดยอด 3 จุด จะมี K_3 สีน้ำเงิน หรือ K_2 สีแดง

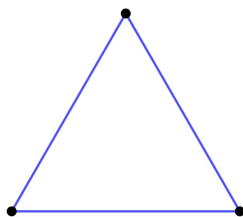
ดังนั้น $R(2, 3) \leq 3$

จึงได้ว่า $R(2, 3) = 3$ และจากทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $R(2, 3) = R(3, 2)$

สรุปได้ว่า $R(2, 3) = R(3, 2) = 3$

ตัวอย่าง 3.2.5: $R(2, 4) = R(4, 2)$

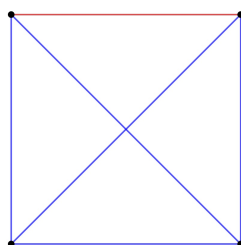
พิจารณากราฟ K_3



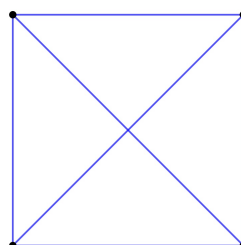
จะเห็นได้ว่ากราฟ K_3 ที่เส้นเชื่อมทุกเส้นเป็นสีน้ำเงิน จะไม่มีกราฟ K_4 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มีกราฟ K_2 สีแดง ดังนั้น $R(2, 4) \neq 3$ นั่นคือ $R(2, 4) > 3$

ต่อไปจะพิจารณากราฟ K_4

ถ้าขอบด้านใดด้านหนึ่งเป็นสีแดงแสดงว่าเราพบ K_2 สีแดงแล้ว



แต่ถ้าไม่เป็นเช่นนั้นขอบทั้งหมดจะเป็นสีน้ำเงิน เราจึงสามารถพบ K_4 สีน้ำเงิน



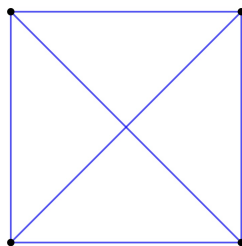
ซึ่งหมายความว่ากราฟใดๆของจุดยอด 4 จุด จะมี K_4 สีน้ำเงิน หรือ K_2 สีแดง ดังนั้น $R(2, 4) \leq 4$

จึงได้ว่า $R(2, 4) = 4$ และจากทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $R(2, 4) = R(4, 2)$

สรุปได้ว่า $R(2, 4) = R(4, 2) = 4$

ตัวอย่าง 3.2.6: $R(2, 5) = R(5, 2)$

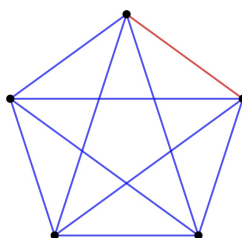
พิจารณากราฟ K_4



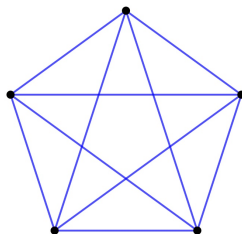
จะเห็นว่ากราฟ K_4 ที่เส้นเชื่อมทุกเส้นเป็นสีน้ำเงิน จะไม่มีกราฟ K_5 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มีกราฟ K_2 สีแดง ดังนั้น $R(2, 5) \neq 4$ นั่นคือ $R(2, 5) > 4$

ต่อไปจะพิจารณากราฟ K_5

ถ้าขอบด้านใดด้านหนึ่งเป็นสีแดงแสดงว่าเราพบ K_2 สีแดงแล้ว



แต่ถ้าไม่เป็นเช่นนั้นขอบทั้งหมดจะเป็นสีน้ำเงิน เราจึงสามารถพบ K_5 สีน้ำเงิน



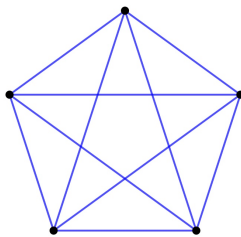
ซึ่งหมายความว่ากราฟใดๆของจุดยอด 5 จุด จะมี K_5 สีน้ำเงิน หรือ K_2 สีแดง ดังนั้น $R(2, 5) \leq 5$

จึงได้ว่า $R(2, 5) = 5$ และจากทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $R(2, 5) = R(5, 2)$

สรุปได้ว่า $R(2, 5) = R(5, 2) = 5$

ตัวอย่าง 3.2.7: $R(2, 6) = R(6, 2)$

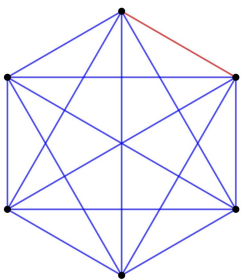
พิจารณากราฟ K_5



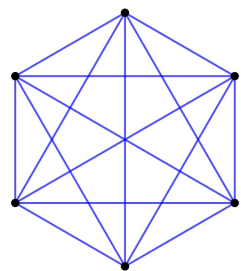
จะเห็นว่ากราฟ K_5 ที่เส้นเชื่อมทุกเส้นเป็นสีน้ำเงิน จะไม่มีกราฟ K_6 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มีกราฟ K_2 สีแดง
ดังนั้น $R(2, 6) \neq 5$ นั่นคือ $R(2, 6) > 5$

ต่อไปจะพิจารณากราฟ K_6

ถ้าขอบด้านใดด้านหนึ่งเป็นสีแดงแสดงว่าเราพบ K_2 สีแดงแล้ว



แต่ถ้าไม่เป็นเช่นนั้นขอบทั้งหมดจะเป็นสีน้ำเงิน เราจึงสามารถพบ K_6 สีน้ำเงิน



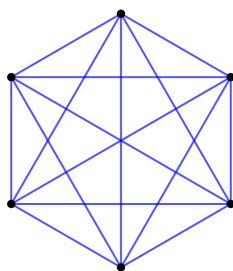
ซึ่งหมายความว่ากราฟใดๆของจุดยอด 6 จุด จะมี K_6 สีน้ำเงิน หรือ K_2 สีแดง
ดังนั้น $R(2, 6) \leq 6$

จึงได้ว่า $R(2, 6) = 6$ และจากทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $R(2, 6) = R(6, 2)$

สรุปได้ว่า $R(2, 6) = R(6, 2) = 6$

ตัวอย่าง 3.2.8: $R(2, 7) = R(7, 2)$

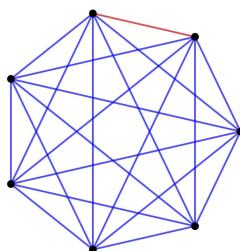
พิจารณากราฟ K_6



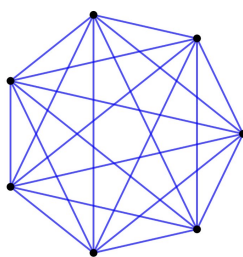
จะเห็นว่ากราฟ K_6 ที่เส้นเชื่อมทุกเส้นเป็นสีน้ำเงิน จะไม่มีกราฟ K_7 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มีกราฟ K_2 สีแดง
ดังนั้น $R(2, 7) \neq 6$ นั่นคือ $R(2, 7) > 6$

ต่อไปจะพิจารณากราฟ K_7

ถ้าขอบด้านใดด้านหนึ่งเป็นสีแดงแสดงว่าเราพบ K_2 สีแดงแล้ว



แต่ถ้าไม่เป็นเช่นนั้นขอบทั้งหมดจะเป็นสีน้ำเงิน เราจึงสามารถพบ K_7 สีน้ำเงิน



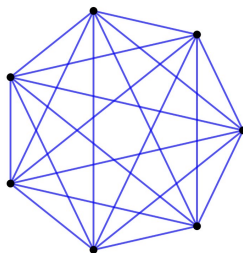
ซึ่งหมายความว่ากราฟใดๆของจุดยอด 7 จุด จะมี K_7 สีน้ำเงิน หรือ K_2 สีแดง
ดังนั้น $R(2, 7) \leq 7$

จึงได้ว่า $R(2, 7) = 7$ และจากทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $R(2, 7) = R(7, 2)$

สรุปได้ว่า $R(2, 7) = R(7, 2) = 7$

ตัวอย่าง 3.2.9: $R(2, 8) = R(8, 2)$

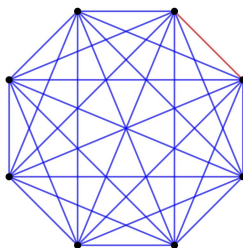
พิจารณากราฟ K_7



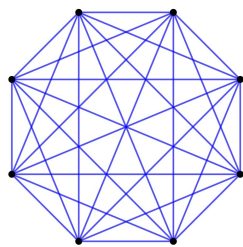
จะเห็นว่ากราฟ K_7 ที่เส้นเชื่อมทุกเส้นเป็นสีน้ำเงิน จะไม่มีกราฟ K_8 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มีกราฟ K_2 สีแดง ดังนั้น $R(2, 8) \neq 7$ นั่นคือ $R(2, 8) > 7$

ต่อไปจะพิจารณากราฟ K_8

ถ้าขอบด้านใดด้านหนึ่งเป็นสีแดงแสดงว่าเราพบ K_2 สีแดงแล้ว



แต่ถ้าไม่เป็นเช่นนั้นขอบทั้งหมดจะเป็นสีน้ำเงิน เราจึงสามารถพบ K_8 สีน้ำเงิน



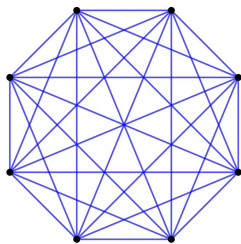
ซึ่งหมายความว่ากราฟใดๆของจุดยอด 8 จุด จะมี K_8 สีน้ำเงิน หรือ K_2 สีแดง ดังนั้น $R(2, 8) \leq 8$

จึงได้ว่า $R(2, 8) = 8$ และจากทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $R(2, 8) = R(8, 2)$

สรุปได้ว่า $R(2, 8) = R(8, 2) = 8$

ตัวอย่าง 3.2.10: $R(2, 9) = R(9, 2)$

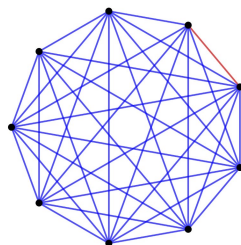
พิจารณากราฟ K_8



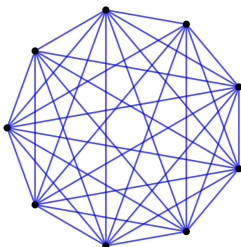
จะเห็นว่ากราฟ K_8 ที่เส้นเชื่อมทุกเส้นเป็นสีน้ำเงิน จะไม่มีกราฟ K_9 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มีกราฟ K_2 สีแดง
ดังนั้น $R(2, 9) \neq 8$ นั่นคือ $R(2, 9) > 8$

ต่อไปจะพิจารณากราฟ K_9

ถ้าขอบด้านใดด้านหนึ่งเป็นสีแดงแสดงว่าเราพบ K_2 สีแดงแล้ว



แต่ถ้าไม่เป็นเช่นนั้นขอบทั้งหมดจะเป็นสีน้ำเงิน เราจึงสามารถพบ K_9 สีน้ำเงิน



ซึ่งหมายความว่ากราฟใดๆของจุดยอด 9 จุด จะมี K_9 สีน้ำเงิน หรือ K_2 สีแดง
ดังนั้น $R(2, 9) \leq 9$

จึงได้ว่า $R(2, 9) = 9$ และจากทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $R(2, 9) = R(9, 2)$

สรุปได้ว่า $R(2, 9) = R(9, 2) = 9$

3.3. ทฤษฎีบทขอบเขตบนของจำนวนแรมซีย์

ในทฤษฎีบทต่อไปนี้จะได้รับการพิสูจน์ในปี พ.ศ.2498 โดยกรีนวูดและกลีสัน ซึ่งเป็นประโยชน์ในการคำนวณขอบเขตบนของจำนวนแรมซีย์เพื่อใช้ในการประมาณค่าต่อไป แต่จะสามารถใช้ได้กับจำนวนแรมซีย์บางตัวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.3.1 : สำหรับทุก $m, n \in \mathbb{N}$, $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$

พิสูจน์ สมมติให้ $R(m, n) > R(m-1, n) + R(m, n-1)$ สำหรับบางค่าของ m, n

ให้ $r = R(m-1, n) + R(m, n-1)$ และพิจารณารกราฟสมบูรณ์ของจุดยอด r โดยที่ไม่มี K_m สีน้ำเงิน หรือ K_n สีแดง เลือกจุดยอดแบบสุ่ม v โดยให้ N_B เป็นเซตของจุดยอดที่เชื่อมต่อกับ v ด้วยขอบสีน้ำเงิน และ N_R เป็นเซตของจุดยอดที่เชื่อมต่อกับ v ด้วยขอบสีแดง จะได้ว่า $|N_B| + |N_R| = r - 1$ ตามสมมติฐาน กราฟไม่ควรมี K_m สีน้ำเงิน ใน N_B ถ้ามี K_{m-1} สีน้ำเงินอยู่ใน N_B จะทำให้ $N_B \cup \{v\}$ มี K_m สีน้ำเงิน ซึ่งขัดแย้งกัน ดังนั้น $|N_B| \leq R(m-1, n) - 1$ ในทำนองเดียวกัน จะได้ $|N_R| \leq R(m, n-1) - 1$ ดังนั้น $r - 1 = |N_B| + |N_R| \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) - 2 = r - 2$ เกิดข้อขัดแย้ง จึงได้ว่า $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$

และในทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่ใช้ในการคำนวณขอบเขตบนของจำนวนแรมซีย์เพื่อใช้ในการประมาณค่า แต่ทฤษฎีบทนี้จะใช้กับจำนวนแรมซีย์ที่เราหาค่าได้ก่อนหน้านี้เป็นจำนวนคู่เท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.3.2 : สำหรับทุก $m, n \in \mathbb{N}$, ถ้า $R(m-1, n)$ และ $R(m, n-1)$ เป็นจำนวนคู่

$$\text{แล้ว } R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1$$

พิสูจน์ เราจะพิจารณารกราฟที่มีจำนวนจุด $2p + 2q - 1$ และจุด A ที่มีเส้นเชื่อม $2p + 2q - 2$ โดยมีการกำหนด $R(m-1, n) = 2p$ และ $R(m, n-1) = 2q$ จากนั้นให้พิจารณากรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 มีอย่างน้อย $2p$ เส้นสีน้ำเงินที่เชื่อมต่อกับจุด A

กรณีที่ 2 มีอย่างน้อย $2q$ เส้นสีแดงที่เชื่อมต่อกับจุด A

กรณีที่ 3 มีเส้นเชื่อม $2p - 1$ สีน้ำเงิน และ $2q - 1$ สีแดงที่เชื่อมต่อกับจุด A

สำหรับกรณีที่ 1 และ กรณีที่ 2 เราต้องพิจารณาเซต T_1 ที่ประกอบด้วยจุดที่อยู่ปลายสุดของเส้น $2p$ หรือมากกว่า ที่เชื่อมต่อกับจุด A ถ้าจำนวนของจุดใน T_1 มากกว่าหรือเท่ากับ $R(m-1, n)$ จะมีเส้น K_{m-1} สีน้ำเงิน หรือ K_n สีแดง แต่ถ้ามี K_{m-1} สีแดง แล้วเซต $T_1 \cup \{A\}$ จะเป็น K_m สีน้ำเงิน ดังนั้นทฤษฎีบทยังเป็นจริงในกรณีนี้ ในทำนองเดียวกันสามารถใช้ในการพิสูจน์กรณีที่ 2 ได้

สำหรับกรณีที่ 3 นี้ไม่สามารถเป็นจริงสำหรับทุกจุด A ของกราฟ เนื่องจากถ้าเป็นเช่นนั้นจะมีจุดสิ้นสุดสีแดง $(2p + 2q - 1)(2p - 1)$ ซึ่งเป็นจำนวนเลขคี่ไม่เป็นไปตามความเป็นจริง เนื่องจากทุกเส้นตกระทบกับจุดยอด 2 จุด ดังนั้นมีอย่างน้อย 1 จุดที่ทำให้กรณีที่ 1 หรือกรณีที่ 2 เป็นจริง แต่เป็นไปได้ในกรณีที่ 3

และในทฤษฎีบทนี้คือทฤษฎีบทที่กำหนดขอบเขตบนอีกอันหนึ่งของ $R(m, n)$ แต่ทฤษฎีบทนี้เราจะใช้กับการประมาณที่เราไม่ทราบค่าที่แน่นอนของจำนวน Ramsey ก่อนหน้า

ทฤษฎีบท 3.3.3 : $R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยวิธีการอุปนัย โดยเริ่มจากกรณีพื้นฐาน $m = n = 2$:

$$\binom{2+2-2}{2-1} = \binom{2}{1} = 2 \geq 2 = R(2, 2)$$

ตอนนี้เราสมมติว่าความสัมพันธ์นี้เป็นจริงสำหรับทุกกรณีที่ $m = x-1, n = y$ และ $m = x, n = y-1$ เราจะแสดงให้เห็นว่ากรณีที่ $m = x, n = y$ เป็นจริงตามนี้ โดยใช้ทฤษฎีบท 3.3.1 และกฎพาสคาลที่ระบุไว้ว่า $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$$\begin{aligned} R(m, n) &\leq R(m-1, n) + R(m, n-1) \\ &\leq \binom{(m-1)+n-2}{(m-1)-1} + \binom{m+(n-1)-2}{m-1} \\ &= \binom{m+n-2}{m-1} \\ R(m, n) &\leq \binom{m+n-2}{m-1} \end{aligned}$$

3.4. ทฤษฎีบทขอบเขตล่างของจำนวน Ramsey

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทขอบเขตล่างของจำนวน Ramsey ซึ่งเป็นค่าที่ไม่แน่นอน อาจจะได้ขอบเขตที่ค่อนข้างกว้างแต่สามารถที่จะแสดงให้เห็นข้อขัดแย้งได้ นำไปสู่การหาผลลัพธ์ของจำนวน Ramseynั้นๆ ได้

ทฤษฎีบท 3.4.1 : สำหรับ $m, n > 0$, $R(m, n) > (m-1)(n-1)$

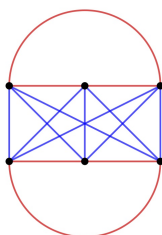
พิสูจน์ ให้ $s = (m-1)(n-1)$

จะแสดงว่ากราฟสมบูรณ์ที่จุดยอด s จุดจะไม่เกิด K_m สีน้ำเงิน หรือ K_n สีแดง

ทำการจัดเรียงจุดยอดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าของ K_s ใน $m-1$ แถว และ $n-1$ หลัก

โดยในที่นี้จะแสดงตัวอย่าง $m = 3$ และ $n = 4$

นั่นคือ $s = (3-1)(4-1) = 2 \cdot 3 = 6$



จากรูป ลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่เป็นหลักเดียวกัน และจุดแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_m สีน้ำเงิน หรือ K_n สีแดง ดังนั้น $R(m, n) > (m - 1)(n - 1)$

ทฤษฎีบท 3.4.2 : ถ้า $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ แล้ว $R(k, k) > n$

พิสูจน์ ในกรณีนี้เราจะแสดงว่า $R(k, k) > n$ เพียงพอที่จะแสดงให้เห็นว่ามีการเปลี่ยนสีของเส้นของ K_n ที่ไม่มี K_k ที่มีสีเดียวกัน พิจารณาการเปลี่ยนสีของเส้นของ K_n ที่มีการกำหนดสีโดยสุ่ม ให้แต่ละเส้นถูกเปลี่ยนสีโดยอิสระโดยที่

$$\mathbb{P}(\text{เส้นขอบสีแดง}) = \mathbb{P}(\text{เส้นขอบสีน้ำเงิน}) = \frac{1}{2}$$

มีวิธีในการเลือกกราฟย่อยขนาด k ได้ทั้งหมด $\binom{n}{k}$ วิธีกำหนดให้ A_i เป็นเหตุการณ์ที่ K_k ครั้งที่ i เป็นสีเดียวแล้ว

$$\mathbb{P}(A_i) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}$$

โดยที่ตัวเลข 2 นำหน้าเนื่องจากมีสองสีที่สามารถเลือกได้ แล้ว

$$\mathbb{P}(\text{กราฟ } K_k \text{ ที่มีสีเดียวกัน}) = \mathbb{P}(\cup_i A_i) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

อย่างไรก็ตาม $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ ตามการสมมติฐานที่ใช้ในทฤษฎี ดังนั้น

$$\mathbb{P}(\text{การเปลี่ยนสีโดยที่ไม่มี } K_k \text{ ที่เป็นสีเดียวกัน}) > 0$$

มีการทาสีโดยที่ไม่มี K_k ที่เป็นสีเดียวกัน

ดังนั้น $R(k, k) > n$

เราสามารถใช้ผลลัพธ์ที่พิสูจน์ไว้ด้านบนเพื่อแสดงขอบเขตที่มีประโยชน์เพิ่มเติม

บทแทรก 3.4.3 : สำหรับ $k \geq 3$, $R(k, k) > 2^{\frac{k}{2}}$

พิสูจน์ โดยที่ $k \geq 3$ กำหนดให้ $n := \lfloor 2^{\frac{k}{2}} \rfloor$ แล้ว

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k^2}{2}}} \\ &\leq \frac{n^k}{k!} \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k^2}{2}}} \\ &\leq \frac{2^{\frac{k^2}{2}}}{k!} \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k^2}{2}}} \\ &= \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} \end{aligned}$$

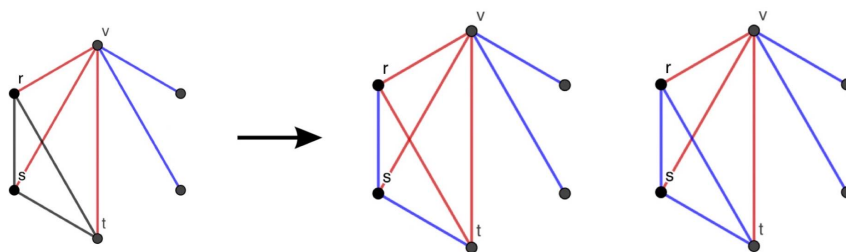
อย่างไรก็ตาม $\frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} < 1$ ถ้า $k \geq 3$ ดังนั้นทฤษฎี 3.4.2 สามารถนำมาใช้ได้

3.5. ตัวอย่างการประมาณค่าของจำนวนแรนซี

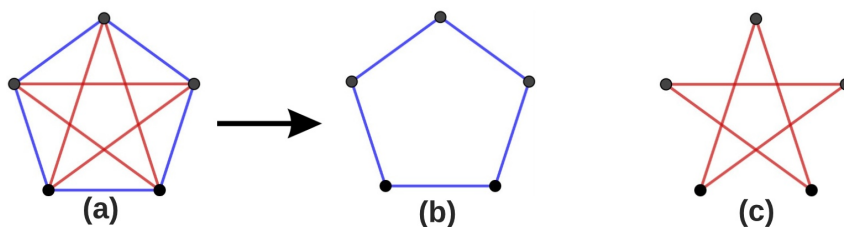
ตัวอย่างทั้งหมดที่จะแสดงต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างที่ใช้ทฤษฎีบททั้งหมดที่ได้กล่าวมาทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่างเพื่อนำมาใช้ในการประมาณค่าของจำนวนแรนซีที่ประมาณค่าได้เป็นทั้งค่าคงที่และขอบเขต ได้ดังนี้

ตัวอย่าง 3.5.1 : $R(3, 3)$

พิสูจน์ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $R(3, 3) = 6$ โดยสร้างกราฟที่มีจุดยอด 6 จุด แล้วระบายสีเส้นเชื่อมด้วยสีแดงและสีน้ำเงิน จากนั้นเลือกจุดยอด v ขึ้นมา จากหลักการชงนกพิราบ จะได้ว่ามีจุดยอดอย่างน้อย 3 จุดที่เชื่อมกับ v ด้วยสีเดียวกันซึ่งสามารถสมมติได้โดยไม่เสียนัยสำคัญได้ว่าเป็นสีแดง กำหนดให้จุดยอดเหล่านั้นคือ r, s และ t พิจารณาเส้นเชื่อม $\{r, s\}, \{s, t\}$ และ $\{t, r\}$ ถ้ามีเส้นใดเป็นสีแดงก็จะเกิดสามเหลี่ยมสีแดงขึ้น แต่ถ้าทุกเส้นเป็นสีน้ำเงินก็จะเกิดสามเหลี่ยมสีน้ำเงินขึ้น



นอกจากนี้เราสามารถพิสูจน์แย้งกรณีที่มีจุดยอด 5 จุดได้ โดยระบายสีเส้นเชื่อมดังภาพ



จากรูป แสดงว่ากราฟ $a = b \cup c$ ซึ่งกราฟ a เป็นกราฟ K_5 กราฟ b และ กราฟ c เป็นกราฟ C_5 นั่นคือ กราฟที่มีจุดยอด 5 จุด ซึ่งไม่มีจุดยอด 3 จุดใดๆ ที่เส้นเชื่อมทุกคู่มีสีเดียวกัน ดังนั้น $R(3, 3) > 5$

จากทฤษฎีบท 3.3.1 $R(3, 3) \leq R(3 - 1, 3) + R(3, 3 - 1) = R(2, 3) + R(3, 2)$ และ

จากทฤษฎีบท 3.2.3 $R(2, 3) = 3$ และ $R(3, 2) = 3$ ทำให้ได้ว่า $R(3, 3) \leq 3 + 3 = 6$

ดังนั้น $R(3, 3) = 6$

ตัวอย่าง 3.5.2: $R(3, 4)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_3 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_4 สีแดง จากทฤษฎีบท 3.3.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(3, 4) \leq R(3 - 1, 4) + R(3, 4 - 1) = R(2, 4) + R(3, 3)$$

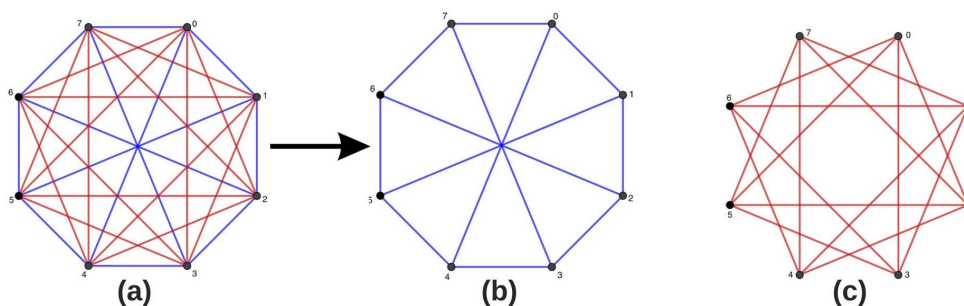
เนื่องจาก $R(2, 4) = 4$ และ $R(3, 3) = 6$ จากทฤษฎีบท 3.2.3 และจากตัวอย่าง 3.5.1

และจะเห็นได้ว่า $R(2, 4) = 4$ เป็นจำนวนคู่ และ $R(3, 3) = 6$ เป็นจำนวนคู่

ตามทฤษฎีบท 3.3.2 จะได้ว่า $R(3, 4) \leq 4 + 6 - 1 = 9$

นอกจากนี้เราสามารถพิสูจน์แย้งกรณีที่มีจุดยอด 8 จุดได้ โดยระบายสีเส้นเชื่อมดังภาพ

พิจารณาจุดใดๆในกราฟ G ที่มี 8 จุด โดยกำหนดให้แต่ละจุดเป็นตัวเลข 0 – 7 และลงสีขอบโดยที่ขอบจะมีสีน้ำเงินก็ต่อเมื่อความต่างของเลขระหว่างจุดทั้งสองที่ติดกันเป็น 1, 4 และ 7 ซึ่งแสดงในรูป (b) ซึ่งกราฟนี้ จะไม่มี K_3 สีน้ำเงิน และเรายังสามารถแสดงได้ว่าไม่มี K_4 สีแดง แสดงในรูป (c) โดยสมมติว่ามีกราฟ K_4 สีแดงและสมมติให้จุดหนึ่งใน K_4 คือ 0 จากนั้นจุดอื่นๆจะอยู่ในกลุ่ม 2, 3 หรือ 5, 6 โดยหลักการชองนกพิราบจะต้องมีอย่างน้อย 2 จุดที่อยู่ในกลุ่มเดียวกัน เนื่องจากมีขอบระหว่างจุดเหล่านี้ที่ไม่ได้ถูกทำให้เป็นสีแดง โดยเราจะสมมติว่าพวกเขา คือ 2 และ 5 ดังนั้นตัวเลขอื่นๆที่เหลือจะต้องเป็น 6 แต่ 6 กับ 5 ต่างกันอยู่ 1 ไม่ตรงตามสมมติฐาน จะทำให้ได้ว่ามีกราฟ K_4 สีแดงนั้นไม่ถูกต้อง



จากรูป แสดงว่ากราฟ $a = b \cup c$

นั่นคือ กราฟที่มีจุดยอด 8 จุด ซึ่งไม่มีจุดยอด 3 จุดใดๆหรือจุดยอด 4 จุดใดๆที่เส้นเชื่อมทุกคู่ มีสีเดียวกัน

ดังนั้น $R(3, 4) > 8$

จาก $R(3, 4) \leq 9$

จะได้ว่า $R(3, 4) = 9$

ตัวอย่าง 3.5.3: $R(3, 5)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_3 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_5 สีแดง จากทฤษฎีบท 3.3.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

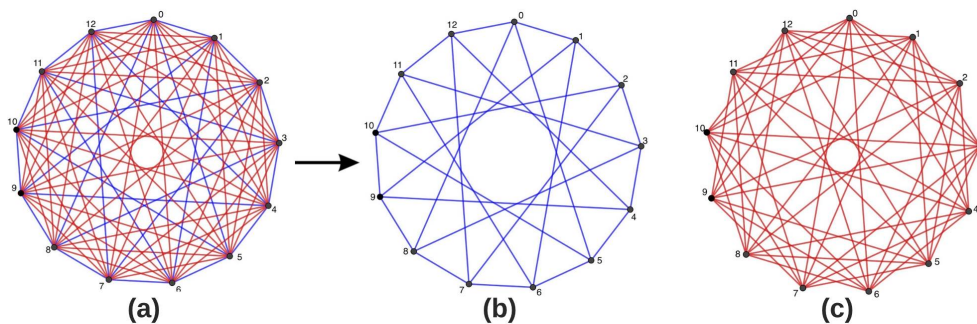
$$R(3, 5) \leq R(3 - 1, 5) + R(3, 5 - 1) = R(2, 5) + R(3, 4)$$

เนื่องจาก $R(2, 5) = 5$ และ $R(3, 4) = 9$ จากทฤษฎีบท 3.2.3 และจากตัวอย่าง 3.5.2

จะได้ว่า $R(3, 5) \leq 5 + 9 = 14$

นอกจากนี้เราสามารถพิสูจน์แย้งกรณีที่มีจุดยอด 13 จุดได้ โดยระบายสีเส้นเชื่อมดังภาพ

พิจารณาจุดใดๆในกราฟ G ที่มี 13 จุด โดยกำหนดให้แต่ละจุดเป็นตัวเลข 0 – 12 และลงสีขอบโดยที่ขอบจะมีสีน้ำเงินก็ต่อเมื่อความต่างของเลขระหว่างจุดทั้งสองที่ติดกันเป็น 1, 5, 8 และ 12 ซึ่งแสดงในรูป (b) ซึ่งกราฟนี้จะไม่มี K_3 สีน้ำเงิน และเรายังสามารถแสดงได้ว่าไม่มี K_5 สีแดง แสดงในรูป (c) โดยสมมติว่ามีกราฟ K_5 สีแดงและสมมติให้จุดหนึ่งใน K_5 คือ 0 จากนั้นจุดอื่นๆจะอยู่ในกลุ่ม 2, 3, 4 หรือ 6, 7 หรือ 9, 10, 11 โดยหลักการชงนกพิราบจะต้องมีอย่างน้อย 2 จุดที่อยู่ในกลุ่มเดียวกัน เนื่องจากมีขอบระหว่างจุดเหล่านี้ที่ไม่ได้ถูกทำให้เป็นสีแดง โดยเราจะสมมติว่าพวกเขา คือ 2 และ 4 ดังนั้นตัวเลขอื่นๆที่เหลือจะต้องเป็น 6 และ 11 เท่านั้น แต่ 6 กับ 11 ต่างกันอยู่ 5 ไม่ตรงตามสมมติฐาน จะทำให้ได้ว่ามีกราฟ K_5 สีแดงนั้นไม่ถูกต้อง



จากรูป แสดงว่ากราฟ $a = b \cup c$

นั่นคือ กราฟที่มีจุดยอด 13 จุด ซึ่งไม่มีจุดยอด 3 จุดใดๆหรือจุดยอด 5 จุดใดๆที่เส้นเชื่อมทุกคู่มีสีเดียวกัน

ดังนั้น $R(3, 5) > 13$

จาก $R(3, 5) \leq 14$

จะได้ว่า $R(3, 5) = 14$

ตัวอย่าง 3.5.4 : $R(3, 6)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_3 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_6 สีแดง จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(3, 6) \leq R(3 - 1, 6) + R(3, 6 - 1) = R(2, 6) + R(3, 5)$$

เนื่องจาก $R(2, 6) = 6$ และ $R(3, 5) = 14$ จากทฤษฎีบท 3.2.3 และจากตัวอย่าง 3.5.3

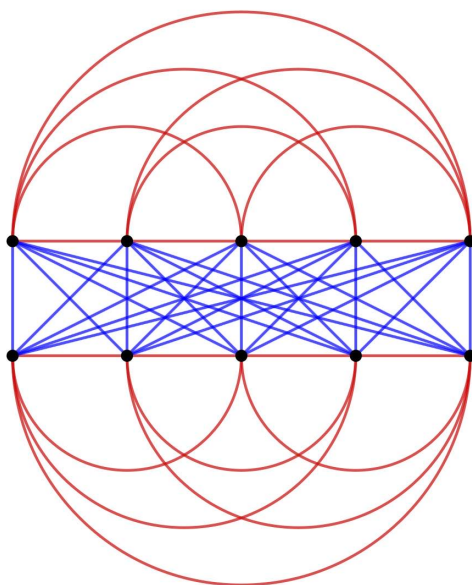
และจะเห็นได้ว่า $R(2, 6) = 6$ เป็นจำนวนคู่และ $R(3, 5) = 14$ เป็นจำนวนคู่

$$\text{จะได้ว่า } R(3, 6) \leq 6 + 14 - 1 = 19$$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(3, 6) > (3 - 1)(6 - 1) = 2 \cdot 5 = 10$$

จะแสดงกราฟสมบูรณ์ K_{10} ใน 2 แถว และ 5 หลัก ดังรูป



จากรูป ลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ($K_{5,5}$) และ ลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน (K_5) ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_3 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มี K_6 สีแดง

$$\text{ดังนั้น } R(3, 6) > 10$$

$$\text{นั่นคือ } 11 \leq R(3, 6) \leq 19$$

ตัวอย่าง 3.5.5: $R(3, 7)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_3 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_7 สีแดง โดยที่ $m = 3, n = 7$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

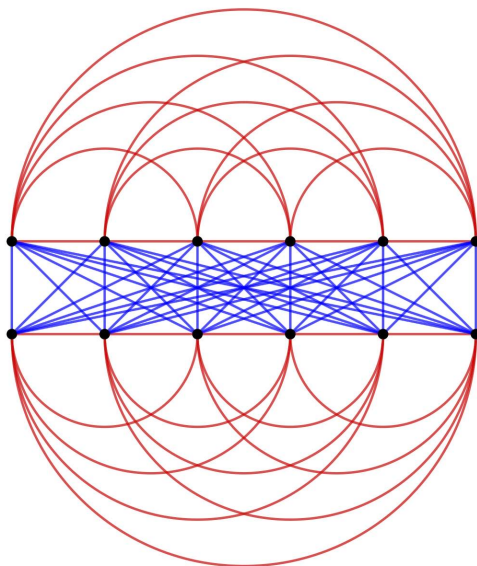
$$\begin{aligned} R(3, 7) &\leq \binom{3+7-2}{3-1} \\ &= \binom{8}{2} \\ &= 28 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(3, 7) \leq 28$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(3, 7) > (3-1)(7-1) = 2 \cdot 6 = 12$$

จะแสดงกราฟสมบูรณ์ K_{12} ใน 2 แถว และ 6 หลัก ดังรูป



จากรูป ลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ($K_{6,6}$) และลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน (K_6) ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_3 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มี K_7 สีแดง

$$\text{ดังนั้น } R(3, 7) > 12$$

$$\text{นั่นคือ } 13 \leq R(3, 7) \leq 28$$

ตัวอย่าง 3.5.6: $R(3, 8)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_3 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_8 สีแดง โดยที่ $m = 3, n = 8$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

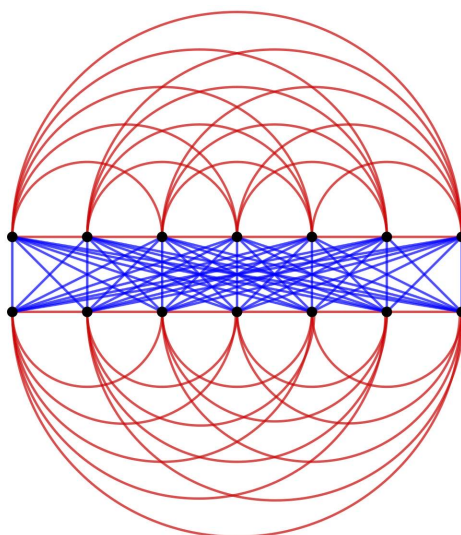
$$\begin{aligned} R(3, 8) &\leq \binom{3+8-2}{3-1} \\ &= \binom{9}{2} \\ &= 36 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(3, 8) \leq 36$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(3, 8) > (3-1)(8-1) = 2 \cdot 7 = 14$$

จะแสดงกราฟสมบูรณ์ K_{14} ใน 2 แถว และ 7 หลัก ดังรูป



จากรูป ลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ($K_{7,7}$) และลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน (K_7) ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_3 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มี K_8 สีแดง

$$\text{ดังนั้น } R(3, 8) > 14$$

$$\text{นั่นคือ } 15 \leq R(3, 8) \leq 36$$

ตัวอย่าง 3.5.7: $R(3, 9)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_3 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_9 สีแดง โดยที่ $m = 3, n = 9$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

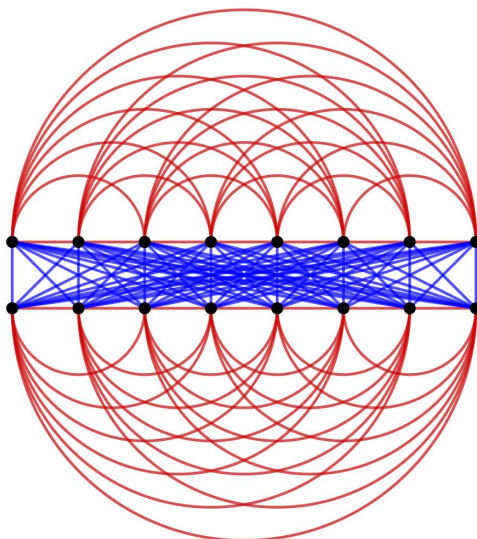
$$\begin{aligned} R(3, 9) &\leq \binom{3+9-2}{3-1} \\ &= \binom{10}{2} \\ &= 45 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(3, 9) \leq 45$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(3, 9) > (3-1)(9-1) = 2 \cdot 8 = 16$$

จะแสดงกราฟสมบูรณ์ K_{16} ใน 2 แถว และ 8 หลัก ดังรูป



จากรูป ลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ($K_{8,8}$) และลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน (K_8) ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_3 สีน้ำเงิน หรือ ไม่มี K_9 สีแดง

$$\text{ดังนั้น } R(3, 9) > 16$$

$$\text{นั่นคือ } 17 \leq R(3, 9) \leq 45$$

ตัวอย่าง 3.5.8: $R(4, 4) = 18$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_4 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_4 สีแดง จากทฤษฎีบท 3.3.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

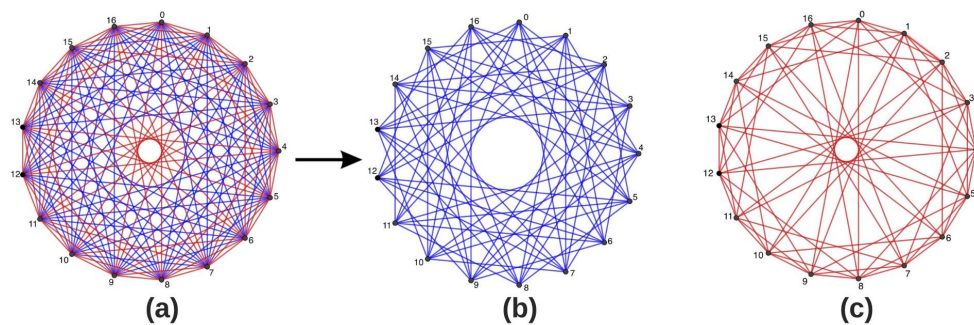
$$R(4, 4) \leq R(4 - 1, 4) + R(4, 4 - 1) = R(3, 4) + R(4, 3)$$

เนื่องจาก $R(3, 4) = R(4, 3) = 9$ จากทฤษฎีบท 3.2.1 และจากตัวอย่าง 3.5.2

$$\text{จะได้ว่า } R(4, 4) \leq 9 + 9 = 18$$

นอกจากนี้เราสามารถพิสูจน์แย้งกรณีที่มีจุดยอด 17 จุดได้ โดยระบายสีเส้นเชื่อมดังภาพ

พิจารณาจุดใดๆในกราฟ G ที่มี 17 จุด โดยกำหนดให้แต่ละจุดเป็นตัวเลข 0 – 16 และลงสีขอบโดยที่ขอบจะมีสีน้ำเงินก็ต่อเมื่อความต่างของเลขระหว่างจุดทั้งสองที่ติดกันเป็น 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12 และ 14 ซึ่งแสดงในรูป (b) ซึ่งกราฟนี้จะไม่มี K_4 สีน้ำเงิน และเรายังสามารถแสดงได้ว่าไม่มี K_4 สีแดง แสดงในรูป (c) โดยพิจารณาความเป็นไปได้ของ K_4 สีแดง โดยสมมติว่า 1 อยู่ใน K_4 ที่มีสีแดง จะต้องมีส่วนเชื่อมที่เหลือในเซต $\{2, 9, 16\}$ แต่ในเซตนี้บางเส้นเชื่อมไม่มีสีแดง ทำให้เห็นได้ว่าไม่สามารถเกิด K_4 สีแดงได้



จากรูป แสดงว่ากราฟ $a = b \cup c$

นั่นคือ กราฟที่มีจุดยอด 17 จุด ซึ่งไม่มีจุดยอด 4 จุดใดๆที่เส้นเชื่อมทุกคู่มีสีเดียวกัน

$$\text{ดังนั้น } R(4, 4) > 17$$

$$\text{จาก } R(4, 4) \leq 18$$

$$\text{จะได้ว่า } R(4, 4) = 18$$

ตัวอย่าง 3.5.9: $R(4, 5)$, $R(4, 6)$, $R(4, 7)$, $R(4, 8)$ และ $R(4, 9)$

พิสูจน์ 1.) $R(4, 5)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_4 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_5 สีแดง จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(4, 5) \leq R(4 - 1, 5) + R(4, 5 - 1) = R(3, 5) + R(4, 4)$$

เนื่องจาก $R(3, 5) = 14$ และ $R(4, 4) = 18$ จากทฤษฎีบท 3.3.2 และจากตัวอย่าง 3.5.3

และจากตัวอย่าง 3.5.8

และจะเห็นได้ว่า $R(3, 5) = 14$ เป็นจำนวนคู่และ $R(4, 4) = 18$ เป็นจำนวนคู่

$$\text{จะได้ว่า } R(4, 5) \leq 14 + 18 - 1 = 31$$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(4, 5) > (4 - 1)(5 - 1) = 3 \cdot 4 = 12$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{12} ใน 3 แถว และ 4 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_4 สีน้ำเงิน หรือ K_5 สีแดง ดังนั้น $R(4, 5) > 12$

$$\text{นั่นคือ } 13 \leq R(4, 5) \leq 31$$

2.) $R(4, 6)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_4 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_6 สีแดง โดยที่ $m = 4, n = 6$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(4, 6) &\leq \binom{4 + 6 - 2}{4 - 1} \\ &= \binom{8}{3} \\ &= 56 \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } R(4, 6) \leq 56$$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(4, 6) > (4 - 1)(6 - 1) = 3 \cdot 5 = 15$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{15} ใน 3 แถว และ 5 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_4 สีน้ำเงิน หรือ K_6 สีแดง ดังนั้น $R(4, 6) > 15$

$$\text{นั่นคือ } 16 \leq R(4, 6) \leq 56$$

3.) $R(4, 7)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_4 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_7 สีแดง โดยที่ $m = 4, n = 7$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(4, 7) &\leq \binom{4+7-2}{4-1} \\ &= \binom{9}{3} \\ &= 84 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(4, 7) \leq 84$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(4, 7) > (4-1)(7-1) = 3 \cdot 6 = 18$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{18} ใน 3 แถว และ 6 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_4 สีน้ำเงิน หรือ K_7 สีแดง

ดังนั้น $R(4, 7) > 18$

นั่นคือ $19 \leq R(4, 7) \leq 84$

4.) $R(4, 8)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_4 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_8 สีแดง โดยที่ $m = 4, n = 8$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(4, 8) &\leq \binom{4+8-2}{4-1} \\ &= \binom{10}{3} \\ &= 120 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(4, 8) \leq 120$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(4, 8) > (4-1)(8-1) = 3 \cdot 7 = 21$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{21} ใน 3 แถว และ 7 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยงซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_4 สีน้ำเงิน หรือ K_8 สีแดง

ดังนั้น $R(4, 8) > 21$

นั่นคือ $22 \leq R(4, 8) \leq 120$

5.) $R(4, 9)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_4 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_9 สีแดง โดยที่ $m = 4, n = 9$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(4, 9) &\leq \binom{4+9-2}{4-1} \\ &= \binom{11}{3} \\ &= 165 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(4, 9) \leq 165$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(4, 9) > (4-1)(9-1) = 3 \cdot 8 = 24$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{24} ใน 3 แถว และ 8 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_4 สีน้ำเงิน หรือ K_9 สีแดง ดังนั้น $R(4, 9) > 24$

นั่นคือ $25 \leq R(4, 9) \leq 165$

ตัวอย่าง 3.5.10 : $R(5, 5)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_5 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_5 สีแดง โดยที่ $m = n = 5$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(5, 5) &\leq \binom{2 \cdot 5 - 2}{5 - 1} \\ &= \binom{8}{4} \\ &= 70 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(5, 5) \leq 70$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.2 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\text{เมื่อ } \binom{n}{5} 2^{1-\binom{5}{2}} < 1 \text{ จะได้ } \binom{n}{5} \frac{1}{512} < 1$$

นั่นคือ $\binom{n}{5} < 512$ ดังนั้น $n = 11$

แล้วจะได้ว่า $R(5, 5) > 11$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่างเราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(5, 5) > (5-1)(5-1) = 4 \cdot 4 = 16$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{16} ใน 4 แถว และ 4 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_5 สีน้ำเงิน หรือ K_5 สีแดง ดังนั้น $R(5, 5) > 16$ นั่นคือ $17 \leq R(5, 5) \leq 70$

ตัวอย่าง 3.5.11: $R(5, 6)$, $R(5, 7)$, $R(5, 8)$ และ $R(5, 9)$

พิสูจน์ 1.) $R(5, 6)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_5 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_6 สีแดง โดยที่ $m = 5, n = 6$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(5, 6) &\leq \binom{5+6-2}{5-1} \\ &= \binom{9}{4} \\ &= 126 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(5, 6) \leq 126$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(5, 6) > (5-1)(6-1) = 4 \cdot 5 = 20$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{20} ใน 4 แถว และ 5 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_5 สีน้ำเงิน หรือ K_6 สีแดง ดังนั้น $R(5, 6) > 20$

นั่นคือ $21 \leq R(5, 6) \leq 126$

2.) $R(5, 7)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_5 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_7 สีแดง โดยที่ $m = 5, n = 7$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(5, 7) &\leq \binom{5+7-2}{5-1} \\ &= \binom{10}{4} \\ &= 210 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(5, 7) \leq 210$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(5, 7) > (5-1)(7-1) = 4 \cdot 6 = 24$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{24} ใน 4 แถว และ 6 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_5 สีน้ำเงิน หรือ K_7 สีแดง ดังนั้น $R(5, 7) > 24$

นั่นคือ $25 \leq R(5, 7) \leq 210$

3.) $R(5, 8)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_5 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_8 สีแดง โดยที่ $m = 5, n = 8$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(5, 8) &\leq \binom{5+8-2}{5-1} \\ &= \binom{11}{4} \\ &= 330 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(5, 8) \leq 330$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(5, 8) > (5-1)(8-1) = 4 \cdot 7 = 28$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{28} ใน 4 แถว และ 7 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_5 สีน้ำเงิน หรือ K_8 สีแดง ดังนั้น $R(5, 8) > 28$

นั่นคือ $29 \leq R(5, 8) \leq 330$

4.) $R(5, 9)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_5 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_9 สีแดง โดยที่ $m = 5, n = 9$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(5, 9) &\leq \binom{5+9-2}{5-1} \\ &= \binom{12}{4} \\ &= 495 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(5, 9) \leq 495$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(5, 9) > (5-1)(9-1) = 4 \cdot 8 = 32$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{32} ใน 4 แถว และ 8 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยงซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_5 สีน้ำเงิน หรือ K_9 สีแดง ดังนั้น $R(5, 9) > 32$

นั่นคือ $33 \leq R(5, 9) \leq 495$

ตัวอย่าง 3.5.12: $R(6, 6)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_6 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_6 สีแดง โดยที่ $m = n = 6$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(6, 6) &\leq \binom{2 \cdot 6 - 2}{6 - 1} \\ &= \binom{10}{5} \\ &= 252 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(6, 6) \leq 252$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.2 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\text{เมื่อ } \binom{n}{6} 2^{1-\binom{6}{2}} < 1 \text{ จะได้ } \binom{n}{6} \frac{1}{16384} < 1$$

นั่นคือ $\binom{n}{6} < 16384$ ดังนั้น $n = 17$

แล้วจะได้ว่า $R(6, 6) > 17$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(6, 6) > (6 - 1)(6 - 1) = 5 \cdot 5 = 25$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{25} ใน 5 แถว และ 5 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_6 สีน้ำเงิน หรือ K_6 สีแดง ดังนั้น $R(6, 6) > 25$

นั่นคือ $26 \leq R(6, 6) \leq 252$

ตัวอย่าง 3.5.13: $R(6, 7)$, $R(6, 8)$ และ $R(6, 9)$

พิสูจน์ 1.) $R(6, 7)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_6 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_7 สีแดง โดยที่ $m = 6, n = 7$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(6, 7) &\leq \binom{6+7-2}{6-1} \\ &= \binom{11}{5} \\ &= 462 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(6, 7) \leq 462$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(6, 7) > (6-1)(7-1) = 5 \cdot 6 = 30$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{30} ใน 5 แถว และ 6 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_6 สีน้ำเงิน หรือ K_7 สีแดง ดังนั้น $R(6, 7) > 30$

นั่นคือ $31 \leq R(6, 7) \leq 462$

2.) $R(6, 8)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_6 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_8 สีแดง โดยที่ $m = 6, n = 8$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(6, 8) &\leq \binom{6+8-2}{6-1} \\ &= \binom{12}{5} \\ &= 792 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(6, 8) \leq 792$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(6, 8) > (6-1)(8-1) = 5 \cdot 7 = 35$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{35} ใน 5 แถว และ 7 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_6 สีน้ำเงิน หรือ K_8 สีแดง ดังนั้น $R(6, 8) > 35$

นั่นคือ $36 \leq R(6, 8) \leq 792$

3.) $R(6, 9)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_6 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_9 สีแดง โดยที่ $m = 6, n = 9$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(6, 9) &\leq \binom{6+9-2}{6-1} \\ &= \binom{13}{5} \\ &= 1287 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(6, 9) \leq 1287$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(6, 9) > (6-1)(9-1) = 5 \cdot 8 = 40$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{40} ใน 5 แถว และ 8 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_6 สีน้ำเงิน หรือ K_9 สีแดง ดังนั้น $R(6, 9) > 40$

นั่นคือ $41 \leq R(6, 9) \leq 1287$

ตัวอย่าง 3.5.14: $R(7, 7)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_7 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_7 สีแดง โดยที่ $m = n = 7$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(7, 7) &\leq \binom{2 \cdot 7 - 2}{7-1} \\ &= \binom{12}{6} \\ &= 924 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(7, 7) \leq 924$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.2 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\text{เมื่อ } \binom{n}{7} 2^{1-\binom{7}{2}} < 1 \text{ จะได้ } \binom{n}{7} \frac{1}{1048576} < 1$$

$$\text{นั่นคือ } \binom{n}{7} < 1048576 \text{ ดังนั้น } n = 27$$

แล้วจะได้ว่า $R(7, 7) > 27$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(7, 7) > (7-1)(7-1) = 6 \cdot 6 = 36$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{36} ใน 6 แถว และ 6 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_7 สีน้ำเงิน หรือ K_7 สีแดง

ดังนั้น $R(7, 7) > 36$

นั่นคือ $37 \leq R(7, 7) \leq 924$

ตัวอย่าง 3.5.15: $R(7, 8)$ และ $R(7, 9)$

พิสูจน์ 1.) $R(7, 8)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_7 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_8 สีแดง โดยที่ $m = 7, n = 8$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(7, 8) &\leq \binom{7+8-2}{7-1} \\ &= \binom{13}{6} \\ &= 1716 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(7, 8) \leq 1716$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(7, 8) > (7-1)(8-1) = 6 \cdot 7 = 42$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{42} ใน 6 แถว และ 7 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_7 สีน้ำเงิน หรือ K_8 สีแดง

ดังนั้น $R(7, 8) > 42$

นั่นคือ $43 \leq R(7, 8) \leq 1716$

2.) $R(7, 9)$ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_7 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_9 สีแดง โดยที่ $m = 7, n = 9$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(7, 9) &\leq \binom{7+9-2}{7-1} \\ &= \binom{14}{6} \\ &= 3003 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(7, 9) \leq 3003$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(7, 9) > (7-1)(9-1) = 6 \cdot 8 = 48$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{48} ใน 6 แถว และ 8 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_7 สีน้ำเงิน หรือ K_9 สีแดง

ดังนั้น $R(7, 9) > 48$

นั่นคือ $49 \leq R(7, 9) \leq 3003$

ตัวอย่าง 3.5.16: $R(8, 8)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_8 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_8 สีแดง โดยที่ $m = n = 8$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(8, 8) &\leq \binom{2 \cdot 8 - 2}{8 - 1} \\ &= \binom{14}{7} \\ &= 3432 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(8, 8) \leq 3432$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.2 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\text{เมื่อ } \binom{n}{8} 2^{1-\binom{8}{2}} < 1 \text{ จะได้ } \binom{n}{8} \frac{1}{2^{27}} < 1$$

$$\text{นั่นคือ } \binom{n}{8} < 2^{27} \text{ ดังนั้น } n = 42$$

แล้วจะได้ว่า $R(8, 8) > 42$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(8, 8) > (8 - 1)(8 - 1) = 7 \cdot 7 = 49$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{49} ใน 7 แถว และ 7 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_8 สีน้ำเงิน หรือ K_8 สีแดง ดังนั้น $R(8, 8) > 49$

$$\text{นั่นคือ } 50 \leq R(8, 8) \leq 3432$$

ตัวอย่าง 3.5.17: $R(8, 9)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_8 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_9 สีแดง โดยที่ $m = 8, n = 9$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(8, 9) &\leq \binom{8 + 9 - 2}{8 - 1} \\ &= \binom{15}{7} \\ &= 6435 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(8, 9) \leq 6435$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(8, 9) > (8 - 1)(9 - 1) = 7 \cdot 8 = 56$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{56} ใน 7 แถว และ 8 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_8 สีน้ำเงิน หรือ K_9 สีแดง

ดังนั้น $R(8, 9) > 56$

นั่นคือ $57 \leq R(8, 9) \leq 6435$

ตัวอย่าง 3.5.18: $R(9, 9)$

พิสูจน์ การหากราฟที่มีจำนวนจุดน้อยที่สุดที่เมื่อลงสีแล้วจะได้กราฟ K_9 สีน้ำเงิน หรือกราฟ K_9 สีแดง โดยที่ $m = n = 9$

จากทฤษฎีบทขอบเขตบน ทฤษฎีบท 3.3.3 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\begin{aligned} R(9, 9) &\leq \binom{2 \cdot 9 - 2}{9 - 1} \\ &= \binom{16}{8} \\ &= 12870 \end{aligned}$$

นั่นคือ $R(9, 9) \leq 12870$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.1 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$R(9, 9) > (9 - 1)(9 - 1) = 8 \cdot 8 = 64$$

จะได้กราฟสมบูรณ์ K_{64} ใน 8 แถว และ 8 หลัก โดยลงเส้นขอบสีแดงที่สองจุดยอดที่อยู่ในแถวเดียวกัน และลงเส้นขอบสีน้ำเงินที่อยู่ในหลักเดียวกันและจุดในแนวทแยง ซึ่งจะได้ว่า ไม่มี K_9 สีน้ำเงิน หรือ K_9 สีแดง

ดังนั้น $R(9, 9) > 64$

และจากทฤษฎีบทขอบเขตล่าง ทฤษฎีบท 3.4.2 เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\text{เมื่อ } \binom{n}{9} 2^{1-\binom{9}{2}} < 1 \text{ จะได้ } \binom{n}{9} \frac{1}{2^{35}} < 1$$

นั่นคือ $\binom{n}{9} < 2^{35}$ ดังนั้น $n = 66$

แล้วจะได้ว่า $R(9, 9) > 66$

นั่นคือ $67 \leq R(9, 9) \leq 12870$

บทที่ 4

สรุปผลการศึกษา

(Conclusions)

ในการค้นคว้าอิสระนี้ เราศึกษาเกี่ยวกับนิยามของจำนวนแรมซีย์ ซึ่งมีนิยามดังนี้ จำนวนจุดยอดของกราฟสมบูรณ์ที่น้อยที่สุดที่เมื่อระบายสีเส้นเชื่อมด้วย 2 สีในวิธีใดๆ จะทำให้เกิดกราฟย่อยสมบูรณ์ที่มีจุดยอด m จุด ซึ่งเส้นเชื่อมทุกเส้นมีสีที่ 1 (สีน้ำเงิน) หรือเกิดกราฟย่อยสมบูรณ์ที่มีจุดยอด n จุด ซึ่งเส้นเชื่อมทุกเส้นมีสีที่ 2 (สีแดง) ซึ่งเรียกจำนวนนี้ว่า จำนวนแรมซีย์ $R(m, n)$

เราได้ศึกษาทฤษฎีบทของจำนวนแรมซีย์ ที่กล่าวไว้ว่า ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $m, n \geq 2$ แล้วมีจำนวนเต็มบวก s ที่น้อยที่สุดที่ $s \geq 1$ และแทนจำนวนที่น้อยที่สุดนี้ด้วย $R(m, n)$ โดยที่กราฟ K_s ถูกแบ่งสีด้วย 2 สีใดๆ จะมีกราฟย่อย K_m หรือกราฟย่อย K_n ที่มีสีเดียวกัน และได้ศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีบทบางประการของจำนวนแรมซีย์ที่ใช้ในการประมาณค่า นั่นคือ ค่าที่ง่ายของจำนวนแรมซีย์ (Trivial values of Ramsey Numbers) โดยได้ศึกษาค่าที่ง่ายของจำนวนแรมซีย์ ได้แก่

$$(1) R(m, n) = R(n, m)$$

$$(2) R(1, n) = R(m, 1) = 1$$

$$(3) R(m, 2) = m \text{ และ } R(2, n) = n$$

และได้ศึกษาทฤษฎีบทขอบเขตล่างและขอบเขตบน ซึ่งจะได้ว่า

$$(1) \text{ สำหรับทุก } m, n \in \mathbb{N}, \quad R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$$

$$(2) \text{ สำหรับทุก } m, n \in \mathbb{N}, \quad R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1$$

$$(3) R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$$

$$(4) \text{ สำหรับ } m, n > 0, \quad R(m, n) > (m-1)(n-1)$$

$$(5) \text{ ถ้า } \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \text{ แล้ว } R(k, k) > n$$

นั่นคือเราจะนำทฤษฎีบททั้งหมดนี้มาใช้ในการประมาณค่าจำนวนแรมซีย์ซึ่งสิ่งที่เราต้องการจะแสดงคือมีกราฟสมบูรณ์ K_s ที่มีกราฟย่อย K_m หรือกราฟย่อย K_n ที่มีสีเดียวกัน โดยที่จำนวนแรมซีย์แต่ละตัวจะใช้เทคนิคในการประมาณค่าที่แตกต่างกัน ซึ่งในการค้นคว้าอิสระนี้เราจะศึกษาจำนวนแรมซีย์ $R(m, n)$ ที่ $1 \leq m \leq 9$ และ $1 \leq n \leq 9$ เท่านั้น

ผลการศึกษาทฤษฎีบทของจำนวนแรมซีซึ่งนำมาใช้ในการประมาณค่า จะได้ผลการศึกษาตามตารางดังนี้

m, n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	9	14	11-19	13-28	15-36	17-45
4	1	4	9	18	13-31	16-56	19-84	22-120	25-165
5	1	5	14	13-31	17-70	21-126	25-210	29-330	33-495
6	1	6	11-19	16-56	21-126	26-252	31-462	36-792	41-1287
7	1	7	13-28	19-84	25-210	31-462	37-924	43-1716	49-3003
8	1	8	15-36	22-120	29-330	36-792	43-1716	50-3432	57-6435
9	1	9	17-45	25-165	33-495	41-1287	49-3003	57-6435	67-12870

ตารางที่ 1: ผลลัพธ์ของการประมาณค่าของจำนวนแรมซี $R(m, n)$ โดยที่ $1 \leq m \leq 9$ และ $1 \leq n \leq 9$

จากตารางที่ 1 เราจะเห็นได้ว่าจำนวนแรมซี $R(m, n)$ บางตัวเราสามารถประมาณค่าออกมาเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่งได้ เช่น $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $R(3, 5) = 14$ และ $R(4, 4) = 18$ สำหรับจำนวนแรมซี $R(m, n)$ บางตัวเราไม่สามารถที่จะประมาณค่าออกมาได้แต่เราสามารถที่จะประมาณเป็นขอบเขตบนและขอบเขตล่างได้ เช่น $11 \leq R(3, 6) \leq 19$, $13 \leq R(3, 7) \leq 25$, $15 \leq R(3, 8) \leq 31$, $17 \leq R(3, 9) \leq 37$ และ $17 \leq R(5, 5) \leq 70$ เป็นต้น

บรรณานุกรม

- [1] วรณศิริ วรณสิทธิ์, ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น, หน่วยพิมพ์เอกสาร คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่.
- [2] Christos Nestor Chachamis, Ramsey Numbers, <https://math.mit.edu/apost/courses/ramsey-numbers.pdf>, 2018, page 1-8.
- [3] Lane Barton IV, Ramsey Theory, <https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf>, 2016, page 7-16.
- [4] Matthew Steed, Some Theorems And Applications Of Ramsey Theory, <https://math.uchicago.edu/may/REUDOCs/Steed.pdf>, page 2-4.

A simple technique for estimating the Ramsey Numbers

Sareeya Phuangwilai

Advisor : Asst. Prof. Dr. Thanasak Moukhtonglang

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University

Abstract

In this independent study, we study the definitions and basic properties of graphs, as well as the theories of Ramsey Numbers. We have examined simple values of Ramsey numbers and the theorems regarding both upper and lower bounds of these numbers. Additionally, we have delved into the approximation of Ramsey numbers, specifically $R(m, n)$, where $1 \leq m \leq 9$ and $1 \leq n \leq 9$. For certain instances of Ramsey numbers precise values have been successfully approximated, while for others, although an exact value may be elusive, we have been able to determine both upper and lower bounds.

Example

1. Finding the graph with the least number of points that when colored gives a blue K_3 graph or a red K_3 graph.

From the theorem 4, $R(3, 3) \leq 6$

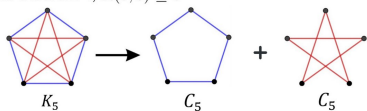


Figure 1 : A graph with 5 vertices, which does not have any 3 vertices where every pair of edges is blue or any 3 vertices where every pair of edges is red, so $R(3, 3) > 5$. Therefore, $R(3, 3) = 6$

2. Finding the graph with the least number of points that when colored gives a blue K_3 graph or a red K_7 graph.

From the theorem 6, $R(3, 7) \leq 28$ and from the theorem 7, $R(3, 7) > 12$

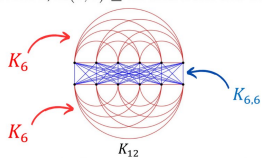


Figure 2 : By placing red edges at two vertices in the same row and blue edges in the same column and diagonal points. This will mean that there is no K_3 blue or no K_7 red, so $R(3, 7) > 12$ that is $13 \leq R(3, 7) \leq 28$

3. Finding the graph with the least number of points that when colored gives a blue K_4 graph or a red K_4 graph.

From the theorem 3, $R(4, 4) \leq 18$

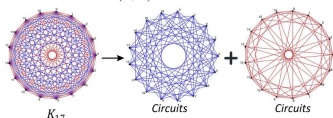


Figure 3 : A graph with 17 vertices, which does not have any 4 vertices where every pair of edges is blue or any 4 vertices where every pair of edges is red, so $R(4, 4) > 17$. Therefore, $R(4, 4) = 18$

Ramsey Numbers

Theorem : For all $m, n \geq 2$ there exists an $s \geq 1$ such that every 2-coloring of K_s contains a monochromatic clique of order m or n

Definition : The smallest number s such that every 2-coloring of K_s contains a monochromatic clique of order m or n is denoted $R(m, n)$

Ramsey's boundary Theorems

- $R(m, n) = R(n, m)$
- $R(1, n) = R(m, 1) = 1$
- $R(m, 2) = m$ or $R(2, n) = n$
- For all $m, n \in \mathbb{N}$, $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$
- For all $m, n \in \mathbb{N}$, if $R(m-1, n)$ and $R(m, n-1)$ both even then $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1$
- $R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$
- For $m, n > 0$, $R(m, n) > (m-1)(n-1)$
- If $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$ then $R(k, k) > n$

For $k \geq 3$, $R(k, k) > 2^{\frac{k}{2}}$

Conclusions

m, n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	3	6	9	14	11-19	13-28	15-36	17-45
4	1	4	6	18	13-31	16-56	19-84	22-120	25-165
5	1	5	14	13-31	17-70	21-126	25-210	29-330	33-495
6	1	6	11-19	16-56	21-126	26-252	31-462	36-792	41-1287
7	1	7	13-28	19-84	25-210	31-462	37-924	43-1716	49-3003
8	1	8	15-36	22-120	29-330	36-792	43-1716	50-3432	57-6435
9	1	9	25-165	25-165	33-495	41-1287	49-3003	57-6435	67-12870

Table 1 : Results of the Ramsey Numbers estimation $R(m, n)$, when $1 \leq m \leq 9$ and $1 \leq n \leq 9$

References

- [1] Christos Nestor Chachamis, Ramsey Numbers, <https://math.mit.edu/apost/courses/ramsey-numbers.pdf>, 2018, page 1-8.
- [2] Lane Barton IV, Ramsey Theory, <https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf>, 2016, page 7-16.
- [3] Matthew Steed, Some Theorems And Applications Of Ramsey Theory, <https://math.uchicago.edu/~may/REUDOCs/Steed.pdf>, page 2-4.
- [4] Wannasiri Wannasit, Introduction to Graph Theory, Faculty of Science, Chiang Mai University.